

**ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМПЕРАТРИЦЫ ЕКАТЕРИНЫ II»**



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»

ФИЗИКА

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОТБОРОЧНОМУ ТУРУ ОЛИМПИАДЫ
2026/2027 ГОДА**

Ф И З И К А

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Естественные науки» (предмет олимпиады – физика) проходит с использованием интернет-технологий (заочно).

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовленность участников олимпиады в соответствии с Кодификатором элементов содержания по физике 2020 года, помещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений» <http://www.fipi.ru>.

В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса физики.

- **Механика.** (кинематика, динамика, статика, законы сохранения в механике, механические колебания и волны).
- **Молекулярная физика. Термодинамика. Гидростатика.** (молекулярно-кинетическая теория, законы идеального газа, законы термодинамики, гидростатика).
- **Электростатика.** (электростатическое поле, проводники и диэлектрики, постоянный ток, энергия системы зарядов и электрического поля).
- **Электромагнетизм. Оптика и Квантовая физика.** (магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны, оптика, основы СТО, корпускулярно-волновой дуализм, физика атома, физика атомного ядра).

Для конструирования вариантов олимпиадной работы отборочного тура использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки). Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности форме выполнения.

Первый блок содержит тестовые задания с выбором правильного ответа из четырех представленных. Второй блок содержит тестовые задания с открытым ответом в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи более двух физических законов, относящихся к одной или нескольким темам, комбинировать известные алгоритмы действий.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления достаточно высокой степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний и смекалки.

На задания из третьего блока необходим краткий ответ в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы отборочного этапа, состоящий из 30 заданий: пятнадцать задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий; пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за выполненные задания, суммируются.

РАЗДЕЛЫ ДИСЦИПЛИНЫ И ТЕМЫ, ВКЛЮЧЕННЫЕ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2026

Раздел 1. Механика

1.1. КИНЕМАТИКА

1.1.1. Механическое движение и его виды. Относительность механического движения. Система отсчета.

1.1.2. Материальная точка и ее радиус-вектор. Траектория, перемещение, путь. Сложение перемещений.

1.1.3. Скорость материальной точки. Сложение скоростей.

1.1.4. Ускорение материальной точки.
1.1.5. Равномерное прямолинейное движение.
1.1.6. Равноускоренное прямолинейное движение.
1.1.7. Свободное падение. Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом α к горизонту.

1.1.8. Движение точки по окружности. Линейная и угловая скорость точки соответственно. Центростремительное ускорение.

1.1.9 Твёрдое тело. Поступательное и вращательное движение твёрдого тела.

1.2 ДИНАМИКА

1.2.1 Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея.

1.2.2. Масса тела. Плотность вещества.

1.2.3. Сила. Принцип суперпозиции сил.

1.2.4. Второй и третий законы Ньютона.

1.2.5. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты над поверхностью планеты. Вес тела. Невесомость.

1.2.6. Движение небесных тел и их искусственных спутников. Первая космическая скорость. Вторая космическая скорость.

1.2.7. Сила упругости. Закон Гука.

1.2.8. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения. Сила трения покоя. Коэффициент трения.

1.2.9. Давление.

1.3. СТАТИКА

1.3.1. Момент силы относительно оси вращения.

1.3.2. Условия равновесия твёрдого тела.

1.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

1.4.1. Импульс материальной точки. Импульс системы тел.

1.4.2. Закон изменения и сохранения импульса.

1.4.3. Работа силы. Мощность силы.

1.4.4. Кинетическая энергия материальной точки. Закон изменения кинетической энергии системы материальных точек.

1.4.5. Потенциальная энергия для потенциальных сил. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

1.4.6. Закон изменения и сохранения механической энергии.

1.4.9. Закон сохранения механической энергии.

1.5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1.5.1. Гармонические колебания. Амплитуда и фаза колебаний. Кинематическое, динамическое и энергетическое (закон сохранения механической энергии) описание. Связь амплитуды колебаний исходной величины с амплитудами колебаний её скорости и ускорения.

1.5.2. Период и частота колебаний.

1.5.3. Период малых свободных колебаний математического и пружинного маятника.

1.5.4. Вынужденные колебания. Резонанс.

1.5.5. Поперечные и продольные волны. Скорость.

распространения и длина волны.

Раздел 2. Молекулярная физика. Термодинамика

2.1. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

2.1.1. Модели строения газов, жидкостей и твёрдых тел.

2.1.2. Тепловое движение атомов и молекул вещества.

2.1.3. Взаимодействие частиц вещества. Диффузия. Броуновское движение.

2.1.4. Модель идеального газа в МКТ: частицы газа движутся хаотически и не взаимодействуют друг с другом.

2.1.5. Абсолютная температура. Связь температуры газа со средней кинетической энергией поступательного теплового движения его частиц.

2.1.6. Модель идеального газа в термодинамике.

2.1.7. Уравнение Менделеева – Клапейрона. Выражение для внутренней энергии одноатомного идеального газа.

2.1.8. Закон Дальтона для давления смеси разреженных газов.

2.1.9. Изопроцессы: изотермический, изохорный, изобарный, адиабатный процессы.

2.1.10. Изменение агрегатных состояний вещества: испарение и конденсация, плавление и кристаллизация, кипение жидкости. Преобразование энергии в фазовых переходах.

2.2. ТЕРМОДИНАМИКА

2.2.1. Тепловое равновесие и температура.

2.2.2. Внутренняя энергия.

2.2.3. Теплопередача.

2.2.4. Количество теплоты. Удельная теплоемкость вещества. Удельная теплота парообразования. Удельная теплота плавления. Удельная теплота сгорания топлива.

2.2.5. Элементарная работа в термодинамике. Вычисление работы по графику процесса на pV -диаграмме.

2.2.6. Первый закон термодинамики.

2.2.7. Второй закон термодинамики.

2.2.8. Принципы действия и КПД тепловой машины. Цикл Карно.

2.2.9. Уравнение теплового баланса.

2.3. ГИДРОСТАТИКА

2.3.1. Закон Паскаля. Сообщающиеся сосуды.

2.3.2. Давление в жидкости, покоящейся в ИСО. Гидравлический пресс.

2.3.3. Закон Архимеда. Условия плавания тел.

Раздел 3. Электростатика

3.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

3.1.1. Электризация тел. Электрический заряд. Два вида заряда. Закон сохранения электрического заряда.

3.1.2. Взаимодействие зарядов. Точечные заряды. Закон Кулона.

3.1.3. Электрическое поле. Его действие на электрические заряды.

3.1.4. Напряженность электрического поля. Поле точечного заряда. Однородное поле. Картины линий поля.

3.1.5. Потенциальность электростатического поля. Разность потенциалов и напряжение. Связь напряженности поля и разности потенциалов для однородного электростатического поля.

3.1.6. Принцип суперпозиции электрических полей.

3.1.7. Проводники в электростатическом поле.

3.1.8. Диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества.

3.1.9. Конденсатор. Емкость конденсатора. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.

3.1.10. Энергия заряженного конденсатора.

3.2. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

3.2.1. Постоянный электрический ток. Сила тока.

3.2.2. Напряжение и электродвижущая сила (ЭДС).

3.2.3. Закон Ома для участка цепи.

3.2.4. Электрическое сопротивление. Удельное сопротивление вещества.

3.2.5. Источники тока. ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

3.2.6. Закон Ома для полной (замкнутой) электрической цепи.

3.2.7. Параллельное и последовательное соединение проводников.

3.2.8. Работа электрического тока. Закон Джоуля – Ленца.

3.2.9. Мощность электрического тока. Тепловая мощность, выделяемая на резисторе. Мощность источника тока.

3.2.10. Носители свободных электрических зарядов в металлах, жидкостях и газах.

Раздел 4. Электромагнетизм. Оптика. Квантовая физика

4.1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

4.1.1. Механическое взаимодействие магнитов. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Принцип суперпозиции магнитных полей. Линии магнитного поля.

4.1.2. Магнитное поле проводника с током.

4.1.3. Сила Ампера.

4.1.4. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле.

4.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

4.2.1. Поток вектора магнитной индукции.

4.2.2. Явление электромагнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея.

4.2.3. Правило Ленца.

4.2.4. Индуктивность.

4.2.5. Самоиндукция. ЭДС самоиндукции.

4.2.6. Энергия магнитного поля катушки с током.

4.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.3.1. Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания. Формула Томсона. Закон сохранения энергии в колебательном контуре.

4.3.2. Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс.

4.3.3. Гармонические электромагнитные колебания.

4.3.4. Переменный ток. Производство, передача и потребление электрической энергии.

4.3.5. Электромагнитное поле. Свойства электромагнитных волн. Взаимная ориентация векторов в электромагнитной волне в вакууме. Шкала электромагнитных волн.

4.4. ОПТИКА

4.4.1. Прямолинейное распространение света в однородной среде. Луч света.

4.4.2. Закон отражения света.

4.4.3. Построение изображений в плоском зеркале.

4.4.4. Закон преломления света. Абсолютный показатель преломления. Относительный показатель преломления. Ход лучей в призме. Соотношение частот и длин волн при переходе монохроматического света через границу раздела двух оптических сред.

4.4.5. Полное внутреннее отражение.

4.4.6. Собирающие и рассеивающие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила тонкой линзы.

4.4.7. Формула тонкой линзы. Увеличение, даваемое линзой. Построение изображений в линзах.

4.4.8. Фотоаппарат как оптический прибор. Глаз как оптическая система.

4.4.9. Интерференция света. Когерентные источники. Условия наблюдения максимумов и минимумов в интерференционной картине от двух синфазных когерентных источников.

4.4.10. Дифракция света. Дифракционная решетка. Условия наблюдения главных максимумов при нормальном падении монохроматического света.

4.4.11. Дисперсия света.

4.5. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ

4.5.1. Гипотеза М. Планка о квантах. Формула Планка.

4.5.2. Фотоны. Энергия, импульс и масса фотона.

4.5.3. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

4.6. ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

4.6.1. Планетарная модель атома.

4.6.2. Постулаты Бора. Излучение и поглощение фотонов при переходе атома с одного уровня энергии на другой.

4.6.3. Линейчатые спектры.

4.6.4. Нуклонная модель ядра. Заряд. ядра. Массовое число ядра. Изотопы. Энергия связи нуклонов в ядре. Ядерные силы. Дефект массы ядра.
 4.6.5. Радиоактивность. Альфа-распад. Бета-распад. Электронный β -распад. Позитронный β -распад. Гамма-излучение. Закон радиоактивного распада.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса физики.

Каждый блок заданий состоит из четырех частей

Часть 1. Кинематика. Динамика. Статика. Законы сохранения в механике. Механические колебания и волны.

Часть 2. Молекулярно-кинетическая теория. Законы идеального газа. Законы термодинамики. Гидростатика.

Часть 3. Электростатическое поле, проводники и диэлектрики, постоянный ток, энергия системы зарядов и электрического поля.

Часть 4. Магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны. Оптика. Фотоны. Физика атома. Физика атомного ядра.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ И ИХ РЕШЕНИЯ ИЗ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ ПРОШЛЫХ ЛЕТ.

Пример 1.

Кухня освещается электрической лампой накаливания мощностью $P_{\text{л}} = 90$ Вт. Напряжение электрической сети “на входе” в квартиру $U = 220$ В. Сопротивление подводящих проводов от входа до кухни $R_{\text{пр.}} = 2$ Ом. Как изменится напряжение на лампе, если на кухне включить мультиварку мощностью $P_{\text{м}} = 300$ Вт?

Решение.

1. Определим сопротивления элементов цепи:

$$R_{\text{л}} = \frac{U^2}{P_{\text{л}}} = \frac{48400}{90} = 538 \text{ Ом}$$

$$R_{\text{м}} = \frac{U^2}{P_{\text{м}}} = \frac{48400}{300} = 161 \text{ Ом}$$

2. До включения мультиварки напряжение на лампе:

$$U_{\text{л1}} = \frac{U \cdot R_{\text{л}}}{R_{\text{пр}} + R_{\text{л}}} = \frac{220 \cdot 538}{2 + 538} = 219 \text{ В}$$

3. После включения мультиварки общее сопротивление лампочки и мультиварки составляет:

$$R_{\text{л+м}} = \frac{R_{\text{л}} \cdot R_{\text{м}}}{R_{\text{л}} + R_{\text{м}}} = \frac{538 \cdot 161}{538 + 161} = 124 \text{ Ом}$$

4. Напряжение на лампочке будет равно:

$$U_{\text{л2}} = \frac{U \cdot R_{\text{л+м}}}{R_{\text{пр}} + R_{\text{л+м}}} = \frac{220 \cdot 124}{2 + 124} = 216,5 \text{ В}$$

5. Напряжение на лампе понизилось примерно на 2,5 В

Пример 2. Медный цилиндр вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии. Радиус цилиндра R равен 30 см. Частота вращения ν равна 1 кГц. Определите напряженность электрического поля $\vec{E}$ внутри цилиндра. Как величина напряженности будет зависеть от расстояния до оси цилиндра? Какой будет разность потенциалов $\Delta\phi$ между поверхностью и осью симметрии цилиндра? Как при помощи магнитного поля скомпенсировать влияние электрического поля на заряды? Чему при этом должна быть равна величина магнитной индукции $\vec{B}$?

Решение.

1. При вращении цилиндра электроны начнут смещаться к поверхности цилиндра, создавая на ней избыточный отрицательный заряд. Такое смещение (разделение) зарядов прекратится, когда кулоновская и центробежная силы сравняются по величине.

$$m\omega^2 r = eE \text{ или } m4\pi^2\nu^2 r = eE$$

2. Зависимость от расстояния будет определяться соотношением:

$$E = \frac{4m\pi^2\nu^2}{e} r$$

3. Поскольку зависимость $E = E(r)$ линейная, то можно поступить следующим образом:

$$\text{определим среднее значение напряженности } E_{\text{ср.}} = \frac{E_{\text{max}}}{2} = \frac{4m\pi^2\nu^2 R}{2e},$$

$$\text{тогда } \Delta\phi = E_{\text{ср.}} R = \frac{4m\pi^2\nu^2 R^2}{2e} = \frac{4 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3,14^2 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,01 \cdot 10^{-5} \text{ В.}$$

4. Если приложить магнитное поле вдоль оси цилиндра (смотрим вдоль вектора $\vec{B}$, цилиндр вращается по часовой стрелке), то сила Лоренца при определенном значении магнитной индукции скомпенсирует кулоновскую силу.

$$2e\pi\nu B = \frac{4m\pi^2\nu^2}{e} r \cdot e$$

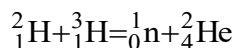
$$B = \frac{2m\pi\nu}{e} = \frac{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3,14 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,58 \cdot 10^{-8} \text{ Тл.}$$

Пример 3.

Тритиевая мишень бомбардируется ионами дейтерия, ускоренными до энергии $W_d = 2,0$ МэВ. Ядерная реакция сопровождается вылетом одного нейтрона. Какой кинетической энергией будут обладать нейтроны, вылетающие из мишени перпендикулярно пучку ионов дейтерия?

Решение.

1. Уравнение ядерной реакции:



Другой образовавшийся элемент реакции – α -частица. Определим энергию реакции синтеза.

$$W = \Delta mc^2 = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ а.е.м.} \cdot 931,5 \text{ МэВ/а.е.м.} = 17,6 \text{ МэВ.}$$

3. Можно показать, что кинетическая энергия W_d много меньше энергии покоя частиц, участвующих в реакции. Справедливы законы классической механики. Закон сохранения энергии:

$$W_d + W = W_n + W_\alpha$$

Закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_d = \vec{p}_n + \vec{p}_\alpha$$

Нас интересует рассеяние под углом 90° . Перейдем от векторной формы к скалярной:

$$p_\alpha = \sqrt{p_d^2 + p_n^2}, \text{ следовательно}$$

$$W_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2} = \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} = \frac{(m_d v_d)^2 + (m_n v_n)^2}{2m_{\alpha}}$$

4. Учтем соотношение масс взаимодействующих частиц:

$m_d = 2m_n$, $m_{\alpha} = 4m_n$ и получим $W_{\alpha} = \frac{1}{4}(2W_d + W_n)$, используя закон сохранения энергии,

получим $W_n = 14,9$ МэВ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Бегущий ребенок, разогнавшись до скорости 1,5 м/с, запрыгивает на скейтборд, стоящий на земле без движения. Масса ребенка 25 кг, скейтборда 2 кг. Чему будет равна скорость ребенка на скейтборде?

Ответ: 5 км/ч

2. Температура холодильника в 4 раза меньше температуры нагревателя тепловой машины. Чему равен КПД такой машины?

Ответ: 75%

3. Определите падение потенциала внутри источника тока, если сила тока в цепи 0,25 А. При подключении к источнику на холостом ходу вольтметра он показывает 2 В, при этом его внутреннее сопротивление равно 0,5 Ом.

Ответ: 0,125 В

4. Определите ток короткого замыкания источника ЭДС, если при внешнем сопротивлении $R_1 = 50$ Ом ток в цепи $I_1 = 0,2$ А, а при $R_2 = 110$ Ом – $I_2 = 0,1$ А.

Ответ: 1,2 А

5. Известно, что мощность волны зависит от её частоты. Во сколько раз изменится мощность волны, если её длину уменьшить в 2 раза?

Ответ: увеличится в 16 раз

6. На дифракционную решетку с периодом 0,01 мм падает свет, содержащий в себе зеленый (550), красный (650 нм) и желтый свет (570 нм). Ширина спектра второго порядка на экране, отстоящем от дифракционной решетки на расстояние 4 м будет равна...

Ответ: 8 см

7. В кубический аквариум с водой добавили 2 кг кубиков льда. На сколько увеличится давление воды на дно сосуда после того, как весь лед растаял. Длина стороны аквариума 40 см. Плотность льда 0,9 г/см³.

Ответ: 125

8. Двухатомный газ сжимается адиабатический. При этом объем газа уменьшился в 2 раза. Найти давление после сжатия, если начальное давление 2 МПа, а показатель адиабаты – 1,4. Ответ дайте в МПа и округлите до сотых.

Ответ: 5,28 МПа

9. Период полураспада иттрия-90 ${}^{90}_{39}\text{Y}$ составляет 64 ч. Какую долю от первоначальной будет составлять его активность через 8 сут? Ответ дать в %, округлить до десятых.

Ответ: $P_3 = 12,5\%$

10. Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль нагрели сначала изохорно, затем изобарно, затем снова изохорно. В результате объем газа увеличился в два раза. А давление в каждом изохорном процессе росло в 2 раза. Какое количество теплоты получил газ в результате этих процессов, если его начальная температура была 27 °С? Результат запишите в кДж и округлите до десятых.

Ответ: 46,1 кДж

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Математика» (предмет олимпиады – Естественные науки) проходит с использованием интернет-технологий (заочно). Продолжительность отборочного тура олимпиады – 3 часа

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовку участников олимпиады в рамках программы, соответствующей Кодификатору элементов содержания по математике 2026 года, размещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений» <https://fipi.ru/metodicheskaya-kopilka/univers-kodifikatory-oko#!/tab/243050673-2>.

В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса математики:

- числа и вычисления;
- уравнения и неравенства;
- функции и графики;
- начала математического анализа;
- множества и логика;
- теория вероятностей и статистика;
- геометрия.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2026-2027

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧИСЛА, ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Натуральные и целые числа. НОК и НОД. Обыкновенные дроби. Десятичные периодические дроби. Модуль (абсолютная величина) числа. Степень с натуральным показателем. Арифметический корень: определение и свойства. Степень с рациональным показателем.

Проценты. Пропорции.

Логарифмы.

Тригонометрия: градусная и радианная меры угла; определения и основные свойства тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, котангенс); арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента; основные тригонометрические формулы.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Преобразование алгебраических выражений. Формулы сокращенного умножения. Бином Ньютона.

Текстовые задачи.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Равенства и уравнения, множество решений уравнения, равносильные (тождественные) преобразования. Линейные уравнения. Квадратные уравнения. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на множители. Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена. Системы алгебраических уравнений, основные методы их решений.

Алгебраические неравенства. Метод интервалов. Системы и совокупности алгебраических неравенств.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Иррациональные уравнения и неравенства.

Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения и неравенства.
Логарифмические уравнения и неравенства.
Системы алгебраических уравнений с двумя переменными.
Уравнения и неравенства с параметром.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Понятие функции, области определения и значений функции. График функции; четность, нечетность, периодичность функции. Нули функции. Ограниченность функции. Основные элементарные функции, их графики и свойства.

Понятие о производной. Производные от элементарных функций, основные формулы и правила дифференцирования. Производная произведения и частного функций. Определение касательной к графику функции. Монотонность и экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Понятие о неопределённом интеграле и первообразной функции.

Использование графиков функций для решения уравнений и линейных систем

МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА

Множество, операции над множествами. Диаграммы Эйлера – Венна.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона

Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий.

Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями. Вероятности событий в опытах с равновозможными элементарными событиями.

Понятие о геометрической вероятности.

Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Формула сложения вероятностей.

Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Независимые события.

Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Прямая, луч, отрезок, ломаная, длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые, их свойства.

Треугольник. Медиана, высота, биссектриса, средняя линия треугольника и их свойства. Равенство треугольников. Свойства равнобедренного треугольника. Свойства прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема синусов. Теорема косинусов. Сумма углов треугольника. Площадь треугольника.

Четырёхугольники, свойства выпуклых четырёхугольников. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр и радиус окружности. Касательная к окружности. Дуга окружности. Круговой сектор. Центральные и вписанные углы. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь кругового сектора.

Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Формулы площадей треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника

Вектор, длина (модуль) вектора. Равенство векторов. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число). Угол между векторами. Коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Призма, параллелепипед, пирамида, правильные многогранники. Цилиндр. Конус. Шар. Объёмы и площади поверхности тел.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса математики.

Содержательные элементы заданий отборочного тура представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый блок содержит задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов. Второй блок также содержит задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов, а также задания открытой формы с вводом краткого ответа. Для выполнения заданий первого и второго блоков участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи знания, относящиеся к одной или нескольким темам, умение обобщать знания, комбинировать известные алгоритмы действий, получать выводы (особенно к задачам, имеющим прикладную направленность или политехнический характер).

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности. Эти задания позволяют оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления значительной степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний, смекалки и эрудиции.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы, состоящий из 30 заданий: 15 задач из первого блока заданий, 10 задач из второго блока заданий, 5 задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его. Баллы, полученные участником олимпиады за каждое выполненное задания, суммируются.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

Блок 1

1. Упростить выражение $\left[\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} \right) \left(\frac{1}{a^2 - b\sqrt{ab}} \right)^{-1} \right]^{-1}$ и вычислить его значение при $a = 101$, $b = 99$.

Решение:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} \right) \left(\frac{1}{a^2 - b\sqrt{ab}} \right) \right]^{-1} = \left[\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a^2 - b\sqrt{ab}}{1} \right) \right]^{-1} = \\ & = \left[\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}(a + \sqrt{ab} + b)} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} \left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right)}{1} \right]^{-1} = \left[\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(a + \sqrt{ab} + b)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)}{1} \right]^{-1} = \\ & = (a - b)^{-1} = \frac{1}{a - b} = \frac{1}{101 - 99} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5.

2. Вычислить $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\cos x = 0,6$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Решение:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 1, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{1 + 0,6}{2} = 0,8, \quad \text{тогда} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{0,8} - 1 = 0,25. \quad \text{Так как}$$

при $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ значения $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ отрицательны, то $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{0,25} = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

3. Найти наибольшее решение уравнения $(5^x)^2 - 7 \cdot (5^x) + 10 = 0$.

Решение:

Преобразуем уравнение к виду $(5^x)^2 - 7 \cdot (5^x) + 10 = 0$ и решим его как квадратное:

$$(5^x)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \begin{cases} 5; \\ 2; \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 1; \\ x = \log_5 2. \end{cases}$$

Так как $\log_5 2 < 1$, искомое решение $x = 1$.

Ответ: 1.

4. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти наибольший катет.

Решение:

Введем обозначения: $\triangle ABC$ – прямоугольный, CM – медиана, $CM = \sqrt{3}/2$ см, $\angle ACM : \angle MCB = 2:1$. Найти AC и CB .

Достроим заданный треугольник до прямоугольника $CADB$ – рис.1. Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, поэтому $CD = 2CM = \sqrt{3}$ см. По условию $\angle MCB = 30^\circ$. В $\triangle CDB$:

$$DB = AC = CD \sin \angle MCB = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \sqrt{3}/2 \text{ см}; \quad CB = CD \cos \angle MCB = \sqrt{3} \cos 30^\circ = 3/2 \text{ см}.$$

Наибольший из найденных катетов $CB = 3/2 = 1,5$.

Ответ: 1,5.

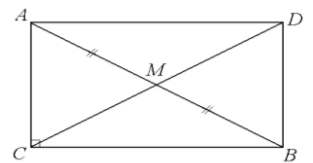


Рис.1

5. Каждый ученик класса побывал в театре или в кино. В театр сходили 22 человека. В кино были 15 человек. И в театре, и в кино были 7 человек. Сколько учеников в классе?

Решение:

Если найти сумму $22+15$, то окажется, что каждого, кто побывал и в театре, и в кино, мы посчитали дважды. Поэтому найденная сумма на 7 больше количества учеников в классе. Следовательно, в классе $22+15-7=30$ человек.

Ответ: 30.

6. Найти производную функции $y = 3\cos^2 x$.

Решение:

$$y' = (3\cos^2 x)' = 3(\cos^2 x)' = 3 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)' = 6\cos x \cdot (-\sin x) = -3\sin 2x$$

Ответ: $-3\sin 2x$.

7. Двое путников одновременно вышли из пункта А по направлению к пункту В. Шаг второго был на 20 % короче, чем шаг первого, но зато второй успевал за то же время сделать на 20% шагов больше, чем первый. Сколько времени потребовалось второму путнику для достижения цели, если первый прибыл в пункт В спустя 5 часов после выхода из пункта А.

Решение:

Шаг второго путника составлял 80% или 0,8 шага первого путника. На каждые 100 шагов первого путника второй успевал сделать 120 шагов, т.е. за то же время второй путник успевал сделать в 1,2. раза больше шагов, чем в первый. Следовательно, расстояние, пройденное за некоторое время вторым путником, составляло $0,8 \cdot 1,2 = 0,96$ расстояния, пройденного за то же время первым. Путь, пройденный человеком за некоторое время, прямо пропорционален скорости движения. Поэтому, скорость второго путника составляла 0,96 скорости первого.

Время, которое затрачивает человек на прохождение определённого пути, обратно пропорционально скорости движения. Поэтому продолжительность движения второго путника из А в В составляет $5 \div 0,96 = 5,2$ часа.

Ответ: 5, 2 часа или 5 часов 12 минут

8. Найти объединение и разность множеств $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{2; 3; 4\}$.

Решение:

Множество $C = A \cup B$ состоит из всех элементов, которые входят или в множество A , или в множество B : $C = \{1; 2; 3; 4\}$.

Множество $D = A \setminus B$ содержит те и только те элементы, которые входят в множество A и не входят в множество B : $D = \{1\}$.

Ответ: $C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$

$D = A \setminus B = \{1\}$

9. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно?

Решение:

В произведении всех чисел от 1 до 100 содержится 24 пятерки: по одной в числах 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 5, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95 и по две в числах 25, 50, 75, 100. Так как произведение цифры 5 на любое четное число оканчивается нулем, то произведение чисел от 1 до 100 оканчивается 24 нулями.

Ответ: 24

Блок 2

1. Вычислить значение выражения $\sin 4^\circ \cdot \sin 86^\circ - \cos 2^\circ \cdot \sin 6^\circ + \frac{1}{2} \sin 4^\circ$.

Решение:

$$\begin{aligned} \sin 4^\circ \cdot \sin 86^\circ - \cos 2^\circ \cdot \sin 6^\circ + \frac{1}{2} \sin 4^\circ &= \frac{1}{2} (\cos 82^\circ - \cos 90^\circ) - \frac{1}{2} (\sin 4^\circ + \sin 8^\circ) + \frac{1}{2} \sin 4^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \sin 8^\circ - \frac{1}{2} \sin 4^\circ - \frac{1}{2} \sin 8^\circ + \frac{1}{2} \sin 4^\circ = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

2. Найти значение выражения $\sqrt{|24\sqrt{2} - 34|} - \sqrt{34 + 24\sqrt{2}} - 1$.

Решение:

$$|24\sqrt{2} - 34| = 34 - 24\sqrt{2} = 34 - 2 \cdot 12\sqrt{2} = 34 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} = 16 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} + 18 = (4 - 3\sqrt{2})^2,$$

тогда $34 + 24\sqrt{2} = (4 + 3\sqrt{2})^2$ и

$$\sqrt{((4 - 3\sqrt{2})^2)} - \sqrt{((4 + 3\sqrt{2})^2)} - 1 = |4 - 3\sqrt{2}| - |4 + 3\sqrt{2}| - 1 = 3\sqrt{2} - 4 - 4 - 3\sqrt{2} - 1 = -9.$$

Ответ: -9.

3. Три числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа $5z, 3y, x$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отличный от 1.

Решение:

Учитывая свойства арифметической и геометрической прогрессий, получим систему уравнений

$$\begin{cases} xz = y^2 \\ 5z + x = 6y \end{cases}. \quad \text{Откуда} \quad \begin{cases} \frac{z}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ \frac{5z}{x} + 1 = 6\frac{y}{x} \end{cases}. \quad \text{Решая систему относительно переменных } \frac{z}{x} \text{ и } \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} \text{ (искомый знаменатель геометрической прогрессии), получим, что} \quad \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

4. Найти число $a = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{2023} 2022 = \log_b c$. В ответ записать сумму $b + c$.

Решение:

$$\log_3 2 = \frac{\log_{2023} 2}{\log_{2023} 3}, \log_4 3 = \frac{\log_{2023} 3}{\log_{2023} 4}, \dots, \log_{2022} 2021 = \frac{\log_{2023} 2021}{\log_{2023} 2022}, \text{ тогда}$$

$$a = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{2023} 2022 = \frac{\log_{2023} 2}{\log_{2023} 3} \cdot \frac{\log_{2023} 3}{\log_{2023} 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_{2023} 2021}{\log_{2023} 2022} \cdot \log_{2023} 2022 = \\ = \log_{2023} 2$$

Ответ: 2025

5. Найти наибольшее значение функции $f(x) = 5 \sin x + 12 \cos x$.

Решение:

$$f(x) = 5 \sin x + 12 \cos x = \sqrt{5^2 + 12^2} \sin(x + \varphi) = 13 \sin(x + \varphi)$$

Ответ: 13

6. Вычислить $(99 \dots 9)^2$, если в записи числа $99 \dots 9$ имеется n девяток.

Решение:

$$\underset{n \text{ девяток}}{99 \dots 9} = \underset{n \text{ нулей}}{100 \dots 0} - 1 = 10^n - 1, \quad \left(\underset{n \text{ девяток}}{99 \dots 9} \right)^2 = (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = \underset{n-1 \text{ девятка}}{99 \dots 9} \underset{n-1 \text{ ноль}}{800 \dots 01}$$

Ответ: $\underset{n-1 \text{ девятка}}{99 \dots 9} \underset{n-1 \text{ ноль}}{800 \dots 01}$.

7. В книжном шкафу от 250 до 300 книг. Если расставить их на полки по 15 штук, то семи книгам не хватит места, а если разместить на полках по 25 книг, то останется 8 свободных мест. Сколько книг в шкафу?

Решение:

Пусть a – число книг. По условию

$$\begin{cases} a = 15k + 7 = 15(k+1) - 8; \\ a = 25l - 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+8):15; \\ (a+8):25. \end{cases} \Rightarrow (a+8):75.$$

$a+8$ следует искать среди кратных числу 75: 225, 300, 375, 450, ..., откуда $a = 292$.

Ответ: 292.

8. Найти количество девяток, составляющих число $1000^{2024} - 1$.

Решение:

Число 1000^{2024} содержит 1 и 6072 нуля, при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6072 девяток.

Ответ: 6072.

9. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение:

Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=6$. Общий член прогрессии задается формулой $a_n = 102 + (n-1) \cdot 6$, и так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102 + (n-1) \cdot 6 \leq 999, \quad n \leq 1 + \frac{999-102}{6} = 1 + \frac{897}{6} = 150.5.$$

Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму, $n=150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 150 \cdot 102 + \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot 6 = 82305.$$

Ответ: 82305

10. Решить уравнение $\frac{x}{|x-3|-3|x+1|} = 1$.

Решение:

Точки $x=3$ и $x=-1$ делят вещественную ось на три интервала, на каждом из которых выражения $x-3$ и $x+1$ сохраняют постоянный знак:

1) при $x \in (-\infty; -1]: x-3 \leq 0$ и $x+1 \leq 0$, поэтому $|x-3| = -(x-3)$, $|x+1| = -(x+1)$ и исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{x}{2x+6} = 1$, корень которого $x = -6$ принадлежит промежутку $(-\infty; -1]$, поэтому является корнем исходного уравнения;

2) при $x \in (-1; 3]: x-3 \leq 0$ и $x+1 > 0$, поэтому $|x-3| = -(x-3)$, $|x+1| = x+1$ и исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{x}{-4x} = 1$, которое не имеет корней;

3) при $x \in (3; +\infty): x-3 > 0$ и $x+1 > 0$, поэтому $|x-3| = x-3$, $|x+1| = x+1$ и исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{x}{-2x-6} = 1$, корень которого $x = -2$ не принадлежит промежутку $(3; +\infty)$, поэтому не является корнем исходного уравнения.

Ответ: -6 .

11. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке О. Окружность радиуса $R=2$ с центром в точке О касается стороны AC, проходит через вершину В и пересекает сторону АВ в точке К такой, что $\frac{AK}{BK} = \frac{1}{5}$. Найти длину стороны ВС.

Решение:

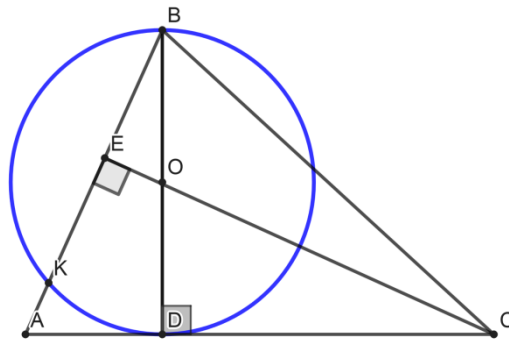


Рис.2

1) $AD^2 = AK \cdot AB = AK \cdot 6AK = 6AK^2$ (свойство касательной и секущей), тогда $AD = \sqrt{6}AK$.

2) Из $\triangle ABD$ находим:

$$\cos A = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{6}AK}{6AK} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad \sin A = \frac{\sqrt{30}}{6}, \quad \operatorname{tg} A = \sqrt{5}, \quad \angle ABD = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\sqrt{5}),$$

$$AB = \frac{BD}{\sin A} = \frac{2R \cdot 6}{\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{30}R}{5} = \frac{4\sqrt{30}}{5}.$$

Тогда

$$AD = \frac{BD}{\operatorname{tg} A} = \frac{2R}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}R}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

3) $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ (по острому углу A), откуда $\angle OCD = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\sqrt{5})$, тогда

$$\operatorname{ctg}(\angle OCD) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\sqrt{5})\right) = \frac{DC}{R},$$

$$DC = R \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\sqrt{5})\right) = R \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\sqrt{5})) = \sqrt{5}R = 2\sqrt{5}.$$

$$4) \quad AC = AD + DC = \frac{2\sqrt{5}R}{5} + \sqrt{5}R = \frac{7\sqrt{5}R}{5} = \frac{14\sqrt{5}}{5}.$$

5) По теореме косинусов из $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = \frac{24R^2}{5} + \frac{49R^2}{5} - \frac{28R^2}{5} = 9R^2 = 36, \quad BC = 6.$$

Ответ: $BC = 6$.

12. Некоторый математик в 2018 году создал числовой пин-код a для своей банковской карты, решив задачу: " $a \in N$: многочлен $x^{2018} + (2017 - a)x^3 - 2016$ делится на $(x + 1)$ ". Найти значение a .

Решение:

По Т. Безу, остаток от деления многочлена $P(x) = x^{2018} + (2017 - a)x^3 - 2016$ на $(x + 1)$ равен $P(-1) = (-1)^{2018} + (2017 - a)(-1)^3 - 2016 = -2015 - 2017 + a = -4032 + a$, а для того чтобы $P(x) : (x + 1)$ необходимо, чтобы $P(-1) = -4032 + a = 0$.

Ответ: $a = 4032$.

13. Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение $f(f(f(x))) = 0$. В ответ записать сумму корней.

Решение:

Заметим, что $f(x) = x^2 + 10x + 20 = (x + 5)^2 - 5$. Тогда

$$f(f(x)) = (x + 5)^4 - 5, \quad f(f(f(x))) = (x + 5)^8 - 5, \quad (x + 5)^8 - 5 = 0$$

и решением уравнения являются числа $x = -5 \pm \sqrt[8]{5}$.

Ответ: -10

14. Найти значение a , при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ будет наименьшей.

Решение:

Найдем дискриминант $D = (2 - a)^2 + 4(a + 3) = 1 + 4 \cdot 4 = 9 > 0 \Rightarrow$ корни x_1, x_2 существуют при любом значении a . Так как

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2 - a)^2 + 2(a + 3) = a^2 - 2a + 10 = (a - 1)^2 + 9,$$

то своё наименьшее значение эта сумма принимает при $a = 1$.

Ответ: 1

Блок 3

1. Найти сумму $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$.

Решение:

Известно, что $n^2 - (n+1)^2 = n - (n+1)$, то

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2 = 1 + (2+3) + (4+5) + \dots + (100+101) = 1 + 2 + \dots + 101 = \frac{(1+101) \cdot 101}{2} = 5151$$

Ответ: 5151

2. Найти значение суммы $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

Решение:

$$\text{Так как } \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}, \text{ то}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Ответ: $\frac{99}{100}$

3. Найти сумму $1^m + 2^m + 3^m + \dots + (n-1)^m + n^m$, где $n, m \in \mathbb{N}$.

Решение:

Запишем по формуле бинома Ньютона следующие равенства

$$\begin{aligned} 1^{m+1} &= 1, \\ (1+1)^{m+1} &= 1^{m+1} + C_{m+1}^1 1^m + C_{m+1}^2 1^{m-1} + \dots + C_{m+1}^m 1 + 1, \\ (2+1)^{m+1} &= 2^{m+1} + C_{m+1}^1 2^m + C_{m+1}^2 2^{m-1} + \dots + C_{m+1}^m 2 + 1, \\ (3+1)^{m+1} &= 3^{m+1} + C_{m+1}^1 3^m + C_{m+1}^2 3^{m-1} + \dots + C_{m+1}^m 3 + 1, \\ &\dots\dots\dots \\ ((n-1)+1)^{m+1} &= (n-1)^{m+1} + C_{m+1}^1 (n-1)^m + C_{m+1}^2 (n-1)^{m-1} + \\ &+ \dots + C_{m+1}^m (n-1) + 1, \\ (n+1)^{m+1} &= n^{m+1} + C_{m+1}^1 n^m + C_{m+1}^2 n^{m-1} + \dots + C_{m+1}^m n + 1, \end{aligned}$$

Сложив соответственно левые и правые части этих равенств, получим

$$\begin{aligned} (n+1)^{m+1} &= C_{m+1}^1 (1^m + 2^m + \dots + n^m) + C_{m+1}^2 (1^{m-1} + 2^{m-1} + \dots + n^{m-1}) + \\ &+ \dots + C_{m+1}^m (1 + 2 + \dots + n) + n + 1. \end{aligned}$$

Обозначим $1^k + 2^k + \dots + n^k = S_k, (k=1, 2, \dots, m)$ и получим

$$(n+1)^{m+1} = C_{m+1}^1 S_m + C_{m+1}^2 S_{m-1} + \dots + C_{m+1}^m S_1 + n + 1.$$

Это соотношение позволяет вычислить S_m , если известны предшествующие суммы $S_1, S_2, \dots, S_{m-1}$.

Так, при $m=1$, получим

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = (n+1)^2 = C_2^1 S_1 + n + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{C_2^1} = \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

при $m=2$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (n+1)^3 = C_3^1 S_2 + C_3^2 S_1 + n + 1 =$$

$$= 3S_2 + 3S_1 + n + 1 = 3S_2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

при $m = 3$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (n+1)^4 = C_4^1 S_3 + C_4^2 S_2 + C_4^3 S_1 + n + 1 =$$

$$= 4S_2 + 6S_1 + 4S_1 + n + 1 \Rightarrow S_4 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Сравнивая полученные формулы, можно заметить, что **сумма кубов n первых чисел натурального ряда равна квадрату их суммы.**

4. Для функции $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ найти значение суммы S :

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f(1).$$

Решение:

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = 1, \text{ тогда рассмотрим выражение } 2S:$$

$$2S = S + S = f(0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f(1) +$$

$$+ f(1) + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right) + \dots + f(1) + f(0) =$$

$$= f(0) + f(1-0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2023}\right) + \dots + f(1) + f(0) = 2024$$

$$\Rightarrow S = \frac{2024}{2} = 1012$$

Ответ: $S = 1012$

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = 1$. Вычислить $\log_3(a_{2023} + 3)$.

Решение:

Пусть

$$x_n = a_n + 3, \text{ тогда } x_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3), \quad x_{n+1} = 2x_n, \quad x_1 = 4 = 2^2, \quad x_1 = 4 = 2^2, \quad x_2 = 2^3, \dots,$$

$$x_n = 2^{n+1},$$

$$\text{тогда } a_n + 3 = 2^{n+1}, \quad \log_3(a_{2023} + 3) = \log_3 2^{2023+1} = 2024 \log_3 2.$$

Ответ: $\log_3(a_{2023} + 3) = 2024 \cdot \log_3 2$.

6. Найти предел последовательности $x_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$.

Решение:

Так как

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{то } \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

7. Найти наименьшее значение выражения $1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}$.

Решение:

Выражение имеет смысл при $x \neq \pi k$ и $y \neq \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$ для любых положительных u и v , так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2 + v^2}{uv} \geq 2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \geq 2uv \Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2uv \geq 0 \Leftrightarrow (u - v)^2 \geq 0.$$

Полагая $u = \sin^2 x$, $v = \sin^2 y$, получим $1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \geq 1 + 2 = 3$.

Ответ: 3

8. На отрезок единичной длины бросают наугад 2 точки. Какова вероятность, что из них можно составить треугольник?

Решение:

Заданный отрезок рассматриваем как отрезок $[0, 1]$ числовой прямой. Координаты точек обозначим через x и y , где $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (Рис.3).

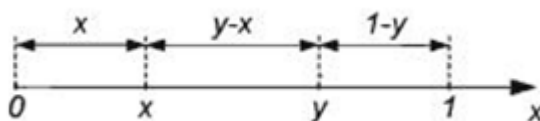


Рис.3.

Их можно рассматривать как координаты точки на плоскости, брошенной в квадрат со стороной 1.

Для того чтобы из трех отрезков можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы каждая сторона треугольника была меньше суммы двух других сторон, т.е. выполнялись неравенства:

$$x < (y - x) + (1 - y), \quad y - x < x + (1 - y), \quad 1 - y < x + (y - x).$$

При $x \leq y$ имеем систему неравенств: $x < 0,5$; $y < x + 0,5$; $0,5 < y$.

При $x > y$ имеем систему неравенств: $x > 0,5$; $y > x - 0,5$; $0,5 > y$.

На плоскости эти системы определяют соответственно верхний и нижний треугольники ((Рис.4).

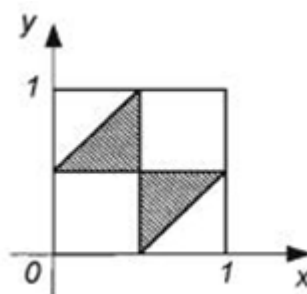


Рис.4.

Общая площадь этих треугольников равна 0,25. Площадь квадрата равна 1. Тогда искомая вероятность равна отношению этих площадей: $P = \frac{1}{4}$.

Ответ: $P = \frac{1}{4}$.

9. Функция $y = f(x)$ определена при всех $x \in R$ и удовлетворяет соотношению $f(x+2) \cdot (1-f(x)) = 1+f(x)$. Доказать, что $y = f(x)$ - периодическая функция и найти период.

Решение:

По условию $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Тогда $f(x+4) = -\frac{1}{f(x)}$, тогда $f(x+8) = -\frac{1}{f(x+4)} = f(x)$ - значит функция периодическая и период равен 8.

Ответ: 8.