

**ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМПЕРАТРИЦЫ ЕКАТЕРИНЫ II»**



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»

**ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
(математика и физика)**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОТБОРОЧНОМУ ТУРУ ОЛИМПИАДЫ
2025/2026 ГОДА**

Ф И З И К А

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Естественные науки» (предмет олимпиады – физика) проходит с использованием интернет-технологий (дистанционно).

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных ниже, разделов курса физики.

Все блоки содержат задачи, которые включают в себя такие разделы физики, как Кинематика; Динамика; Законы сохранения в механике; Механические колебания и волны; Молекулярно-кинетическая теория; Законы идеального газа; Законы термодинамики; Электрическое поле, постоянный электрический ток; Магнитное поле, электромагнитная индукция; Оптика; Физика атомного ядра.

Для конструирования вариантов олимпиадной работы отборочного тура использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки). Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый блок содержит тестовые задания с выбором правильного ответа из четырех представленных. Второй блок содержит тестовые задания с открытым ответом в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Для выполнения заданий второго блока участникам олимпиады необходимо уметь использовать в рамках задачи более двух физических законов, относящихся к одной или нескольким темам, комбинировать известные алгоритмы действий.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления достаточно высокой степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний и смекалки.

На задания из третьего блока необходим краткий ответ в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы отборочного этапа, состоящий из **30 заданий**: 15 задач из первого блока заданий, 10 задач из второго блока заданий; 5 задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за выполненные задания, суммируются.

РАЗДЕЛЫ ДИСЦИПЛИНЫ И ТЕМЫ, ВКЛЮЧЕННЫЕ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2025/2026

1. КИНЕМАТИКА

- 1.1. Механическое движение.
- 1.2. Равномерное прямолинейное движение.
- 1.3. Равноускоренное движение.
- 1.4. Свободное падение.
- 1.5. Движение точки по окружности.

2 ДИНАМИКА

- 2.1. Масса тела. Плотность вещества.
- 2.2. Сила. Принцип суперпозиции сил.
- 2.3. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона.
- 2.4. Второй закон Ньютона.
- 2.5. Взаимодействие тел. Третий закон Ньютона.
- 2.6. Сила трения скольжения.
- 2.7. Деформация тела. Сила упругости. Закон Гука.
- 2.8. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Вес тела.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

- 3.1. Импульс тела. Импульс системы тел.
- 3.2. Закон сохранения импульса для замкнутой системы тел.
- 3.3. Механическая работа.
- 3.4. Кинетическая и потенциальная энергия.
- 3.5. Механическая энергия. Закон сохранения механической энергии.

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- 4.1. Механические колебания. Амплитуда, период и частота колебаний.

5. Гидростатика. Давление столба жидкости

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

- 6.1. Молекулярное строение тел. Агрегатные состояния вещества.
- 6.2. Тепловое движение атомов и молекул.
- 6.3. Уравнение состояния идеального газа
- 6.4. Виды теплопередачи: теплопроводность, конвекция, излучение

7. ТЕРМОДИНАМИКА

- 7.1. Тепловое равновесие и температура.
- 7.2. Внутренняя энергия идеального газа.
- 7.3. Нагревание и охлаждение тел. Количество теплоты. Удельная теплоемкость.
- 7.4. Закон сохранения энергии в тепловых процессах. Уравнение теплового баланса.
- 7.5. Тепловые машины.

8. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

- 8.1. Два вида электрических зарядов.
- 8.2. Взаимодействие электрических зарядов.
- 8.3. Электрическое поле.
- 8.4. Напряженность электрического поля. Поле точечного заряда. Однородное поле.

Картины линий поля.

- 8.6. Конденсатор. Электроемкость конденсатора.

9. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

9.1. Постоянный электрический ток. Действия электрического тока. Сила тока. Напряжение.

- 9.2. Электрическое сопротивление. Удельное электрическое сопротивление.
- 9.3. Закон Ома. Соединение проводников.

10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

- 10.1. Магнитное поле прямого проводника с током. Вектор магнитной индукции.

11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

- 11.1. Поток вектора магнитной индукции.
- 11.2. Электромагнитная индукция. Опыты Фарадея.

12. ОПТИКА

- 12.1. Закон прямолинейного распространения света
- 12.2. Закон отражения света. Плоское зеркало.
- 12.3. Преломление света.
- 12.4. Цветность света

13. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

- 13.1. Состав атомного ядра. Изотопы.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ И ЕЁ РЕШЕНИЯ ИЗ ВАРИАНТА ЗАДАНИЙ

Пример 1. Человек массой 70 кг поднимается в лифте, движущемся равнозамедленно вертикально вверх с ускорением 1 м/с². Определить силу давления человека на пол кабины лифта.

Дано:
 $m = 70 \text{ кг}$
 $a = 1 \text{ м/с}^2$
 $F = ?$

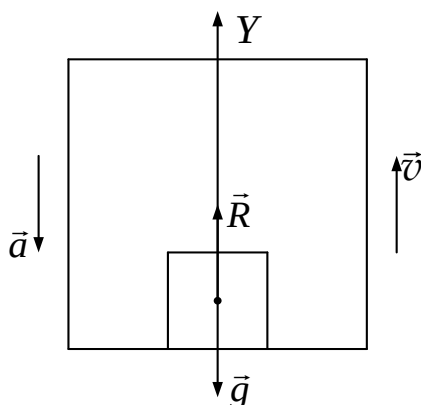


Рис. 1

Решение. На человека, находящегося в кабине лифта действуют: mg – сила тяжести и N – сила реакции пола кабины (см. рис. 1). Ускорение движения направлено вертикально вниз.

Запишем для человека уравнение второго закона Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}.$$

Проведём ось Y в направлении движения лифта. Уравнение (1) в проекции на ось Y запишется в форме:

$$-ma = N - mg \quad (2)$$

Откуда

$$N = mg - ma = m(g - a) \quad (3)$$

Проведя вычисления в формуле (3), получим $N = 70(9,81 - 1) \text{ Н} = 616 \text{ Н}$.

По третьему закону Ньютона сила давления F человека на пол кабины равна по модулю силе реакции N пола кабины:

$$F = N = 616 \text{ Н.}$$

Ответ: 616 Н.

Пример 2.

Тележка с песком массой 40 кг движется горизонтально со скоростью 5 м/с. Камень массой 10 кг попадает в песок и движется вместе с тележкой. Найти скорость тележки после попадания камня: а) падающего по вертикали; б) летящего горизонтально навстречу тележке со скоростью 10 м/с.

Дано:
 $m_1 = 40 \text{ кг}$
 $v_1 = 5 \text{ м/с}$
 $m_2 = 10 \text{ кг}$
 а) $v_2 = 0$, б) $v_2 = 10 \text{ м/с}$

$u = ?$

Решение.

Рассмотрим систему, состоящую из тележки и камня. На тележку действуют сила тяжести и сила реакции опоры. Сумма этих сил равна нулю. На камень действует сила тяжести. Силами трения и сопротивления воздуха можно пренебречь. Данная система тел незамкнута и закон сохранения импульса к ней неприменим. Однако проекция силы тяжести на направление движения равна нулю, следовательно, можно применить закон сохранения для проекций импульсов на направление движения:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u \quad (1)$$

Откуда
$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

После подстановки числовых значений в выражение (2), получим

$$u = \frac{40 \cdot 5}{40 + 10} = 4 \text{ м/с.}$$

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось X для случая, когда камень летит горизонтально со скоростью $v_1 = 10 \text{ м/с}$ и застревает в песке: $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u \quad (3)$

Откуда
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u \quad (4)$$

Произведем вычисления величины u:

$$u = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 10}{40 + 40} \text{ м/с} = 2 \text{ м/с.}$$

Под действием силы 40 Н груз массой 4 кг перемещается вверх по наклонной плоскости.

Ответ: 4 м/с и 2 м/с.

Пример 3. Сколько граммов спирта нужно сжечь в спиртовке, чтобы нагреть на ней воду массой 580 г на 80 °С? КПД спиртовки (с учётом потерь теплоты) равен 20%. (Удельная теплота сгорания спирта $2,9 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$, удельная теплоёмкость воды $4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°С)}$).

Дано: $m = 580 \text{ г}$, $\Delta t = 80 \text{ °С}$, $\eta = 20 \%$, $q = 2,9 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$, $c = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°С)}$.

Найти: $m_{\text{сп}}$

Решение.

При нагревании тела на температуру Δt тело получает количество теплоты $Q = cm\Delta t$. При сгорании тела выделяется энергия $Q_{\text{сгор}} = qm_{\text{сп}}$. Учитывая, что КПД спиртовки равен 20%, получаем:

$$Q = 0,2Q_{\text{сгор}} \Rightarrow cm\Delta t = 0,2qm_{\text{сп}} \Rightarrow m_{\text{сп}} = \frac{cm\Delta t}{0,2q}.$$

$$m_{\text{сп}} = \frac{4200 \cdot 0,58 \cdot 80}{0,2 \cdot 2,9 \cdot 10^7} = 336 \cdot 10^{-4} \text{ кг} = 33,6 \text{ г}$$

Ответ: 33,6 г.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Футбольный мяч пнули вертикально вверх с высоты 1 м со скоростью 99 км/ч. На какой высоте он остановится?

Ответ: 38,8125 м

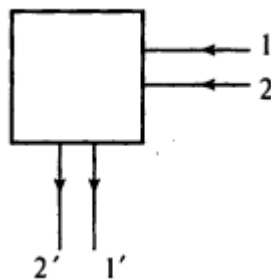
2 Тело совершает вращательное движение по окружности. При его перемещении на 9,6 м прошло время равное полутора периодам. Чему равен путь, пройденный телом? Ответ округлите до сотых.

Ответ: 45,24 м

3. Автомобиль массой 2 т скользит с ускорением по наклонной плоскости, покрытой асфальтом. Во сколько раз вырастет ускорение тела, если сухой асфальт смочить? Угол наклона к горизонту 30°, коэффициент трения скольжения шины по сухому асфальту равен 0,55, а по влажному – 0,35. Ответ округлить до целых

Ответ: 8

4. После прохождения оптического прибора, закрытого на рисунке ширмой, ход лучей 1 и 2 изменился на 1' и 2'. За ширмой находится



- 1) собирающая линза
- 2) рассеивающая линза
- 3) плоское зеркало
- 4) сферическое зеркало

Ответ: утверждение 3

5. В мешок с песком массой 4 кг, висющий на длинной нерастяжимой нити, попадает пуля, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, и застревает в нем. Масса пули 10 г. Найти высоту, на которую отклонится мешок с песком.

Ответ: 5,1 см

6. Точечное тело начинает двигаться по горизонтальной плоскости из состояния покоя с постоянным ускорением в положительном направлении горизонтальной оси Ох. Во сколько раз путь, пройденный этим телом за пятую секунду, больше пути, пройденного им за вторую секунду?

Ответ: 3

7. К тележке массой 1 кг прикрепили пружину и начали тянуть за неё, прикладывая горизонтально направленную постоянную силу, так, что за время 2 с тележка проехала расстояние 1,6 м. При этом в течение движения тележки пружина была удлинена на 1 см. Какова жёсткость пружины? Трением пренебречь.

Ответ: 80 Н/м

8. Груз массой 2 кг равномерно втаскивают по шероховатой наклонной плоскости, имеющей высоту 0,6 м и длину 1 м, действуя на него силой, равной по модулю 20 Н и направленной вдоль наклонной плоскости. Чему равен КПД наклонной плоскости?

Ответ: 60 %

9. В тепловой машине температура нагревателя в три раза меньше температуры холодильника, равной 27 °С. Чему равно КПД тепловой машины? Ответ дать в % и округлить до целых.

Ответ: 67 %

10. Два однородных кубика привели в тепловой контакт друг с другом. Первый кубик изготовлен из меди, длина его ребра 3 см, а начальная температура $t_1 = 2$ °С. Второй кубик изготовлен из алюминия, длина его ребра 4 см, а начальная температура $t_2 = 74$ °С. Пренебрегая теплообменом кубиков с окружающей средой, найдите температуру кубиков после установления теплового равновесия. Плотности алюминия и меди соответственно: $\rho_A = 2700$ кг/м³, $\rho_M = 8900$ кг/м³. Удельные теплоёмкости алюминия и меди соответственно: $c_A = 920$ Дж/(кг·°С), $c_M = 400$ Дж/(кг·°С). Ответ укажите с точностью до целых.

Ответ: 47 °С

11. Сколько литров воды при 83 °С нужно добавить к 4 л воды при 20 °С, чтобы получить воду температурой 65 °С? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Ответ: 10 л

12. Два одинаковых металлических шарика, заряженных положительными зарядами q_1 и q_2 , привели в соприкосновение. При этом заряд второго шарика увеличился в 1,5 раза и стал равен $q'_2 = 9$ нКл. Чему был равен заряд (в нКл) первого шарика q_1 до соприкосновения?

Ответ: 12

13. На железный проводник длиной 10 м и сечением 2 мм² подано напряжение 12 мВ. Чему равна сила тока, протекающего по проводнику? Удельное сопротивление железа — 0,098 Ом · мм²/м. Ответ округлить до десятых.

Ответ: 24,5 мА

14. материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению:

$$x = 2 \sin(\pi t + \pi / 4)$$

Найти амплитуду, период и начальную фазу колебания.

Ответ: 2; 2; $\pi/4$.

15. Сколько в изотопе криптона $^{97}_{36}\text{Kr}$ протонов и нейтронов?

Ответ: 36 и 61

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Математика» (предмет олимпиады – Естественные науки) проходит с использованием интернет-технологий (заочно). Продолжительность отборочного тура олимпиады – 3 часа

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовку участников олимпиады в рамках программы, соответствующей Кодификатору элементов содержания по математике года, размещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений» <https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/173801626-2>. В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса математики:

- числа и вычисления;
- алгебраические выражения;
- уравнения и неравенства;
- числовые последовательности;
- элементарные функции и их свойства;
- координаты на прямой и плоскости;
- геометрия (планиметрия);
- элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2025-2026

Числа и вычисления

Натуральные числа. Десятичная система счисления. Римская нумерация. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Деление с остатком.

Дроби. Обыкновенная дробь, основное свойство дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями. Нахождение части от целого и целого по его части. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей. Арифметические действия с десятичными дробями. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и обыкновенной в виде десятичной

Рациональные числа. Целые числа. Модуль (абсолютная величина) числа. Сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами. Степень с целым показателем. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок. Законы арифметических действий.

Действительные числа. Квадратный корень из числа. Корень третьей степени. Нахождение приближённого значения корня. Запись корней с помощью степени с дробным показателем. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Сравнение действительных чисел

Измерения, приближения, оценки

Единицы измерения длины, площади, объёма, массы, времени, скорости. Размеры объектов окружающего мира (от элементарных частиц до Вселенной), длительность процессов в окружающем мире. Представление зависимости между величинами в виде формул. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по её проценту. Отношение, выражение отношения в процентах. Пропорция. Пропорциональная и обратно пропорциональная зависимости. Округление чисел.

Алгебраические выражения

Буквенные выражения. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения. Подстановка выражений вместо переменных. Равенство буквенных выражений, тождество. Преобразования выражений.

Свойства степени с целым показателем

Многочлены. Многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности, формула разности квадратов. Разложение многочлена на множители. Квадратный трёхчлен. Теорема Виета. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители. Степень и корень многочлена с одной переменной

Алгебраическая дробь. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей. Действия с алгебраическими дробями. Рациональные выражения и их преобразования.

Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях

Уравнения и неравенства

Уравнения. Уравнение с одной переменной, корень уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения. Решение рациональных уравнений. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители. Уравнение с двумя переменными, решение уравнения с двумя переменными. Система уравнений, решение системы алгебраическим сложением. Уравнение с несколькими переменными

Решение простейших нелинейных систем

Неравенства. Числовые неравенства и их свойства. Неравенство с одной переменной. Решение неравенства. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств. Квадратные неравенства

Текстовые задачи. Решение текстовых задач.

Числовые последовательности

Понятие последовательности

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Функции

Числовые функции. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции. График функции, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, чтение графиков функций. Функция, описывающая прямую пропорциональную зависимость, её

график. Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график. Гипербола. Квадратичная функция, её график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии. Использование графиков функций для решения уравнений и систем.

Координаты на прямой и плоскости.

Координатная прямая. Изображение чисел точками координатной прямой. Геометрический смысл модуля. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч

Декартовы координаты на плоскости. Декартовы координаты на плоскости, координаты точки. Координаты середины отрезка. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых. Уравнение окружности. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными и их систем.

Геометрия

Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин

Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и её свойства. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой. Понятие о геометрическом месте точек. Преобразования плоскости. Движения. Симметрия.

Треугольник. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Признаки равенства треугольников. Неравенство треугольника. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника. Теорема Фалеса. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников.

Многоугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки. Трапеция, средняя линия трапеции, равнобедренная трапеция. Сумма углов выпуклого многоугольника. Правильные многоугольники

Окружность и круг. Центральный угол, вписанный угол, величина вписанного угла. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей. Касательная и секущая к окружности; равенство отрезков касательных, проведённых из одной точки. Окружность, вписанная в треугольник. Окружность, описанная около треугольника. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника.

Измерение геометрических величин. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой. Длина окружности. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника. Площадь параллелограмма. Площадь трапеции. Площадь треугольника. Площадь круга, площадь сектора. Формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, куба, шара.

Векторы на плоскости. Вектор, длина (модуль) вектора. Равенство векторов. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число). Угол между векторами. Коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

Статистика и теория вероятностей

Операции над множествами. Объединение, пересечение, разность числовых множеств.

Вероятность. Частота события, вероятность. Равновероятные события и подсчёт их вероятности.

Комбинаторика. Перестановки и факториал. Сочетания и число сочетаний. Решение комбинаторных задач: перебор вариантов, комбинаторное правило умножения.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса математики.

Содержательные элементы заданий отборочного тура представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый блок содержит задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов. Второй блок также содержит задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов, а также задания открытой формы с вводом краткого ответа. Для выполнения заданий первого и второго блоков участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи знания, относящиеся к одной или нескольким темам, умение обобщать знания, комбинировать известные алгоритмы действий, получать выводы (особенно к задачам, имеющим прикладную направленность или политехнический характер).

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности. Эти задания позволяют оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления значительной степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний, смекалки и эрудиции.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы, состоящий из 30 заданий: 15 задач из первого блока заданий, 10 задач из второго блока заданий, 5 задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его. Баллы, полученные участником олимпиады за каждое выполненное задание, суммируются.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

Блок 1.

1. Найти объединение и пересечение множеств $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{2; 3; 4\}$.

Решение:

Множество $C = A \cup B$ состоит из всех элементов, которые входят или в множество A , или в множество B : $C = \{1; 2; 3; 4\}$.

Множество $D = A \cap B$ содержит те и только те элементы, которые входят одновременно и в множество A , и в множество B : $D = \{2; 3\}$.

Ответ: $C = \{1; 2; 3; 4\}$, $D = \{2; 3\}$.

2. Вычислить $\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}}$.

Решение:

Выделим в выражениях, стоящих под знаком корня полный квадрат:

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{1-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2} - \sqrt{1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| - |1+\sqrt{2}|.$$

Так как по определению

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad \text{то} \quad |1-\sqrt{2}| - |1+\sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -2.$$

Ответ: -2.

3. Первый член возрастающей геометрической прогрессии $b_1 = \sqrt{3}$, пятый член $b_5 = \sqrt{243}$. Найти квадрат шестого члена.

Решение:

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = \sqrt{3} \cdot q^4 = \sqrt{243} \Rightarrow q^4 = \sqrt{\frac{243}{3}} = 3^4; q = \pm 3, b_6 = \sqrt{243} \cdot q = \pm \sqrt{81 \cdot 3^2} = \pm 27.$$

Ответ: 27.

4. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-x}}$.

Решение:

$$\text{Область определения задается системой} \quad \begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 4-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 4.$$

Ответ: $x \in [-1; 4)$.

5. Сократите дробь $\frac{2y^2 - 3y + 1}{3y^2 - 4y + 1}$.

Решение:

Разложение трехчленов на множители проводим по формулам сокращенного умножения, с помощью дискриминанта или по теореме Виета.

$$\frac{2y^2 - 3y + 1}{3y^2 - 4y + 1} = \frac{(2y-1)(y-1)}{(3y-1)(y-1)} = \frac{(2y-1)}{(3y-1)}.$$

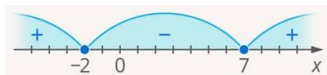
Ответ: $\frac{2y-1}{3y-1}$.

6. Решите неравенство $(x-2)^2 \geq 18+x$.

Решение:

Для начала приведем неравенство к стандартному виду: $ax^2 + bx + c \geq 0$. Для этого раскроем скобки и перенесем все слагаемые в левую часть: $x^2 - 5x - 14 \geq 0$.

Решая соответствующее квадратное уравнение $x^2 - 5x - 14 = 0$ (можно использовать формулу с дискриминантом или теорему Виета), находим корни $x_1 = 7$, $x_2 = -2$.



Эти корни разбивают ось на три интервала, на каждом из которых определяем знак функции.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [7; +\infty)$.

7. Цена на электрический чайник была повышена на 16% и составила 3480 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Решение:

Если прежняя цена – это 100%, то новая цена – 116%. Получаем, что
116 % - 3480 рублей.

100 % - x рублей.

Составим пропорцию $\frac{116}{100} = \frac{3480}{x}$, решая которую находим $x = \frac{100 \cdot 3480}{116} = 3000$.

Ответ: 3000.

Блок 2

1. Найти сумму корней уравнения $\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{9}{x}\right) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$.

Решение:

Уравнение имеет смысл при $x \neq 0$. Приведя к общему знаменателю, получим:

$$\frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x^2-9}{x} = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3);$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x} = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Значения $x=1, 2, 3$ - решения данного уравнения. Сократим на общие множители и упростим:

$$(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = x^3;$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3;$$

$$6x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Дискриминант $D = -23$, следовательно, других решений исходное уравнение не имеет.

Ответ: 6.

2. Громоотвод защищает от молнии все предметы, расстояние от которых до его основания не превышает его удвоенной высоты. Найти наименьшую высоту громоотвода, необходимую для защиты прямоугольного участка на метров.

Решение:

Громоотвод высоты h защищает круглую площадь радиуса $2h$, следовательно, задача сводится к отысканию радиуса наименьшего круга, в который можно вписать данный прямоугольник. Очевидно, диаметр такого круга должен совпадать с диагональю прямоугольника $d = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$, и необходимая высота $h = \frac{d}{4} = \frac{25}{4} = 6,25$.

Ответ: 6,25.

3. Найти наименьшее натуральное значение параметра a , при котором неравенство $x^2 - (a-4)x + a^2 - a + 4 > 0$ выполняется на всей числовой оси.

Решение:

График функции $f(x) = x^2 - (a-4)x + a^2 - a + 4$ - парабола, ветви которой направлены вверх. Для того, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - (a-4)x + a^2 - a + 4 > 0$ необходимо, чтобы парабола не имела точек пересечения с осью Ox , а значит дискриминант уравнения $x^2 - (a-4)x + a^2 - a + 4 = 0$ должен быть отрицательным:

$$D = (a-4)^2 - 4(a^2 - a + 4) = -3a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ: 1

4. Найти шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 24.

Решение:

Чтобы число делилось на 24, оно должно делиться на 3 и на 8.

Число делится на 8, если три его последние цифры образуют число, делящееся на 8. Искомое число записывается только нулями и единицами, значит, оно заканчивается на 000.

Число делится на 3, если его сумма цифр числа делится на 3. Поскольку три последние цифры числа — нули, первые три должны быть единицами.

Таким образом, единственное число, удовлетворяющее условию задачи, — это число 111 000.

Ответ: 111 000.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (2x + y)^2 = 3y, \\ (2x + y)^2 = 3x. \end{cases}$$

Решение:

$$3x = 3y \Rightarrow (2x + x)^2 = 3x \Rightarrow 9x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(3x - 1) = 0.$$

$$\text{Тогда } x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0; \quad x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $(0; 0), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

6. Шаг Володи 75 см, а шаг Кати 60 см. Найти сумму их шагов (число шагов — целое), которые они оба сделают на наименьшем расстоянии.

Решение:

НОК(75, 60) = 300, количество шагов Володи на этом расстоянии определяется делением НОК на длину его шага: $\frac{300}{75} = 4$ шага.

Количество шагов Кати на этом расстоянии определяется делением НОК на длину ее шага: $\frac{300}{60} = 5$ шагов.

Ответ: 9.

7. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{26 + \sqrt{675}} + \sqrt[3]{26 - \sqrt{675}}$.

Решение.

Обозначим $\sqrt[3]{26 + \sqrt{675}} + \sqrt[3]{26 - \sqrt{675}} = A$. Тогда

$$\begin{aligned} A^3 &= 26 + \sqrt{675} + 3\left(\sqrt[3]{26 + \sqrt{675}}\right)^2 \sqrt[3]{26 - \sqrt{675}} + 3\sqrt[3]{26 + \sqrt{675}} \left(\sqrt[3]{26 - \sqrt{675}}\right)^2 + 26 - \sqrt{675} = \\ &= 52 + 3\sqrt{(26 + \sqrt{675})(26 - \sqrt{675})} \left[\sqrt[3]{26 + \sqrt{675}} + \sqrt[3]{26 - \sqrt{675}}\right] = \\ &= 52 + 3\sqrt{676 - 675} \cdot A = 52 + 3A. \end{aligned}$$

Решение кубического уравнения

$$A^3 - 3A - 52 = 0$$

находим разложением левой части на множители:

$$\begin{aligned} A^3 - 64 - 3A + 12 &= 0 \Rightarrow (A^3 - 64) - 3(A - 4) = 0 \Rightarrow \\ (A - 4)(A^2 + 4A + 13) &= 0 \Rightarrow A = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

8. Упростить выражение

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right).$$

Решение:

Чтобы упростить первый множитель, воспользуемся определением квадратного корня:

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} = |p - q|.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right) = \\ & = |p - q| \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} + \frac{q}{p - q} + \frac{p}{p + q} \right) = |p - q| \frac{2pq + pq + q^2 + p^2 - pq}{p^2 - q^2} = \\ & = \frac{|p - q|(p + q)^2}{(p - q)(p + q)} = \frac{|p - q|(p + q)}{(p - q)} = (p + q) \operatorname{sgn}(p - q) = \begin{cases} p + q, & p > q; \\ -p - q, & p < q. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $p + q$ при $p > q$, $-p - q$ при $p < q$.

Блок 3

1. Решить уравнение $\frac{26,751}{3,249} - \frac{6,751}{3,249} \cdot x = \frac{23,249}{6,751} - \frac{3,249}{6,751} \cdot x.$

Решение:

Обозначив $a = 6,751$, $b = 3,249$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{a+20}{b} - \frac{a}{b}x &= \frac{b+20}{a} - \frac{b}{a}x; & \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right)x &= \frac{b+20}{a} - \frac{a+20}{b}; \\ \left(\frac{b^2 - a^2}{ab} \right)x &= \frac{b^2 + 20b - a^2 - 20a}{ab}; & x &= \frac{b^2 - a^2 + 20(b - a)}{b^2 - a^2}; & x &= 1 + \frac{20}{b + a} = 1 + \frac{20}{10} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

2. Найти наименьшее значение выражения $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^3 + \left(y^2 + \frac{1}{y^2} \right)^3$

Решение:

Область определения неравенства ограничивается условиями $x \neq 0$, $y \neq 0$. Заметим, что $u + \frac{1}{u} \geq 2$ для любых положительных u , так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2 + 1}{u} \geq 2 \Leftrightarrow u^2 + 1 \geq 2u \Leftrightarrow u^2 + 1 - 2u \geq 0 \Leftrightarrow (u - 1)^2 \geq 0,$$

причем равенство достигается при $u = 1$.

Таким образом, наименьшее значение выражения $2^3 + 2^3 = 16$.

Ответ. 16.

3. Оптовая торговая компания приобрела у производителя товар по цене x рублей за единицу, где x – натуральное число. Цену каждой единицы товара умножили на 1,7, затем округлили до целого (по обычному правилу) и отправили в магазин. В магазине цену опять умножили на 1,7 и округлили до целого. Получилось число 515. Найти цену

производителя.

Решение:

Последнее число $x_2 = 515$ получилось в результате округления числа x_1 , которое должно принадлежать интервалу $[514,5; 515,5)$. Разделив границы интервала на 1,7, получим: $514,5 \div 1,7 \approx 302,6$, $515,5 \div 1,7 \approx 303,2$. Таким образом, $x_1 = 303$, и, следовательно $x \cdot 1,7 \in [302,5; 303,5)$. В этом случае $x \in [177,9; 178,5)$, то есть, $x = 178$.

Ответ: 178.

4. Найти количество девяток, составляющих число $1000^{2024} - 1$.

Решение:

Число 1000^{2024} содержит 1 и 6072 нуля, при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6072 девяток.

Ответ: 6072

5. Найти сумму всех четырехзначных чисел, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1,2,3,4,5, причем каждая цифра встречается не более одного раза.

Решение:

Любая из этих цифр встречается в любом разряде столько раз, сколькими способами можно распределить остальные четыре цифры по оставшимся трем разрядам. Это число $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Следовательно, сумма цифр, стоящих в каждом из четырех разрядов, взятая по всем четырехзначным числам, удовлетворяющим условиям задачи, равна $24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360$, а сумма самих четырехзначных чисел $360 \cdot (10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 360 \cdot 1111 = 399960$.

Ответ. 399960.

Составители: доцент *О.В. Сильванович*

Научный редактор

заведующий кафедрой высшей математики профессор *А.П. Господариков*