

**ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМПЕРАТРИЦЫ ЕКАТЕРИНЫ II»**



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»

ФИЗИКА

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОТБОРОЧНОМУ ТУРУ ОЛИМПИАДЫ
2026/2027 ГОДА**

Ф И З И К А

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Естественные науки» (предмет олимпиады – физика) проходит с использованием интернет-технологий (заочно).

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовленность участников олимпиады в соответствии с Кодификатором элементов содержания по физике 2020 года, помещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений» <http://www.fipi.ru>.

В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса физики.

- **Механика.** (кинематика, динамика, статика, законы сохранения в механике, механические колебания и волны).
- **Молекулярная физика. Термодинамика. Гидростатика.** (молекулярно-кинетическая теория, законы идеального газа, законы термодинамики, гидростатика).
- **Электростатика.** (электростатическое поле, проводники и диэлектрики, постоянный ток, энергия системы зарядов и электрического поля).

Для конструирования вариантов олимпиадной работы отборочного тура использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки). Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности форме выполнения.

Первый блок содержит тестовые задания с выбором правильного ответа из четырех представленных. Второй блок содержит тестовые задания с открытым ответом в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи более двух физических законов, относящихся к одной или нескольким темам, комбинировать известные алгоритмы действий.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления достаточно высокой степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний и смекалки.

На задания из третьего блока необходим краткий ответ в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы отборочного этапа, состоящий из 30 заданий: пятнадцать задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий; пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за выполненные задания, суммируются.

РАЗДЕЛЫ ДИСЦИПЛИНЫ И ТЕМЫ, ВКЛЮЧЕННЫЕ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2026

Раздел 1. Механика

1.1. КИНЕМАТИКА

1.1.1. Механическое движение и его виды. Относительность механического движения. Система отсчета.

1.1.2. Материальная точка и ее радиус-вектор. Траектория, перемещение, путь. Сложение перемещений.

1.1.3. Скорость материальной точки. Сложение скоростей.

1.1.4. Ускорение материальной точки.

1.1.5. Равномерное прямолинейное движение.

1.1.6. Равноускоренное прямолинейное движение.

1.1.7. Свободное падение. Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом α к горизонту.

1.1.8. Движение точки по окружности. Линейная и угловая скорость точки соответственно. Центростремительное ускорение.

1.1.9 Твердое тело. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

1.2 ДИНАМИКА

1.2.1 Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея.

1.2.2. Масса тела. Плотность вещества.

1.2.3. Сила. Принцип суперпозиции сил.

1.2.4. Второй и третий законы Ньютона.

1.2.5. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты над поверхностью планеты. Вес тела. Невесомость.

1.2.6. Движение небесных тел и их искусственных спутников. Первая космическая скорость. Вторая космическая скорость.

1.2.7. Сила упругости. Закон Гука.

1.2.8. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения. Сила трения покоя. Коэффициент трения.

1.2.9. Давление.

1.3. СТАТИКА

1.3.1. Момент силы относительно оси вращения.

1.3.2. Условия равновесия твердого тела.

1.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

1.4.1. Импульс материальной точки. Импульс системы тел.

1.4.2. Закон изменения и сохранения импульса.

1.4.3. Работа силы. Мощность силы.

1.4.4. Кинетическая энергия материальной точки. Закон изменения кинетической энергии системы материальных точек.

1.4.5. Потенциальная энергия для потенциальных сил. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

1.4.6. Закон изменения и сохранения механической энергии.

1.4.9. Закон сохранения механической энергии.

1.5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1.5.1. Гармонические колебания. Амплитуда и фаза колебаний. Кинематическое, динамическое и энергетическое (закон сохранения механической энергии) описание. Связь амплитуды колебаний исходной величины с амплитудами колебаний её скорости и ускорения.

1.5.2. Период и частота колебаний.

1.5.3. Период малых свободных колебаний математического и пружинного маятника.

1.5.4. Вынужденные колебания. Резонанс.

1.5.5. Поперечные и продольные волны. Скорость. Распространения и длина волны.

Раздел 2. Молекулярная физика. Термодинамика

2.1. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

2.1.1. Модели строения газов, жидкостей и твердых тел.

2.1.2. Тепловое движение атомов и молекул вещества.

2.1.3. Взаимодействие частиц вещества. Диффузия. Броуновское движение.

2.1.4. Модель идеального газа в МКТ: частицы газа движутся хаотически и не взаимодействуют друг с другом.

2.1.5. Абсолютная температура. Связь температуры газа со средней кинетической энергией поступательного теплового движения его частиц.

2.1.6. Модель идеального газа в термодинамике.

2.1.7. Уравнение Менделеева – Клапейрона. Выражение для внутренней энергии одноатомного идеального газа.

2.1.8. Закон Дальтона для давления смеси разреженных газов.

2.1.9. Изопроцессы: изотермический, изохорный, изобарный, адиабатный процессы.

2.1.10. Изменение агрегатных состояний вещества: испарение и конденсация, плавление и кристаллизация, кипение жидкости. Преобразование энергии в фазовых переходах.

2.2. ТЕРМОДИНАМИКА

2.2.1. Тепловое равновесие и температура.

2.2.2. Внутренняя энергия.

2.2.3. Теплопередача.

2.2.4. Количество теплоты. Удельная теплоемкость вещества. Удельная теплота парообразования. Удельная теплота плавления. Удельная теплота сгорания топлива.

2.2.5. Элементарная работа в термодинамике. Вычисление работы по графику процесса на pV -диаграмме.

2.2.6. Первый закон термодинамики.

2.2.7. Второй закон термодинамики.

2.2.8. Принципы действия и КПД тепловой машины. Цикл Карно.

2.2.9. Уравнение теплового баланса.

2.3. ГИДРОСТАТИКА

2.3.1. Закон Паскаля. Сообщающиеся сосуды.

2.3.2. Давление в жидкости, покоящейся в ИСО. Гидравлический пресс.

2.3.3. Закон Архимеда. Условия плавания тел.

Раздел 3. Электростатика и постоянный ток

3.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

3.1.1. Электризация тел. Электрический заряд. Два вида заряда. Закон сохранения электрического заряда.

3.1.2. Взаимодействие зарядов. Точечные заряды. Закон Кулона.

3.1.3. Электрическое поле. Его действие на электрические заряды.

3.1.4. Напряженность электрического поля. Поле точечного заряда. Однородное поле. Картины линий поля.

3.1.5. Потенциальность электростатического поля. Разность потенциалов и напряжение. Связь напряженности поля и разности потенциалов для однородного электростатического поля.

3.1.6. Принцип суперпозиции электрических полей.

3.1.7. Проводники в электростатическом поле.

3.1.8. Диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества.

3.1.9. Конденсатор. Емкость конденсатора. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.

3.1.10. Энергия заряженного конденсатора.

3.2. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

3.2.1. Постоянный электрический ток. Сила тока.

3.2.2. Напряжение и электродвижущая сила (ЭДС).

3.2.3. Закон Ома для участка цепи.

3.2.4. Электрическое сопротивление. Удельное сопротивление вещества.

3.2.5. Источники тока. ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

3.2.6. Закон Ома для полной (замкнутой) электрической цепи.

3.2.7. Параллельное и последовательное соединение проводников.

3.2.8. Работа электрического тока. Закон Джоуля – Ленца.

3.2.9. Мощность электрического тока. Тепловая мощность, выделяемая на резисторе. Мощность источника тока.

3.2.10. Носители свободных электрических зарядов в металлах, жидкостях и газах.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса физики.

Каждый блок заданий состоит из четырех частей

Часть 1. Кинематика. Динамика. Статика. Законы сохранения в механике. Механические колебания и волны.

Часть 2. Молекулярно-кинетическая теория. Законы идеального газа. Законы термодинамики. Гидростатика.

Часть 3. Электростатическое поле, проводники и диэлектрики, постоянный ток, энергия системы зарядов и электрического поля.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ И ИХ РЕШЕНИЯ ИЗ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ ПРОШЛЫХ ЛЕТ.

Пример 1

Капля воды падает с некоторой высоты, и при ударе о землю она закипает. На нагрев капли идет 50% расходуемой механической энергии. Определить с какой высоты упала капля, если начальная температура воды 20 °С. (Ускорение свободного падения принять за 10 м/с², ответ записать в километрах, округлить до десятых).

Дано: $\eta=50\%$ $t_1=20\text{ }^{\circ}\text{C}$ $t_2=100\text{ }^{\circ}\text{C}$ $c_{\text{в}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг } ^{\circ}\text{C}}$ $h=?$	СИ 0,5	Решение: Согласно уравнению количества теплоты на нагрев воды будет затрачено тепло: $Q = c_{\text{в}} m (t_2 - t_1)$ С другой стороны, на нагрев будет затрачено 50% расходуемой механической энергии: $E = \eta m g h$ Приравняем энергии и выразим высоту: $\eta m g h = c_{\text{в}} m (t_2 - t_1)$ $h = \frac{c_{\text{в}} (t_2 - t_1)}{\eta g}$ $h = \frac{4200 \cdot (100 - 20)}{0,5 \cdot 10} = 67200 \text{ м} = 67,2 \text{ км}$ Ответ: $h=67,2 \text{ км}$
---	----------------------	---

Пример 2

Три одинаковых точечных заряда q находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Найти величину напряженности электрического поля E в

точке, находящейся на расстоянии $\frac{3}{4}a$ от каждого из зарядов.

Дано: q a $\frac{3}{4}a$ $x=4$	СИ	Решение: 1. Указанная точка – вершина тетраэдра. Исходя из симметрии поставленной задачи и принципа суперпозиции, результирующий вектор напряженности электрического поля E будет направлен вдоль вертикальной прямой, проведенной через вершину тетраэдра и центр его основания. 2. Необходимо определить косинус угла между векторами напряженностей полей, созданных каждым из
---	-----------	---

зарядов, и указанной вертикальной прямой.

3. Расстояние от каждого из зарядов до центра основания тетраэдра (примем его за L) будет равно:

$$L = \frac{a}{2 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Тогда синус интересующего нас угла $\frac{L \cdot 4}{3 \cdot a}$ будет равен:

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot 4}{\sqrt{3} \cdot a \cdot 3} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{11}{27}} = \frac{\sqrt{11}}{3 \cdot \sqrt{3}}$$

и, соответственно,

Тогда напряженность электрического поля в заданной точке будет равна:

$$E = 3 \cdot k \cdot \frac{q \cdot 16}{9 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{27}} = 3 \cdot \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot \sqrt{11}}{9 \cdot 3\sqrt{3}} \cdot \frac{q}{a^2} = 3,06 \cdot 10^{10} \cdot \frac{q}{a^2}$$

В/м.

Ответ: $E = 3,06 \cdot 10^{10} \cdot \frac{q}{a^2}$ В/м.

Пример 3

Какова будет масса воздуха в помещении при атмосферном давлении и температуре $T = 290K$? Высота потолков в помещении составляет 5м, а площадь 200 м².

Молярная масса воздуха $\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$.

Дано:

$$T = 290K$$

$$p = 10^5 \text{ Па}$$

$$h = 5 \text{ м}$$

$$S = 200 \text{ м}^2$$

$$\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$$

Решение:

Запишем уравнение Клайперона-Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (1)$$

Объем комнаты можно посчитать:

$$V = hS \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1) и выражаем массу воздуха:

$$m = \frac{phS\mu}{RT} = \frac{10^5 \cdot 5 \cdot 200 \cdot 0,029}{8,31 \cdot 290} = 1203 \text{ кг}$$

Найти:

$$m = ?$$

Ответ: $m = 1203 \text{ кг}$

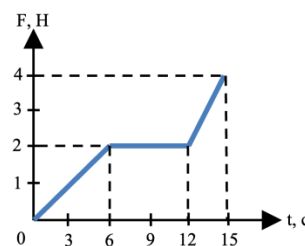
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Тело равномерно вращается по окружности радиуса 10 м. Период обращения 5 с. Модуль линейной скорости равен ...

1. 50 м/с. 2. 12,56 м/с. 3. 6,28 м/с. 4. 3,14 м/с.

Ответ: 2.

2. Сила некоторого тела выражается функцией $F=f(t)$, график зависимости которой показан на графике. Чему будет равно изменение импульса на участке, где сила постоянна?



1. 18 кг·м/с. 2. 6 кг·м/с. 3. 12 кг·м/с. 4. 24 кг·м/с.

Ответ: 3

3. Тело равномерно вращается по окружности радиуса 5 м. Частота вращения 10 с^{-1} . Модуль линейной скорости равен ...

1. 2 м/с. 2. 12,56 м/с. 3. 31,4 м/с. 4. 314 м/с.

Ответ: 4

4. В цепи, состоящей из источника тока и резистора, сила тока равна 0,25 А. Определите падение потенциала внутри источника тока, если сопротивление резистора 7,5 Ом. В режиме холостого хода вольтметр показывает на источнике 2 В.

1. 0,125 В 2. 0,150 В 3. 0,180 В 4. 0,250 В

Ответ: 1

5. Камень для керлинга массой 20 кг, находится на льду в центре мишени. Камень команды соперников попадает по камню центральным абсолютно упругим ударом и передает ему импульс равный $12 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. На какое расстояние откатится камень, если коэффициент трения камня о лед равен 0,015. Ответ округлите до десятых.

Ответ: 1,2 м.

6. Положительно заряженная частица влетает в магнитное поле под прямым углом к линиям поля. Величина поля 0,05 Тл. С каким импульсом частица влетела в поле, если её заряд равен 3 зарядам электрона, а сама она описывает окружность длиной 16 см? Ответ дать с точностью до целых, умноженных на $10^{-22} \frac{\text{Кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Ответ: 6

7. Сила тяготения, действующая на тело массой 4 кг, поднятое над Землей равна 22,5 Н. На какую высоту (в долях от радиуса Земли) поднято тело?

Ответ: $1/3 R$.

8. В изотермическом процессе газ совершил работу 1000 Дж. Как увеличится внутренняя энергия этого газа, если ему сообщить количество теплоты вдвое большее, чем в первом процессе, а процесс проводить изохорно?

Ответ: 2000 Дж.

9. В вершинах квадрата находятся четыре одинаковых положительных заряда q . Какой заряд нужно поместить в центр квадрата, чтобы система зарядов находилась в состоянии равновесия?

Ответ: $0,957q$.

10. Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор со скоростью $6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ параллельно его пластинам. Расстояние между пластинами 1 см, разность потенциалов 600 В. Найти отклонение электрона, вызванное полем конденсатора, если длина его пластин 5 см.

Ответ: $3,65 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Математика» (предмет олимпиады – Естественные науки) проходит с использованием интернет-технологий (заочно). Продолжительность отборочного тура олимпиады – 3 часа

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовку участников олимпиады в рамках программы, соответствующей Кодификатору элементов содержания по математике 2026 года, размещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений» <https://fipi.ru/metodicheskaya-kopilka/univers-kodifikatory-oko#!/tab/243050673-2>.

В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса математики:

- числа и вычисления;
- уравнения и неравенства;
- функции и графики;
- начала математического анализа;
- множества и логика;
- теория вероятностей и статистика;
- геометрия.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2026-2027

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧИСЛА, ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Натуральные и целые числа. НОК и НОД. Обыкновенные дроби. Десятичные периодические дроби. Модуль (абсолютная величина) числа. Степень с натуральным показателем. Арифметический корень: определение и свойства. Степень с рациональным показателем.

Проценты. Пропорции.

Логарифмы.

Тригонометрия: градусная и радианная меры угла; определения и основные свойства тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, котангенс); арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента; основные тригонометрические формулы.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Преобразование алгебраических выражений. Формулы сокращенного умножения.

Текстовые задачи.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Равенства и уравнения, множество решений уравнения, равносильные (тождественные) преобразования. Линейные уравнения. Квадратные уравнения. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на множители. Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена. Системы алгебраических уравнений, основные методы их решений.

Алгебраические неравенства. Метод интервалов. Системы и совокупности алгебраических неравенств.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Иррациональные уравнения и неравенства.

Тригонометрические уравнения.

Показательные уравнения и неравенства.
Логарифмические уравнения и неравенства.
Системы алгебраических уравнений с двумя переменными.
Уравнения и неравенства с параметром.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Понятие функции, области определения и значений функции. График функции; четность, нечетность, периодичность функции. Нули функции. Ограниченность функции. Основные элементарные функции, их графики и свойства.

Понятие о производной. Производные от элементарных функций, основные формулы и правила дифференцирования. Производная произведения и частного функций. Определение касательной к графику функции. Монотонность и экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Использование графиков функций для решения уравнений и линейных систем

МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА

Множество, операции над множествами. Диаграммы Эйлера – Венна.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (ис-

ходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий.

Случайные опыты с равновероятными элементарными событиями. Вероятности событий в опытах с равновероятными элементарными событиями.

Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Формула сложения вероятностей.

Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Независимые события.

Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона

Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Прямая, луч, отрезок, ломаная, длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые, их свойства.

Треугольник. Медиана, высота, биссектриса, средняя линия треугольника и их свойства. Равенство треугольников. Свойства равнобедренного треугольника. Свойства прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема синусов. Теорема косинусов. Сумма углов треугольника. Площадь треугольника.

Четырехугольники, свойства выпуклых четырехугольников. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр и радиус окружности. Касательная к окружности. Дуга окружности. Круговой сектор. Центральные и вписанные углы. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь кругового сектора.

Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Формулы

площадей треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Призма, параллелепипед, пирамида, правильные многогранники. Цилиндр. Конус. Шар. Объёмы и площади поверхности тел.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса математики.

Для конструирования вариантов олимпиадной работы использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки).

Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый и второй блоки содержат задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов или открытой формы с вводом краткого ответа. Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи знания, относящиеся к одной или нескольким темам, умение обобщать знания, комбинировать известные алгоритмы действий, получать выводы, особенно к задачам, имеющим прикладную направленность или политехнический характер.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления достаточно высокой степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний, смекалки и эрудиции.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы, состоящий из 25 заданий: десять задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий, пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за каждое выполненное задания, суммируются.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

Блок 1

1. Упростить выражение

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right).$$

Решение:

Чтобы упростить первый множитель, воспользуемся определением квадратного корня:

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} = |p - q|.$$

Тогда получим

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right) =$$

$$= |p-q| \cdot \left(\frac{2pq}{p^2-q^2} + \frac{q}{p-q} + \frac{p}{p+q} \right) = |p-q| \frac{2pq + pq + q^2 + p^2 - pq}{p^2 - q^2} =$$

$$= \frac{|p-q|(p+q)^2}{(p-q)(p+q)} = \frac{|p-q|(p+q)}{(p-q)} = (p+q) \operatorname{sgn}(p-q) = \begin{cases} p+q, & p > q; \\ -p-q, & p < q. \end{cases}$$

Ответ: $p+q$ при $p > q$, $-p-q$ при $p < q$.

2. Вычислить $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$, если $\cos x = -0,4$.

Решение:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,16 = 0,84.$$

Ответ: 0,84.

3. Найти наибольшее решение уравнения $(5^x)^2 - 7 \cdot (5^x) + 10 = 0$.

Решение:

Преобразуем уравнение к виду $(5^x)^2 - 7 \cdot (5^x) + 10 = 0$ и решим его как квадратное:

$$(5^x)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \begin{cases} 5; \\ 2; \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 1; \\ x = \log_5 2. \end{cases}$$

Так как $\log_5 2 < 1$, искомое решение $x = 1$.

Ответ: 1.

4. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти наибольший катет.

Решение:

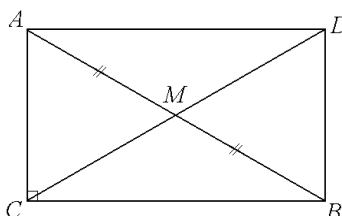


Рис.1

Введем обозначения: $\triangle ABC$ – прямоугольный, CM – медиана, $CM = \sqrt{3}/2$ см, $\angle ACM : \angle MCB = 2:1$. Найти AC и CB .

Достроим заданный треугольник до прямоугольника $CADB$ – рис.1. Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, поэтому $CD = 2CM = \sqrt{3}$ см. По условию $\angle MCB = 30^\circ$. В $\triangle CDB$:

$$DB = AC = CD \sin \angle MCB = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \sqrt{3}/2 \text{ см}; \quad CB = CD \cos \angle MCB = \sqrt{3} \cos 30^\circ = 3/2 \text{ см}.$$

Наибольший из найденных катетов $CB = 3/2 = 1,5$.

Ответ: 1,5.

5. Найти наименьшее натуральное значение параметра a , при котором неравенство $x^2 - (a-4)x + a^2 - a + 4 > 0$ выполняется на всей числовой оси.

Решение:

График функции $f(x) = x^2 - (a-4)x + a^2 - a + 4$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Для того, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - (a-4)x + a^2 - a + 4 > 0$

необходимо, чтобы парабола не имела точек пересечения с осью Ox , а значит дискриминант уравнения $x^2 - (a-4)x + a^2 - a + 4 = 0$ должен быть отрицательным:

$$D = (a-4)^2 - 4(a^2 - a + 4) = -3a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ: 1

6. Найти шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 24.

Решение:

Чтобы число делилось на 24, оно должно делиться на 3 и на 8.

Число делится на 8, если три его последние цифры образуют число, делящееся на 8. Искомое число записывается только нулями и единицами, значит, оно заканчивается на 000.

Число делится на 3, если его сумма цифр числа делится на 3. Поскольку три последние цифры числа — нули, первые три должны быть единицами.

Таким образом, единственное число, удовлетворяющее условию задачи, — это число 111 000.

Ответ: 111 000.

7. Каждый ученик класса побывал в театре или в кино. В театр сходили 22 человека. В кино были 15 человек. И в театре, и в кино были 7 человек. Сколько учеников в классе?

Решение:

Если найти сумму $22+15$, то окажется, что каждого, кто побывал и в театре, и в кино, мы посчитали дважды. Поэтому найденная сумма на 7 больше количества учеников в классе. Следовательно, в классе $22+15-7=30$ человек.

Ответ: 30.

8. Шаг Володи 75 см, а шаг Кати 60 см. Найти сумму их шагов (число шагов — целое), которые они оба сделают на наименьшем расстоянии.

Решение:

$\text{НОК}(75, 60) = 300$, количество шагов Володи на этом расстоянии определяется делением НОК на длину его шага: $\frac{300}{75} = 4$ шага.

Количество шагов Кати на этом расстоянии определяется делением НОК на длину ее шага: $\frac{300}{60} = 5$ шагов.

Ответ: 9.

9. Найти объединение и разность множеств $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{2; 3; 4\}$.

Решение:

Множество $C = A \cup B$ состоит из всех элементов, которые входят или в множество A , или в множество B : $C = \{1; 2; 3; 4\}$.

Множество $D = A \setminus B$ содержит те и только те элементы, которые входят в множество A и не входят в множество B : $D = \{1\}$.

Ответ: $C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$, $D = A \setminus B = \{1\}$

Блок 2

1. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1} = 3 - 5x^2$.

Решение:

Метод возведения в квадрат при решении этого уравнения приводит к громоздкому рациональному уравнению четвертой степени, корни которого найти нелегко.

Заметим, что оба корня, стоящие в левой части уравнения, существуют при любых значениях переменной x , правая часть неотрицательна при $x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right]$.

Можно отметить, что $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$, но $3 - 5x^2 \leq 3$. Следовательно, левая часть исходного уравнения может быть равна правой части, только если обе части одновременно равняются 3. Отсюда находим единственное решение исходного уравнения $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

2. Вычислить $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$.

Решение:

Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}(-3)$, то есть $\operatorname{tg} \alpha = -3$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ответ: $-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

3. Три числа, третьим из которых является 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получим арифметическую прогрессию. Найти наибольшее из этих чисел.

Решение:

Воспользуемся свойствами прогрессий: если три числа (a, b, c) образуют геометрическую прогрессию, то $ac = b^2$; если три числа (a, b, c) образуют арифметическую прогрессию, то $a + c = 2b$. Обозначим x и y – первые два числа. Тогда

$$\begin{cases} 12x = y^2 \\ x + 9 = 2y \end{cases} \Rightarrow x = 2y - 9 \Rightarrow (2y - 9)12 = y^2 \Rightarrow y^2 - 24y + 108 = 0 \Rightarrow$$
$$y_1 = 18, y_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 27, x_2 = 3.$$

Таким образом, получили две геометрические прогрессии: 3, 6, 12 и 27, 18, 12; две арифметические: 3, 6, 9 и 27, 18, 9. Наибольшее из этих чисел 27

Ответ: 27.

4. В книжном шкафу от 250 до 300 книг. Если расставить их на полки по 15 штук, то семи книгам не хватит места, а если разместить на полках по 25 книг, то останется 8 свободных мест. Сколько книг в шкафу?

Решение.

Пусть a – число книг. По условию

$$\begin{cases} a = 15k + 7 = 15(k + 1) - 8; \\ a = 25l - 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 8) : 15; \\ (a + 8) : 25. \end{cases} \Rightarrow (a + 8) : 75.$$

$a + 8$ следует искать среди кратных числу 75: 225, 300, 375, 450, ..., откуда $a = 292$.

5. Найти значение выражения $\sqrt{|24\sqrt{2}-34|}-\sqrt{34+24\sqrt{2}}-1$.

Решение:

$$|24\sqrt{2}-34|=34-24\sqrt{2}=34-2\cdot 12\sqrt{2}=34-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}=16-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}+18=(4-3\sqrt{2})^2,$$

тогда $34+24\sqrt{2}=(4+3\sqrt{2})^2$ и

$$\sqrt{((4-3\sqrt{2})^2)}-\sqrt{((4+3\sqrt{2})^2)}-1=|4-3\sqrt{2}|-|4+3\sqrt{2}|-1=3\sqrt{2}-4-4-3\sqrt{2}-1=-9.$$

Ответ: -9.

6. Решить уравнение $\frac{x}{|x-3|-3|x+1|}=1$.

Решение:

Точки $x=3$ и $x=-1$ делят вещественную ось на три интервала, на каждом из которых выражения $x-3$ и $x+1$ сохраняют постоянный знак:

1) при $x\in(-\infty;-1]:x-3\leq 0$ и $x+1\leq 0$, поэтому $|x-3|=-(x-3)$, $|x+1|=-(x+1)$ и

исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{x}{2x+6}=1$, корень которого $x=-6$ принадлежит промежутку $(-\infty;-1]$, поэтому является корнем исходного уравнения;

2) при $x\in(-1;3]:x-3\leq 0$ и $x+1>0$, поэтому $|x-3|=-(x-3)$, $|x+1|=x+1$ и исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{x}{-4x}=1$, которое не имеет корней;

3) при $x\in(3;+\infty):x-3>0$ и $x+1>0$, поэтому $|x-3|=x-3$, $|x+1|=x+1$ и исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{x}{-2x-6}=1$, корень которого $x=-2$ не принадлежит промежутку $(3;+\infty)$, поэтому не является корнем исходного уравнения.

Ответ: -6.

7. Участок земли имеет форму трапеции ABCD. На участке необходимо выделить три ландшафтные зоны. Для этого провели прямую MN, соединяющую середины боковых сторон участка и прямые AN, DM, MC и BN (см. рис. 10). Площадь участков ВКС и AFD известна $S_{BKC}=S_1=2$, $S_{AFD}=S_2=4$. Найти площадь участка MKNF.

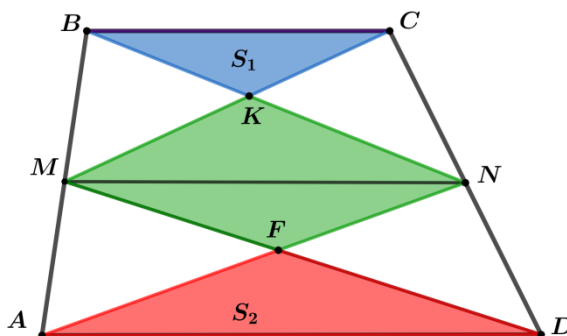
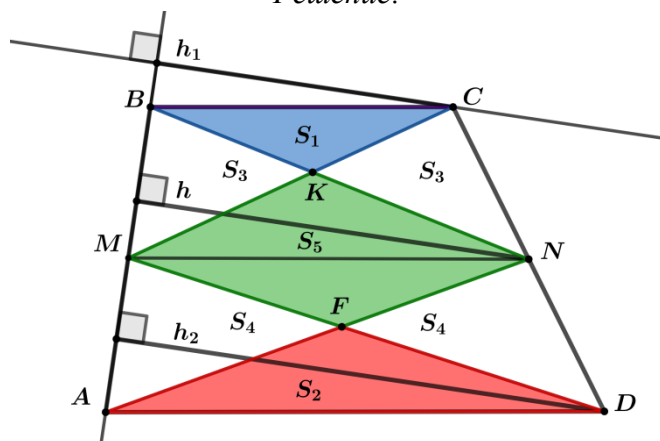


Рис.2

Решение:



1) $S_{\Delta MBK} = S_{\Delta CKN} = S_3$, так как $S_{\Delta MBN} = S_{\Delta MCN}$. Аналогично $S_{\Delta AFM} = S_{\Delta DFN} = S_4$.

Введём обозначения:

$d(N; AB) = h$ - расстояние от точки N до стороны AB,

$d(C; AB) = h_1$ - расстояние от точки C до стороны AB,

$d(D; AB) = h_2$ - расстояние от точки D до стороны AB,

$S(MKNF) = S_5$.

Тогда $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ (как средняя линии трапеции),

$$S_{\Delta ABN} = \frac{1}{2} h AB = \frac{h_1 + h_2}{4} \cdot AB = \frac{1}{4} h_1 AB + \frac{1}{4} h_2 AB.$$

$$\text{Так как } S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} h_1 \cdot MB = \frac{1}{2} h_1 \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{4} h_1 \cdot AB \quad \text{и}$$

$$S_{\Delta MAD} = \frac{1}{2} h_2 \cdot AM = \frac{1}{2} h_2 \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{4} h_2 \cdot AB,$$

то $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta MBC} + S_{\Delta MAD}$.

Так как $S_{\Delta ABN} = S_3 + S_4 + S_5$, $S_{\Delta MBC} = S_3 + S_1$, $S_{\Delta MAD} = S_4 + S_2$, получим $S_3 + S_4 + S_5 = S_3 + S_1 + S_4 + S_2$, $S_5 = S_1 + S_2 = 2 + 4 = 6$.

Ответ: $S(MKNF) = 6$

Блок 3

1. Найти наименьшее значение выражения $1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}$.

Решение:

Выражение имеет смысл при $x \neq \pi k$ и $y \neq \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$ для любых положительных u и v , так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2 + v^2}{uv} \geq 2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \geq 2uv \Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2uv \geq 0 \Leftrightarrow (u - v)^2 \geq 0.$$

Полагая $u = \sin^2 x$, $v = \sin^2 y$, получим $1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \geq 1 + 2 = 3$.

Ответ: 3.

2. Оптовая торговая компания приобрела у производителя товар по цене x рублей

за единицу, где x – натуральное число. Цену каждой единицы товара умножили на 1,7, затем округлили до целого (по обычному правилу) и отправили в магазин. В магазине цену опять умножили на 1,7 и округлили до целого. Получилось число 515. Найти цену производителя.

Решение:

Последнее число $x_2 = 515$ получилось в результате округления числа x_1 , которое должно принадлежать интервалу $[514,5; 515,5)$. Разделив границы интервала на 1,7, получим: $514,5 \div 1,7 \approx 302,6$, $515,5 \div 1,7 \approx 303,2$. Таким образом, $x_1 = 303$, и, следовательно $x \cdot 1,7 \in [302,5; 303,5)$. В этом случае $x \in [177,9; 178,5)$, то есть, $x = 178$.

Ответ: 178.

3. Найти количество девяток, составляющих число $1000^{2024} - 1$.

Решение:

Число 1000^{2024} содержит 1 и 6072 нуля, при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6072 девяток.

Ответ: 6072.

4. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение:

Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Общий член прогрессии задается формулой $a_n = 102 + (n-1) \cdot 6$, и так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102 + (n-1) \cdot 6 \leq 999, \quad n \leq 1 + \frac{999 - 102}{6} = 1 + \frac{897}{6} = 150,5.$$

Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму, $n = 150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 150 \cdot 102 + \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot 6 = 82305.$$

Ответ: 82305.

5. Решить уравнение $2^n + 7 = k^2$ в натуральных числах.

Решение:

k^2 при четном k делится на 4, при нечетном k - дает остаток 1;

$2^n + 7$ для $n > 1$ при делении на 4 дает остаток 3. Поэтому $2^n + 7 = k^2$ для $n > 1$ не имеет решений.

Рассмотрим случай $n = 1: 2^1 + 7 = k^2 \Rightarrow k = 3$.

Ответ: $n = 1, k = 3$.

6. Решить уравнение $27^{1-\cos(2x)+\cos^2(2x)-\cos^3(2x)+\dots} = 7$.

Решение:

Рассмотрим выражение

$$1 - \cos(2x) + \cos^2(2x) - \cos^3(2x) + \dots$$

представляющее бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\cos(2x)$, где $|q| = |-\cos(2x)| \leq 1$. При $|q| = 1$ получим расходящуюся геометрическую прогрессию и решений уравнение не имеет.

Рассмотрим случай $|q| < 1$: $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1+\cos 2x}$, тогда

$$27^{\frac{1}{1+\cos 2x}} = 9, \quad 3^{\frac{3}{1+\cos 2x}} = 3^2 \Rightarrow \frac{3}{1+\cos 2x} = 2 \Rightarrow \frac{3}{1+\cos 2x} = 2 \Rightarrow 1 + \cos 2x = \frac{3}{2},$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

7. Найти число $a = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{2023} 2022 = \log_b c$. В ответ записать сумму $b + c$.

Решение:

$$\log_3 2 = \frac{\log_{2023} 2}{\log_{2023} 3}, \quad \log_4 3 = \frac{\log_{2023} 3}{\log_{2023} 4}, \dots, \quad \log_{2022} 2021 = \frac{\log_{2023} 2021}{\log_{2023} 2022}, \quad \text{тогда}$$

$$a = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{2023} 2022 = \frac{\log_{2023} 2}{\log_{2023} 3} \cdot \frac{\log_{2023} 3}{\log_{2023} 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_{2023} 2021}{\log_{2023} 2022} \cdot \log_{2023} 2022 =$$

$$= \log_{2023} 2$$

Ответ: 2025

8. По круговому игрушечному треку в одном направлении на постоянных скоростях едут два поезда: Красный и Синий. Красный поезд длиннее Синего. Часть кругового трека проходит через темный тоннель. Известно, что в течение некоторого времени Красный поезд находился внутри тоннеля частично или полностью ровно 70% времени от начала движения. Синий поезд находился внутри тоннеля (также частично или полностью) ровно 60% времени. Какую часть времени хотя бы один из этих поездов находился в тоннеле, если известно, что в процессе движения они ни разу не сталкивались, не обгоняли друг друга и двигались равномерно?

Решение:

Нужно найти время, когда хотя бы один поезд находится в тоннеле. Геометрически это означает, что нужно найти объединение (общую длину) этих двух участков на круге. Так как оба участка начинаются в одной и той же точке (линия въезда в тоннель), они просто вложены друг в друга. Участок Синего поезда (60%) полностью помещается внутри более длинного участка Красного поезда (70%).

Таким образом, когда в тоннеле находится Синий поезд, Красный поезд (или его хвост) гарантированно тоже находится в тоннеле (или только что из него выехал, пока Синий еще внутри). Общая занятость тоннеля полностью перекрывается более длинным «окном» Красного поезда.

Следовательно, время, когда хотя бы один поезд находится в тоннеле, равно времени, которое там проводит самый длинный поезд — то есть 70%.

Ответ: 70% времени.

Ответ: 70%