

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**



**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ГРАНИТ НАУКИ»**

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

**Методические указания для подготовки к заключительному туру олимпиады
в 2025/2026 учебном году
для 10 классов**

Санкт-Петербург, 2026



СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА	3
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ.....	4
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	5
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ	10
ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ЗАДАЧИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ	12
ТРИГОНОМЕТРИЯ	14
ПРОГРЕССИИ.....	18
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ	20
СВОЙСТВА ФУНКЦИИ.....	22
ПЛАНИМЕТРИЯ	24
ФИЗИКА	27
СТРУКТУРА БИЛЕТА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДЫ.....	28
ПРИМЕРНЫЙ ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	28
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	29
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.....	31
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	33



МАТЕМАТИКА

Олимпиада по математике проводится только в письменной форме. Предлагаемые задачи, хотя и не выходят за рамки школьного курса математики, требуют творческого подхода, отличного владения материалом и определенной эрудиции. Разнообразие приемов и методов решения настолько велико, что собрать их в коротком пособии невозможно, подобранные задачи лишь позволяют увидеть уровень сложности и вспомнить некоторые наиболее распространенные моменты. Разделение задач по темам весьма условно, так как при решении задач из одной темы могут понадобиться сведения из других тем.

Каждый участник олимпиады получает вариант, содержащий пять заданий по математике. Они могут включать все темы школьного курса математики. При решении следует учитывать, что в вариант включены задания разной сложности в порядке возрастания их номера. Соответственно, выполнение более сложного задания оценивается большим числом баллов.

Все числовые ответы должны быть приведены точно, поэтому не нужно переводить обыкновенные дроби в десятичные и заменять значения иррациональных чисел их приближенными значениями в виде десятичных дробей (то есть нельзя вместо $\sqrt{3}$ писать 1, 7). В решениях также требуется выполнить все необходимые математические выкладки и строго обосновать все логические переходы.

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ**

Такие задачи обычно решаются элементарными приемами:

- применение формул сокращенного умножения;
- возведение в степень и извлечение корня;
- преобразование более общего выражения с последующим возвращением к исходному.

Задача 1. Вычислить $\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}$.

Решение. Заметив, что данное выражение отрицательно, возведем его в квадрат:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2 &= 4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{4-\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{15}} = \\ &= 8 - 2\sqrt{16-15} = 6. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}} = -\sqrt{6}$.

Ответ. $-\sqrt{6}$.

Задача 2. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}} = A$. Тогда

$$\begin{aligned} A^3 &= 26 + \sqrt{675} + 3\left(\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}\right)^2 \sqrt[3]{26-\sqrt{675}} + \\ &+ 3\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} \left(\sqrt[3]{26-\sqrt{675}}\right)^2 + 26 - \sqrt{675} = \\ &= 52 + 3\sqrt{(26+\sqrt{675})(26-\sqrt{675})} \left[\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}\right] = \\ &= 52 + 3\sqrt{676-675} \cdot A = 52 + 3A. \end{aligned}$$

Решение кубического уравнения

$$A^3 - 3A - 52 = 0$$

находим разложением левой части на множители:

$$\begin{aligned} A^3 - 64 - 3A + 12 = 0 &\Rightarrow (A^3 - 64) - 3(A - 4) = 0 \Rightarrow \\ (A - 4)(A^2 + 4A + 13) &= 0 \Rightarrow A = 4. \end{aligned}$$

Ответ. 4.

Задача 3. Упростить выражение

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right).$$

Решение. Чтобы упростить первый множитель, воспользуемся определением квадратного корня:

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} = |p - q|.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right) = \\ = |p - q| \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} + \frac{q}{p - q} + \frac{p}{p + q} \right) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= |p-q| \frac{2pq + pq + q^2 + p^2 - pq}{p^2 - q^2} = \\
&= \frac{|p-q|(p+q)^2}{(p-q)(p+q)} = \frac{|p-q|(p+q)}{(p-q)} = (p+q) \operatorname{sgn}(p-q) = \\
&= \begin{cases} p+q, & p > q; \\ -p-q, & p < q. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ. $p+q$ при $p > q$,

$-p-q$ при $p < q$.

Задача 4. Представить в виде несократимой дроби

$$7 \frac{23}{2020} \cdot 6 \frac{23}{2019} - 13 \frac{1997}{2020} \cdot 2 \frac{1996}{2019} - 9 \cdot \frac{23}{2020}.$$

Решение. Обозначим $a = \frac{23}{2020}$, $b = \frac{23}{2019}$. Тогда данное выражение запишется в виде:

$$\begin{aligned}
&(7+a)(6+b) - (14-a)(3-b) - 9a = \\
&= 42 + 6a + 7b + ab - 42 + 3a + 14b - ab - 9a = 21a = \frac{21 \cdot 23}{2020} = \frac{483}{2020}. \text{ Ответ. } \frac{483}{2020}.
\end{aligned}$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Основные методы решения алгебраических уравнений:

- разложение на множители;
- тождественные преобразования;
- замена неизвестной,
- графическая интерпретация.

Решение уравнений в целых или натуральных числах рассматриваются в параграфе «Элементарная теория чисел».

Задача 5. Решить уравнение:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{9}{x}\right) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3).$$

Решение. Уравнение имеет смысл при $x \neq 0$. Приведя к общему знаменателю, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x^2-9}{x} = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3); \\
&\frac{(x-1)(x+1)}{x} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x} = (x-1)(x-2)(x-3).
\end{aligned}$$

Значения $x=1, 2, 3$ - решения данного уравнения. Сократим на общие множители:

$$(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = x^3; \quad x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3;$$

$$6x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Дискриминант $D = -23$, следовательно, других действительных решений исходное уравнение не имеет.

Ответ. $x=1, 2, 3$.



Задача 6. Решить уравнение

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Решение. В уравнении

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0$$

положим $x = 5/2 + y$. Тогда заданное уравнение примет вид:

$$3 \left(\frac{1}{\frac{5}{2} + y} + \frac{1}{y - \frac{5}{2}} \right) + \left(\frac{1}{y + \frac{3}{2}} + \frac{1}{y - \frac{3}{2}} \right) + 4 \left(\frac{1}{y + \frac{1}{2}} + \frac{1}{y - \frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$\text{или } 2y \left[\frac{3}{y^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{1}{y^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{4}{y^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right] = 0.$$

Отсюда $y = 0 \Leftrightarrow x = 5/2$ или

$$3 \left(y^2 - \frac{9}{4} \right) \left(y^2 - \frac{1}{4} \right) + \left(y^2 - \frac{25}{4} \right) \left(y^2 - \frac{1}{4} \right) + 4 \left(y^2 - \frac{9}{4} \right) \left(y^2 - \frac{25}{4} \right) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$8y^4 - 48y^2 + \frac{119}{2} = 0,$$

откуда находим:

$$y^2 = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 119}}{8} = \frac{24 \pm 10}{8}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{5}{2}; \quad x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}; \quad x_{4,5} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

При решении и доказательстве алгебраических неравенств следует обратить внимание на следующие распространенные приемы:

- доказательство неравенств на основе определения;
- выделение квадратов или других степеней;
- последовательные оценки;
- метод математической индукции;
- использование специальных и классических неравенств;
- использование элементов математического анализа;
- использование геометрических аналогий.

Задача 7. Доказать, что $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$.

Доказательство.

Используя очевидное неравенство $2 < \sqrt{6} < 3$, оценим левую часть:

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} <$$

$$< \sqrt{6 + \dots \sqrt{6 + 3}} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + 3}} = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3,$$

Задача 8. a, b, c – стороны треугольника. Доказать, что



$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

Решение. Используя неравенство треугольника $a+b>c$ и неравенство $a^2-ab+b^2\geq 0$, получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > \\ &> c(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c(a^2 + 2ab + b^2) = c(a+b)^2 > c^3. \end{aligned}$$

Задача 9. Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c.$$

Доказать, что $a + b + c \geq 3abc$.

Доказательство.

Сначала докажем, что имеет место неравенство

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca):$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0;$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac);$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Прибавив к обеим частям $2(ab + bc + ac)$, будем иметь:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \geq 3(ab + bc + ac), \text{ что равносильно}$$

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac).$$

Умножая неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$ на общий знаменатель, получим равносильное неравенство:

$$bc + ac + ab \geq (a + b + c) abc.$$

По доказанному выше:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(bc + ac + ab) \geq 3(a + b + c) abc.$$

Задача 10. Доказать, что если $a+b+c \leq 3$ и $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, то справедливо неравенство:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Если $a \leq b \leq c, x \leq y \leq z$, то сумма произведений $cz + by + ax$ будет принимать максимально е значение из всех сумм, составленных из попарных произведений множителей a, b, c и x, y, z , а сумма $az + by + cx$, будет принимать минимальное значение из всех таких возможных сумм (почему?).

$$\text{Если } a \geq b \geq c, \text{ то } a+1 \geq b+1 \geq c+1 \Rightarrow \frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{b+1} \leq \frac{1}{c+1}.$$

$S_{\min} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$. Все остальные суммы, составленные из попарных произведений множителей a, b, c и $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}$, будут больше. Тогда

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1};$$

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{c}{b+1} + \frac{a}{c+1} + \frac{b}{a+1}.$$



Сложив эти неравенства, получим:

$$\begin{aligned}
 2S_{\min} &\leq \frac{a+c}{b+1} + \frac{a+b}{c+1} + \frac{b+c}{a+1} \leq \frac{3-b}{b+1} + \frac{3-c}{c+1} + \frac{3-a}{a+1} = \\
 &= \frac{3+3b-3b-b}{b+1} + \frac{3+3a-3a-a}{a+1} + \frac{3+3c-3c-c}{c+1} = \\
 &= \frac{3(b+1)-4b}{b+1} + \frac{3(a+1)-4a}{a+1} + \frac{3(c+1)-4c}{c+1} = \\
 &= 3 - \frac{4b}{b+1} + 3 - \frac{4a}{a+1} + 3 - \frac{4c}{c+1} = \\
 &= 9 - 4\left(\frac{b}{b+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{c}{c+1}\right) = 9 - 4S_{\min} = 9 - 4S_{\min}
 \end{aligned}$$

Таким образом, $2S_{\min} \leq 9 - 4S_{\min}$, $6S_{\min} \leq 9$. Следовательно, $S_{\min} \leq \frac{3}{2}$.

Задача 11. Пусть x, y вещественные неотрицательные числа, такие, что $x + y = 2$. Доказать, что $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$.

Доказательство. Известно, что среднее геометрическое не превосходит среднее арифметическое $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Так как x, y вещественные неотрицательные числа, то $\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$

. По условию $x + y = 2$, следовательно, $\frac{4}{4} \geq xy$, то есть $xy \leq 1 \Rightarrow x^2 y^2 \leq 1$.

Кроме того,

$$x + y = 2 \Rightarrow x \leq 2, y \leq 2, x^2 \leq 4, y^2 \leq 4, x^4 \leq 16, y^4 \leq 16.$$

В этом случае (см. предыдущую задачу):

$$x^4 \cdot y^2 + x^2 y^4 \leq x^4 y^4 + x^2 y^2,$$

$$x^2 y^2 \cdot (x^2 + y^2) \leq (x^2 y^2 + 1) \cdot x^2 y^2 \leq (1+1) \cdot 1 = 2.$$

Задача 12. Для любых положительных чисел a, b, c доказать, что справедливо неравенство:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Пусть $x = a + b$, $y = b + c$, $z = a + c$, тогда левая часть данного неравенства примет вид:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3 \right),$$

$$\text{а так как } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2, \text{ то } S \geq \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}.$$

Задача 13. Верно ли, что для любых чисел $0 < a < b$ выполнено неравенство: $(a+b)^6 < 32(a^6 + b^6)$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{(a+b)^6}{32(a^6 + b^6)} < 1$. Рассмотрим



функцию $f(x) = \frac{(x+b)^6}{32(x^6+b^6)}$, непрерывную на $x=(0;+\infty)$ при $x \in (0; b]$. Найдем производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6(x+b)^5 \cdot 32(x^6+b^6) - 32 \cdot 6x^5(x+b)^6}{32^2(x^6+b^6)^2} = \\ &= \frac{6(x+b)^5 \cdot ((x^6+b^6) - x^5(x+b))}{32(x^6+b^6)^2} = \frac{6(x+b)^5 \cdot ((x^6+b^6) - x^5(x+b))}{32(x^6+b^6)^2} = \\ &= \frac{6(x+b)^5 \cdot (b^6 - x^5b)}{32(x^6+b^6)^2} = \frac{6b(x+b)^5 \cdot (b^5 - x^5)}{32(x^6+b^6)^2} > 0. \end{aligned}$$

Поскольку производная положительна, то функция возрастает, и $f(x) < f(b) = 1$. Следовательно,

$$\frac{(a+b)^6}{32(a^6+b^6)} < 1.$$

Задача 14. Доказать, что при любом натуральном n большем 1 справедливо двойное неравенство: $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Доказательство (метод математической индукции).

База: при $n = 2$ неравенство $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ очевидно.

Предположение индукции: пусть для $n = k$ утверждение верно, то есть $\sqrt{k} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$.

Индукционный переход: докажем истинность утверждения для $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ \frac{\sqrt{k^2+k+1}}{\sqrt{k+1}} &< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2\sqrt{k^2+k+1}}{\sqrt{k+1}}, \end{aligned}$$

откуда получим

$$\frac{k+1}{\sqrt{k+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2k+2}{\sqrt{k+1}}.$$

Здесь воспользовались неравенством $k < \sqrt{k^2+k} < k + \frac{1}{2}$, которое можно проверить непосредственным возведением в квадрат. Сокращая, получим требуемое неравенство:

$$\sqrt{k+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

Таким образом, утверждение верно для любых $n > 1$.

Задача 15. Доказать, что при натуральном $n > 1$ и $|x| < 1$ справедливо неравенство $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$.

Доказательство (метод математической индукции).

База. При $n = 2$ неравенство верно. Действительно, имеет

$$(1-x)^2 + (1+x)^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 + 2x + x^2 = 2 + 2x^2 < 2^2.$$

Предположение. Пусть неравенство верно при $n = k$:

$$(1-x)^k + (1+x)^k < 2^k.$$



Индукционный переход. Докажем для $n = k + 1$:

$$(1-x)^{k+1} + (1+x)^{k+1} < ((1-x)^k + (1+x)^k) \cdot ((1-x) + (1+x)) < 2^k \cdot 2;$$

$$(1-x)^{k+1} + (1+x)^{k+1} < 2^{k+1}.$$

Неравенство доказано для любого натурального $n > 1$.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

В элементарной теории чисел существует богатейшее разнообразие задач и методов их решения, и перечислить их все не представляется возможным. К основным приемам относятся:

- разложение чисел на простые множители (основная теорема арифметики);
- изучение остатков от деления на некоторое число;
- перебор всех различных возможностей;
- метод математической индукции.

Задача 16. Доказать, что число $(1000^{2020} - 1)$ является составным.

Доказательство.

Заметим, что число 1000^{2020} содержит 1 и 6060 нулей, при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6060 девяток. Оно делится на 9, следовательно, является составным.

Задача 17. Вычислите $(99 \dots 9)^2$, если в записи числа $99 \dots 9$ имеется n девяток.

Решение. $99 \dots 9 = 100 \dots 0 - 1 = 10^n - 1$.
 n девяток n нулей

$$\left(99 \dots 9 \right)^2 = (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = 99 \dots 9 \ 800 \dots 01$$
 n девяток $n-1$ девятка $n-1$ ноль

Замечание. Попробуйте доказать это по методу математической индукции.

Задача 18. Доказать, что сумма произведения четырех последовательных целых чисел и единицы есть точный квадрат.

Решение. Обозначим наименьшее из этих чисел n , тогда:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

Задача 19. Существует ли представление числа 5^{2020} в виде произведения $x^{17} \cdot y^{59}$ для натуральных x, y ?

Решение. Такое представление существует (и не единственное). Для его построения представим 2020 в виде какой-нибудь линейной комбинации чисел 17 и 59, например, имеет

$$2020 = 39 \cdot 17 + 23 \cdot 59.$$

$$\text{Тогда } 5^{2020} = 5^{39 \cdot 17 + 23 \cdot 59} = 5^{39 \cdot 17} \cdot 5^{23 \cdot 59} = (5^{39})^{17} \cdot (5^{23})^{59}.$$

$$\text{Ответ. } x = 5^{39}; y = 5^{23}.$$

Замечание. Верно ли, что всякое натуральное число n можно представить в виде $n = ak + bl$ для любых $k, l \in \mathbb{N}$, если $a, b \in \mathbb{Z}$?

Задача 20. Решить в натуральных числах уравнение $28x + 30y + 31z = 365$.

Решение. Уравнение имеет очевидное решение $x=1, y=4, z=7$ (365 дней в году складываются из 28 дней февраля, 30 дней апреля, июня, сентября и ноября и 31 дня января, марта, мая, июля, августа, октября и декабря).

В силу натуральности неизвестных и условия $28x + 30y + 31z = 365$ выполнены неравенства



$1 \leq x \leq 11, 1 \leq y \leq 10, 1 \leq z \leq 10$. Покажем, что сумма $x + y + z = 12$. Предположим противное, тогда $x + y + z \leq 11$ или $x + y + z \geq 13$.

Если $x + y + z \leq 11$, то

$$28x + 30y + 31z \leq 31x + 31y + 31z = 31(x + y + z) \leq 31 \cdot 11 = 341 < 365$$

Если $x + y + z \geq 13$, то

$$28x + 30y + 31z = 28(x + y + z) + 2y + 3z \geq 28 \cdot 13 + 5 = 369 > 365.$$

Рассмотрим теперь остатки от деления на 5 левой и правой частей уравнения $28x + 30y + 31z = 365$. Так как 30 и 365 делятся на 5 без остатка, а коэффициенты 28 и 31 дают остатки 3 и 1, то $3x + z$ делится на 5, то есть $3x + z = 5k$.

Перебором значений x и k находим

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow z = 2; 7, \text{ тогда } \begin{cases} x = 1, y = 10, z = 2; \\ x = 1, y = 4, z = 7; \end{cases} \\ x = 2 &\Rightarrow z = 4; 9, \text{ тогда } \begin{cases} x = 2, y = 6, z = 4; \\ x = 2, y = 1, z = 9; \end{cases} \\ x = 3 &\Rightarrow z = 1; 6, \text{ тогда } \begin{cases} x = 3, y = 8, z = 1; \\ x = 3, y = 3, z = 6; \end{cases} \end{aligned}$$

и так далее.

Учитывая, что z должно быть нечетным (коэффициенты 28 и 30 – четные, 31 и 365 – нечетные), и подставляя в исходное уравнение, получим второе решение $x = 2, y = 1, z = 9$.

Ответ. $x = 1, y = 4, z = 7$ или $x = 2, y = 1, z = 9$.

Задача 21. Решить в целых числах уравнение

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

Ответ. $(1, 4, 7), (2, 1, 9), (-1, 10, 3), (10, 8, -5), (0, 7, 5)$.

Задача 22. На круизном лайнере находится от 250 до 400 путешественников. Если рассадить их в спасательные шлюпки, вмещающие 15 человек, то семерым не хватит места, а если разместить путешественников на плотках, рассчитанных на 25 человек, то останется 8 свободных мест. Сколько всего путешественников на лайнере?

Решение. Пусть a – число путешественников. По условию:

$$\begin{cases} a = 15k + 7 = 15(k + 1) - 8; \\ a = 25l - 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 8) : 15; \\ (a + 8) : 25. \end{cases} \Rightarrow (a + 8) : 75.$$

Число $a + 8$ следует искать среди чисел, кратных 75: 225, 300, 375, 450, ..., откуда $a = 292, 367$.

Ответ. $a = 292, 367$.

Задача 23. Из книги объемом менее 500 страниц вырвали один лист. Сумма цифр номера страницы с одной стороны равна 10, а с другой – 11. Если из меньшего номера вычесть единицу, то оно будет делиться на 10, а если к большему добавить единицу, то оно будет делиться на 11. Найти номера страниц на вырванном листе.

Решение. Искомые номера – это подряд идущие натуральные числа, а значит, одно из них четное. По условию, если из меньшего числа вычесть 1, оно будет делиться на 10, следовательно, большее число четное и оканчивается на 2. Кроме того, после его увеличения на 1 оно будет делиться на 11 и оканчиваться цифрой 3. Рассмотрим числа, делящиеся на 11, оканчивающиеся цифрой 3 и меньшие 500. Такими числами будут 33 и 363, а по условию задачи в искомом числе сумма цифр равна 11, следовательно, номера страниц равны 361 и 362.

Ответ. 361 и 362.

Задача 24. В турнире участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый сыграл с каждым один



раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, нежели все десятиклассники. Сколько очков набрал самый успешный десятиклассник?

Решение. Пусть в турнире приняло участие a десятиклассников, которые заработали b очков. Тогда играли $10a$ одиннадцатиклассников, которые заработали $4,5b$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11a$ игроков играют $\frac{11a(11a-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение

$$11a(11a-1) = 5,5b, \text{ откуда } b = 2a(11a-1).$$

Каждый участник играет $11a-1$ партий. Значит, каждый десятиклассник может набрать максимум $2(11a-1)$ очков, если выиграет все игры. Так как a десятиклассников набрали $2a(11a-1)$, они выиграли все свои игры.

Если в турнире участвовало хотя бы два десятиклассника, то в игре между собой один из них не выиграл – противоречие. Значит, был только один десятиклассник, т. е. $a = 1$. Он набрал

$$2(11a-1) = 20 \text{ очков.}$$

Ответ. 20.

Задача 25. В шахматном турнире участвовали два ученика 9-го класса и несколько учеников 10-го класса. Каждый ученик играл с каждым из остальных участников турнира один раз. Два девятиклассника вместе набрали 8 очков, а все десятиклассники набрали по одному числу очков. Сколько десятиклассников участвовало в турнире? (При игре в шахматы за победу дается 1 очко, за ничью – 0.5 очка, за проигрыш – 0 очков)

Решение. Обозначим за x число десятиклассников, а за y - число очков, набранных каждым из них. Тогда число очков, набранных всеми участниками турнира, равно $xy + 8$. Оно равно числу сыгранных партий, так как за одну партию дают одно очко. Число сыгранных партий найдем по формуле сочетаний без повторов:

$$C_{(x+2)}^2 = \frac{(x+1)(x+2)}{2},$$

тогда

$$xy + 8 = \frac{(x+1)(x+2)}{2}.$$

Отсюда

$$x(x-2y+3) = 14.$$

Перебором находим, что $x=7$ или $x=14$.

Ответ. 7 или 14.

Задача 26. Указать какую-либо пару натуральных чисел (a, b) такую что:

а) число $ab(a+b)$ не делится на 7;

б) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ делится на 7^7 .

Решение. Используя формулу бинома Ньютона, нетрудно доказать тождество

$$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Остается подобрать числа a и b так, чтобы выражение $a^2 + ab + b^2$ делилось на $7^3 = 343$. Например, $a = 18$, $b = 1$.

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ЗАДАЧИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ

Задача 27. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте.



Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:

1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина - на третий;

2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.

На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа: на второй или на третий?

Решение. Обозначим n_{12} количество поездок с первого этажа на второй. Аналогично определим числа n_{13} , n_{21} , n_{23} , n_{31} , n_{32} . Все поездки разобьём на три группы: поездки на третий этаж, поездки с третьего этажа и поездки между первым и вторым этажом. По условию задачи первая группа составляет менее трети всех поездок. С другой стороны, она количественно равна второй, так как число покупателей, приехавших на третий этаж равно числу уехавших с третьего этажа. Значит, последняя группа составляет более трети всех поездок:

$$(n_{31} + n_{32}) = (n_{13} + n_{23}) < (n_{12} + n_{21}).$$

Подставляя в это неравенство $n_{21} = n_{23}$, получим $n_{13} < n_{12}$: с первого этажа чаще ездили на второй, нежели на третий.

Ответ. С первого на третий этаж за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

Задача 28. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. А, В и С — жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. А и В сказали следующее:

А: — В по рангу выше, чем С.

В: — С по рангу выше, чем А.

Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу — А или В?»

Решение. Переберем варианты, кем может быть житель А.

Если А — рыцарь, то В — обычный человек, а С — лжец и С ответит: «В».

Если А лжец, то С рыцарь, а В — обычный человек, и С также ответит: «В».

Наконец, если А — обычный человек, то В не может быть ни рыцарем (иначе С тоже был бы рыцарем, а это невозможно), ни обычным человеком, значит он лжец, но тогда С тоже лжец, что невозможно. Значит, А не может быть обычным человеком. Таким образом, С всегда ответит: «В».

Ответ. В.

Задача 29.

Поезда А и В встречаются на перегоне во второй половине дня. Поезд А прибывает на перегон между 18:30 и 19:30 часами, стоит 10 минут и уезжает. Поезд В может прибыть в произвольное время с 18:30 до 19:20, тоже стоит 10 минут и уезжает. Какова вероятность того, что поезда не встретятся на перегоне?

Решение. Изобразим графически время прибытия поездов. Время прибытия поезда А будем откладывать по оси Х, а время прибытия поезда В — по оси Y.

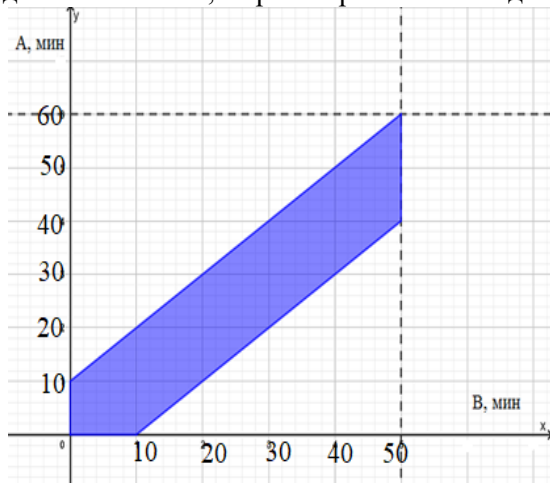


Рис.1.



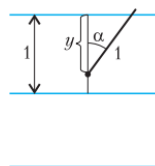
Закрашенная фигура – это множество всех возможных вариантов времени, при которых поезда встретятся. Вероятность искомого события равна отношению всех возможных вариантов времени прибытия, удовлетворяющие условию встречи, к множеству всех возможных прибытий. Численно данная вероятность будет равна отношению площади закрашенной фигуры к площади прямоугольника 5×6 . Если считать площадь по клеткам, то получим $P(A) = \frac{19}{60}$. Следовательно, вероятность того, что поезда не встретятся равна $1 - P(A) = 1 - \frac{19}{60} = \frac{41}{60}$

Ответ. $\frac{41}{60}$.

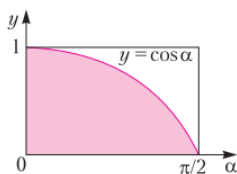
Задача 30 (Задача Бюффона). Плоскость разлинована на полосы шириной 1. На неё бросают иглу (отрезок) длиной 1. Какова вероятность, что игла пересечёт одну из линий?

Решение. Положение иглы (смещение её вдоль линий не учитывается) определяется двумя параметрами: расстоянием y конца иглы от верхнего края полосы, в которую он попал ($0 < y < 1$), и углом α иглы с прямой, перпендикулярной линиям – см. рис. 2 а. По соображениям симметрии можно считать, что $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Условие, при котором игла пересекает край полосы: $y < \cos \alpha$. Таким образом, среди точек (α, y) в прямоугольнике $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 1$, мы должны выбрать те, которые лежат ниже линии $y = \cos \alpha$ (рис.2 б) и найти отношение площади S полученной фигуры к площади прямоугольника (равной $\frac{\pi}{2}$).

а)



б)



в)

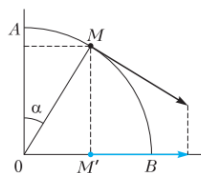


Рис.2.

С помощью интеграла находим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$ и искомая вероятность равна $\frac{2}{\pi}$. Этот же результат можно получить и с помощью механики. Пусть точка равномерно с единичной скоростью проходит дугу AB в $\frac{1}{4}$ круга радиуса 1 (рис.2 в). Когда точка M находится в положении α на дуге ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), скорость её проекции M' на радиус OB равна $\cos \alpha$. Тогда площадь S под графиком движения точки по окружности равна пройденному точкой M' пути: $S = OB = 1$, искомая вероятность $\frac{2}{\pi}$.

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

При решении задач по тригонометрии не следует забывать об области определения, особенно, если в них используются тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс. Кроме того знание графиков этих функций часто оказывается очень полезным.



Задача 31. Решить уравнение

$$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}.$$

Решение. Областью определения функции $\arcsin x$ является интервал $[-1; 1]$, следовательно,

$$\begin{cases} -1 \leq \sqrt{1-x} \leq 1; \\ -1 \leq \frac{2}{3\sqrt{x}} \leq 1; \\ x > 0; \quad 1-x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1; \\ x \geq \frac{4}{9}; \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{то есть } x \in \left[\frac{4}{9}; 1\right].$$

Таким образом, неизвестная принадлежит первой четверти. Возьмем синус от обеих частей уравнения:

$$\sin \left(\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} \right) = \sin \arcsin \frac{1}{3}.$$

По формуле синуса разности имеем

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \cos \arcsin \sqrt{1-x} - \sqrt{1-x} \cos \arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}.$$

Применив основное тригонометрическое тождество, упростим полученное равенство:

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \sqrt{1-\sqrt{1-x}^2} - \sqrt{1-x} \sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \sqrt{\frac{9x-4}{9x}} = \frac{1}{3}; \quad \sqrt{\frac{(9x-4)(1-x)}{9x}} = \frac{1}{3},$$

$$\text{откуда имеем } \frac{(9x-4)(1-x)}{x} = 1; \quad -9x^2 + 12x - 4 = 0.$$

$$\text{Корни этого уравнения равны } x_{1,2} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ. } x_{1,2} = \frac{2}{3}$$

Задача 32. Решить неравенство

$$\frac{4 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} + 1}{\left(\frac{1}{2} - \cos x \right)^2} > 0.$$

Найдем ОДЗ:

$$\frac{1}{2} - \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку знаменатель положителен, исходное неравенство сводится к неравенству вида $4 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} + 1 > 0$.

Воспользуемся формулой:

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$$

Найдем

$$2(\sin x + \sin(-2\pi/3)) + \sqrt{3} + 1 > 0$$

или

$$2 \sin x - 2\sqrt{3}/2 + \sqrt{3} + 1 > 0 \Rightarrow \sin x > -1/2 \quad (\text{рис. 1}) \Rightarrow$$

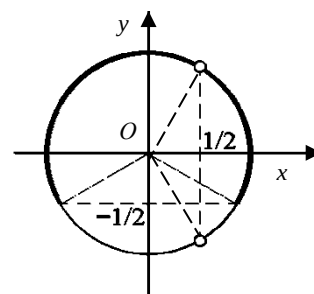


Рис.1



$$\Rightarrow x \in (2\pi k - \pi/6; 2\pi k + 7\pi/6).$$

С учетом ОДЗ получим

$$x \in (2\pi k - \pi/6; 2\pi k + \pi/3) \cup \\ \cup (2\pi k + \pi/3; 2\pi k + 7\pi/6), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } x \in (2\pi k - \pi/6; 2\pi k + \pi/3) \cup \\ \cup (2\pi k + \pi/3; 2\pi k + 7\pi/6), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 33. Вычислить значение выражения

$$\cos 260^\circ \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 160^\circ.$$

Решение. Преобразуем данное выражение и воспользуемся формулами приведения:

$$\cos 260^\circ \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 160^\circ =$$

$$= \cos(270^\circ - 10^\circ) \cdot \sin(180^\circ - 50^\circ) \cdot \cos(180^\circ - 20^\circ) =$$

$$= -\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot (-\cos 20^\circ) = (\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ) \cdot \cos 20^\circ =$$

(по формуле произведения синусов)

$$= \frac{1}{2} (\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \left(\cos 40^\circ - \frac{1}{2} \right) \cos 20^\circ =$$

$$= \frac{2 \cos 40^\circ - 1}{4} \cdot \cos 20^\circ = \frac{2 \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 20^\circ}{4} =$$

(по формуле произведения косинусов)

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (\cos 20^\circ + \cos 60^\circ) - \cos 20^\circ}{4} = \frac{\cos 60^\circ}{4} = \frac{1}{8}.$$

Ответ. 1/8.

Задача 34. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x.$$

Решение. ОДЗ уравнения $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x$ определяется неравенствами

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x \neq \pi l, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ = \frac{-2\sin^2 x \cos^2 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 + \frac{4}{\sin^2 2x}.$$



Очевидно, что наименьшее значение левой части уравнения равно 2 и достигается при $\sin^2 2x = 1$, откуда

$$2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Правая часть уравнения представляет собой квадратный трехчлен и достигает наибольшего значения, равного 2, при условии $(4x - \pi)^2 = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{4}$.

Сравнивая полученные результаты, получим, что равенство левой и правой частей уравнения возможно лишь при $x = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4}$.

Замечание. Графическое решение уравнения также приветствуется при условии объяснения построений, например, с помощью элементарных преобразований графиков тангенса и котангенса и их суперпозиции (рис. 4).

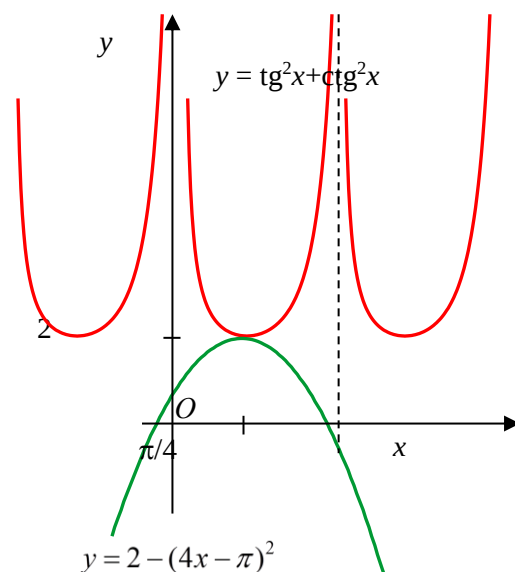


Рис.4

Задача 35. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2). \end{cases}$$

Решение: ОДЗ: $x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = (\sqrt{3} - 2)\sqrt{3},$$

$$\frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} \right)}{\cos x \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \right]} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2).$$

$$\text{Таким образом, } \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)} - \frac{\sqrt{2}}{2} < -1.$$

Ответ. нет решений.

Задача 36. Решить уравнение

$$2|\sin x| \cos(2\pi - x) = \cos^2(7\pi/2 - x).$$

Воспользуемся формулами приведения и тем, что $\sin^2 x = |\sin x|^2$:

$$2|\sin x| \cos x = \sin^2 x \Rightarrow 2|\sin x| \cos x = |\sin x|^2 \Rightarrow |\sin x| (2\cos x - |\sin x|) = 0.$$

$$\text{Получим } |\sin x| = 0 \Rightarrow x = \pi k \text{ или } 2\cos x = |\sin x|.$$

$$\text{Отсюда при } \sin x \geq 0 \text{ имеем } 2\cos x = \sin x, \operatorname{tg} x = 2, \text{ то есть } x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k.$$

$$\text{С учетом условия } \sin x \geq 0 \text{ получим } x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k.$$

$$\text{Аналогично при } \sin x < 0 \text{ имеем } 2\cos x = -\sin x, \operatorname{tg} x = -2 \text{ и } x = -\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k \text{ (с учетом)}$$

условия $\sin x < 0$).

Ответ. $x = \pi k$, $x = \pm \arctg 2 + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 37. Определить количество решений уравнения $x^3 = \sin 3x$.

Построим графики левой и правой частей уравнения $x^3 = \sin 3x$ (рис.5). Очевидно, что графики этих функций пересекаются в начале координат и еще в двух симметричных относительно начала координат точках.

Так как функция $y = x^3$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а функция $y = \sin 3x$ ограничена и периодична (период $T = \frac{2\pi}{3}$), других точек пересечения графиков функций нет.

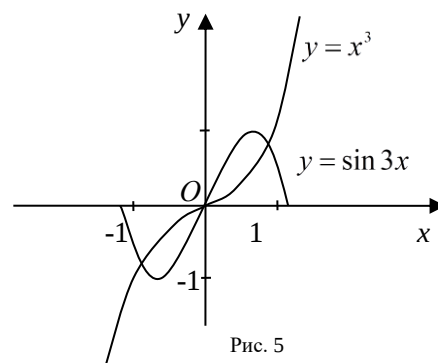


Рис. 5

Ответ. 3.

ПРОГРЕССИИ

Задача 38. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение. Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Общий член прогрессии задается формулой: $a_n = 102 + (n-1) \cdot 6$. Так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102 + (n-1) \cdot 6 \leq 999, \quad n \leq 1 + \frac{999-102}{6} = 1 + \frac{897}{6} = 150,5.$$

Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму, равно $n = 150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии:

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 150 \cdot 102 + \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot 6 = 82305.$$

Ответ. 82305.

Задача 39. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию (рис. 6). Найти острые углы этого треугольника.

Решение: по теореме Пифагора $(aq^2)^2 = a^2 + (aq)^2$, тогда

$$a^2 q^4 = a^2 (1 + q^2) \text{ и}$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$(q^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

$$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{aq^2} = \frac{1}{q^2} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\alpha \in \text{I четв.});$$

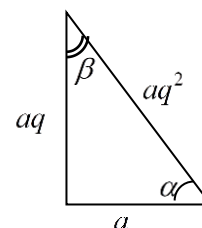


Рис. 6



$$\cos \beta = \frac{aq}{aq^2} = \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

$$\text{Ответ. } \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \arccos \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Задача 40. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5 : 4. Найти количество членов этой прогрессии.

Решение. Пусть a – первый член арифметической прогрессии, через d — разность, через n — количество членов. Тогда сумма первых тринадцати ее членов будет равна:

$$S_{1..,13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = \frac{13(a_1 + a_1 + 12d)}{2} = \frac{13(2a_1 + 12d)}{2} = 13(a_1 + 6d),$$

сумма последних тринадцати членов:

$$S_{n-13..,n} = \frac{13(a_{n-13} + a_n)}{2} = \frac{13(a_1 + (n-13)d + a_1 + (n-1)d)}{2} =$$

$$= \frac{13(2a_1 + (2n-14)d)}{2} = 13(a_1 + (n-7)d);$$

сумма всех членов без первых трех:

$$S_{4..,n} = \frac{(n-3)(a_4 + a_n)}{2} = \frac{(n-3)(a_1 + 3d + a_1 + (n-1)d)}{2};$$

сумма всех членов без последних трех:

$$S_{1..,n-3} = \frac{(n-3)(a_1 + a_{n-3})}{2} = \frac{(n-3)(2a_1 + (n-4)d)}{2}.$$

По условию $2S_{1..,13} = S_{n-13..,n}$, то есть

$$26(a_1 + 6d) = 13(a_1 + (n-7)d).$$

Далее получим

$$\frac{S_{4..,n}}{S_{1..,n-3}} = \frac{5}{4}, \quad 4S_{4..,n} = 5S_{1..,n-3};$$

$$4 \frac{(n-3)(2a_1 + (n+2)d)}{2} = 5 \frac{(n-3)(2a_1 + (n-4)d)}{2};$$

$$4(2a_1 + (n+2)d) = 5(2a_1 + (n-4)d).$$

Решая систему

$$\begin{cases} 13a_1 + (247 - 13n)d = 0; \\ 2a_1 + (n - 28)d = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (19 - n)d = 0; \\ 2a_1 + (n - 28)d = 0, \end{cases} \text{ получим}$$

$(66 - 3n)d = 0$, откуда найдем $n = 22$ (так как по условию $d \neq 0$).

Ответ. 22.

Задача 41. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = 1$. Вычислить $\log_3(a_{2023} + 3)$

Решение. Пусть $x_n = a_n + 3$, тогда $x_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$,

$x_{n+1} = 2x_n$, $x_1 = 4 = 2^2$, $x_1 = 4 = 2^2$, $x_2 = 2^3$, ..., $x_n = 2^{n+1}$, тогда

$$a_n + 3 = 2^{n+1}, \quad \log_3(a_{2023} + 3) = \log_3 2^{2023+1} = 2024 \log_3 2$$

Ответ. $\log_3(a_{2023} + 3) = 2024 \cdot \log_3 2$



Задача 42. Доказать, что $\sqrt{\underset{2n \text{ раз}}{11\dots1} - \underset{n \text{ раз}}{22\dots2}} = \underset{n \text{ раз}}{33\dots3}$.

Решение. По определению десятичной записи числа

$\underset{2n \text{ раз}}{11\dots1} = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + \dots + 1 \cdot 10^{2n-1}$ - это сумма геометрической прогрессии, поэтому

$$\underset{2n \text{ раз}}{11\dots1} = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + \dots + 1 \cdot 10^{2n-1} = \frac{1 \cdot (10^{2n} - 1)}{10 - 1} = \frac{10^{2n} - 1}{9}.$$

Так как $\underset{n \text{ раз}}{22\dots2} = 2 \cdot \underset{n \text{ раз}}{11\dots1}$ и $\underset{n \text{ раз}}{33\dots3} = 3 \cdot \underset{n \text{ раз}}{11\dots1}$, то аналогично получаем

$$\underset{n \text{ раз}}{22\dots2} = 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \quad \text{и} \quad \underset{n \text{ раз}}{33\dots3} = 3 \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\underset{2n \text{ раз}}{11\dots1} - \underset{n \text{ раз}}{22\dots2}} &= \sqrt{\frac{10^{2n} - 1}{9} - 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9}} = \sqrt{\frac{10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2}{9}} = \\ &= \sqrt{\left(3 \cdot \frac{10^n - 1}{9}\right)^2} = \underset{n \text{ раз}}{33\dots3} \end{aligned}$$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Задача 43 (задача Дирака). Представить произвольное натуральное число в виде выражения, в запись которого входят три двойки и произвольные математические символы.

Ответ. $N = -\log_2 \log_2 \sqrt[N]{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}$
 N радикалов

Замечание. $2020 = -\log_2 \log_2 \sqrt[2020]{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}$
2020 радикалов

Задача 44. Сколько членов содержит последовательность

$$a_1 = \ln 1, \quad a_2 = \ln \ln 2, \quad a_3 = \ln \ln \ln 3, \dots, \quad a_n = \underset{n \text{ раз}}{\ln \ln \dots \ln n} \dots ?$$

Решение. Найдем область определения $a_n = \underset{n \text{ раз}}{\ln \ln \dots \ln n}$:

$$\begin{cases} n > 0; \\ \ln n > 0; \\ \ln \ln n > 0; \\ \ln \ln \ln n > 0; \\ \ln \ln \ln \ln n > 0; \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n > 0; \\ n > 1; \\ n > e; \\ n > e^e; \\ n > e^{e^e}; \\ \vdots \end{cases}$$

Эти неравенства выполнены для $n = 1, 2, 3$, при $n = 4$ не выполняется условие $4 > e^e \approx 15$.

Задача 45. Доказать, что $\frac{1}{2020} < \ln \frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019}$.



Решение. $\ln \frac{2020}{2019} = \ln \left(1 + \frac{1}{2019} \right)$. На графике (рис.7) видно, что $\ln(1+x) < x$, но можно проверить этот факт и аналитически. Составим разность

$f(x) = \ln(1+x) - x$ и вычислим производную:

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}. \quad \text{На интервале } (-1; 0)$$

производная положительна, при $x > 0$ – отрицательна, следовательно, $x = 0$ – точка максимума разности, и $f(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$, а значит, в остальных точках области определения разность $\ln(1+x) - x$ меньше 0.

Следовательно, $\ln(1+x) < x$, и $\ln \frac{2020}{2019} = \ln \left(1 + \frac{1}{2019} \right) < \frac{1}{2019}$.

С другой стороны, $-\ln \frac{2020}{2019} = \ln \frac{2019}{2020} = \ln \left(1 + \left(-\frac{1}{2020} \right) \right) < -\frac{1}{2020}$, следовательно, $\ln \frac{2020}{2019} > \frac{1}{2020}$.

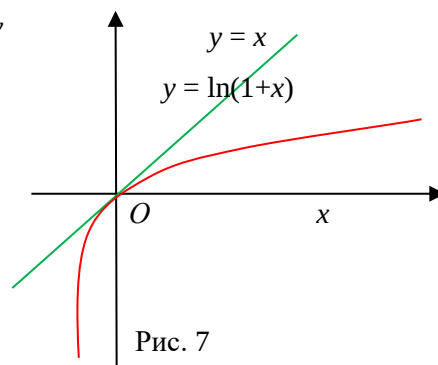


Рис. 7

Задача 46. Решить уравнение $2 - \log_{\sin x} \cos x = \log_{\cos x} \sin x$.

Решение. Уравнение определено при $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\sin x \neq 1$, $\cos x \neq 1$.

Приведем логарифм в правой части уравнения к основанию $\sin x$:

$$2 - \log_{\sin x} \cos x = 1/(\log_{\sin x} \cos x).$$

После преобразований получим:

$$(\log_{\sin x} \cos x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log_{\sin x} \cos x = 1.$$

После потенцирования будем иметь:

$$\cos x = \sin x, \quad x = \pi/4 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Среди полученных значений ОДЗ удовлетворяют только решения вида $x = \pi/4 + 2k\pi$.

Ответ. $x = \pi/4 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Задача 47. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$.

Решение. Найдем область определения:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0; \\ x-1 \neq 1; \\ \log_{x-1} 9 > 0; \\ \log_2 \log_{x-1} 9 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0; \\ x \neq 2; \\ \log_{x-1} 9 > \log_{x-1} 1; \\ \log_{x-1} 9 > 1, \end{cases}$$

но так как неравенство $\log_{x-1} 9 > \log_{x-1} 1$ может выполняться только при $x-1 > 1$, то окончательно область определения:

$$\begin{cases} x > 1; \\ x \neq 2; \\ x-1 > 1; \\ \log_{x-1} 9 > \log_{x-1}(x-1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1; \\ x \neq 2; \\ x > 2; \\ x-1 < 9. \end{cases} \Rightarrow x \in (2, 10).$$

Исходное неравенство:



$$\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > \log_{\frac{1}{2}} 1.$$

Поскольку основание логарифма меньше единицы, при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный:

$$\log_2 \log_{x-1} 9 < 1 \Leftrightarrow \log_2 \log_{x-1} 9 < \log_2 2 \Leftrightarrow \log_{x-1} 9 < 2.$$

Знак неравенства сохраняется, так как основание логарифма больше единицы. Тогда имеем

$$\log_{x-1} 9 < \log_{x-1} (x-1)^2, \quad 9 < (x-1)^2 \Leftrightarrow 9 - (x-1)^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$

$$(x-1)^2 - 3^2 > 0 \Rightarrow (x-1-3)(x-1+3) > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2) > 0.$$

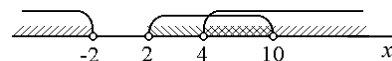


Рис. 8

С учетом области определения (рис.8) $x \in (4; 10)$.

Ответ. $x \in (4; 10)$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Задача 48. Функция $y = f(x)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет для некоторого числа $k \neq 0$ соотношению $f(x+k) \cdot (1-f(x)) = 1 + f(x)$. Доказать, что $y = f(x)$ - периодическая функция и найти период.

Решение. По условию $f(x+k) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Тогда $f(x+2k) = -\frac{1}{f(x)}$, тогда

$$f(x+4k) = -\frac{1}{f(x+2k)} = f(x) \text{ - значит функция периодическая, период } 4k.$$

Задача 49. Функция $f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ и $f(x) \geq x$. Найти все такие функции $f(x)$.

Решение. Из неравенства $f(x) \geq x$ при $x=0$ следует, что $f(0) \geq 0$, а из $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ при $y=0$ следует, что $f(x+0) \geq f(x) + f(0)$. Тогда $0 \geq f(0)$, а значит $f(0) = 0$.

$$\text{При } y = -x: f(x+(-x)) \geq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow 0 \geq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -f(-x) \geq f(x).$$

По свойствам функции $f(x): f(-x) \geq -x \Leftrightarrow -f(-x) \leq x$, тогда

$x \geq -f(-x) \geq f(x) \Rightarrow x \geq f(x)$. Учитывая условие $f(x) \geq x$, получаем $f(x) = x$ (для всех $x \in \mathbb{R}$).

Ответ. $f(x) = x$.

Задача 50. Для функции $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ найти значение суммы S :

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f(1).$$

Решение. $f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = 1$, тогда рассмотрим выражение $2S$:



$$\begin{aligned}
2S &= S + S = f(0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f(1) + \\
&+ f(1) + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right) + \dots + f(1) + f(0) = \\
&= f(0) + f(1-0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(1-\frac{1}{2023}\right) + \dots + f(1) - f(0) = 2024 \\
\Rightarrow S &= \frac{2024}{2} = 1012 \\
\text{Ответ. } S &= 1012
\end{aligned}$$

Задача 51. Функция $f(x)$ задана при всех вещественных x и при всех вещественных x удовлетворяет неравенству $\sqrt{2f(x)} - \sqrt{2f(x) - f(2+x)} \geq 2$. Доказать, что для каждого вещественного числа x выполняется неравенство $f(x) \geq 4$.

Решение. Возводя неравенство

$$\begin{aligned}
\sqrt{2f(x)} &\geq 2 + \sqrt{2f(x) - f(2+x)} \\
\text{в квадрат, приходим к неравенству} \\
2f(x) &\geq 4 + 2\sqrt{2f(x) - f(2+x)} + 2f(x) - f(2+x) \Leftrightarrow \\
f(2+x) &\geq 4 + 2\sqrt{2f(x) - f(2+x)} \Rightarrow \\
f(2+x) &\geq 4,
\end{aligned}$$

а так как x - произвольное число, то для каждого вещественного числа x будет выполняться $f(x) \geq 4$.

Задача 52.

Функция f такова, что

$$f(2x-3y) - f(x+y) = -2x+8y$$

для всех x, y . Найти всевозможные значения выражения

$$\frac{f(5t) - f(t)}{f(4t) - f(3t)}.$$

Решение. Подставим в функциональное соотношение $y = -x$: $f(5x) - f(0) = -10x$. Стандартный прием. Функциональное уравнение верно при всех значениях неизвестных (неизвестной), поэтому можем подставлять любые их значения. Если неизвестных 2 или больше, часто работает метод уничтожения одной из них. Замена $5x = t \Rightarrow f(t) = -2t + f(0)$ для всех t , $f(0)$ - постоянное число. Преобразовали равенство до такого вида, когда легко посчитать значение дробного выражения.

$$\text{Тогда, } f(5t) = -10t + f(0) \Rightarrow f(5t) - f(t) = -8t.$$

$$\text{Аналогично, } f(4t) - f(3t) = -2t.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{f(5t) - f(t)}{f(4t) - f(3t)} = 4.$$

Ответ: 4.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Задача 53. Три пиццы диаметром 4 дециметра каждая упакованы в треугольную коробку. Найти наименьшую площадь коробки, если пиццы попарно соприкасаются, но не перекрывают друг друга.

Решение. Радиус $r = 2$ дм; круги равны $\Rightarrow \triangle ABC$ – правильный треугольник $\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ (рис.9).

$DG \perp AC$ (радиус перпендикулярен касательной), $DG = r \Rightarrow$ из $\triangle ADG$ гипотенуза $AD = 2r$ (катет, лежащий против угла 30° , равен половине гипотенузы).

$AG = r\sqrt{3}$ (теорема Пифагора) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = AG + GH + HC = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r(1 + \sqrt{3})$.

Окончательно получим:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(AC)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2(1 + \sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 2r^2(2\sqrt{3} + 3).$$

Ответ. $8(2\sqrt{3} + 3)$ дм².

Задача 54. Через квадрат $ABCD$ проведены 9 прямых, каждая из которых проходит через противоположные стороны и разбивает его на пару четырехугольников, причем один из четырехугольников имеет площадь, в полтора раза большую, чем другой. Доказать, что внутри квадрата имеется хотя бы одна точка, через которую проходят три прямые.

Решение. По формуле площади трапеции (для прямоугольников эта формула также верна):

$$S_{ABEF} = \frac{BE + AF}{2} \cdot AB = GK \cdot AB;$$

$$S_{FECD} = \frac{FD + EC}{2} \cdot CD = KH \cdot AB;$$

$$\frac{S_{FECD}}{S_{ABEF}} = 1,5 \Rightarrow KH = 1,5GK.$$

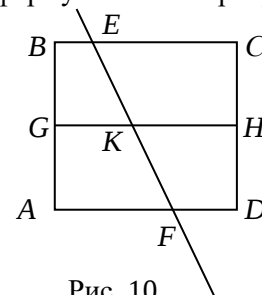


Рис. 10

Таким образом, каждая из прямых проходит через точку К, либо через симметричную ей относительно центра квадрата, либо через одну из двух таких точек на второй средней линии квадрата (рис. 10). Девять прямых проходят через четыре точки, следовательно, по принципу Дирихле хотя бы через одну из точек проходит не менее трех прямых.

Задача 55. Участок земли имеет форму трапеции $ABCD$. На участке необходимо выделить три ландшафтные зоны. Для этого провели прямую MN , соединяющую середины боковых сторон участка и прямые AN , DM , MC и BN (см. рис. 11). Площадь участков BKC и AFD известна $S_{BKC} = S_1 = 2$, $S_{AFD} = S_2 = 4$. Найти площадь участка $MKNF$.

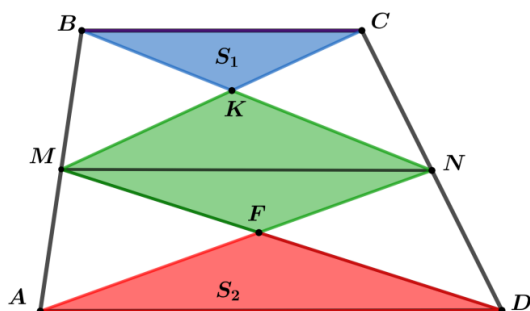
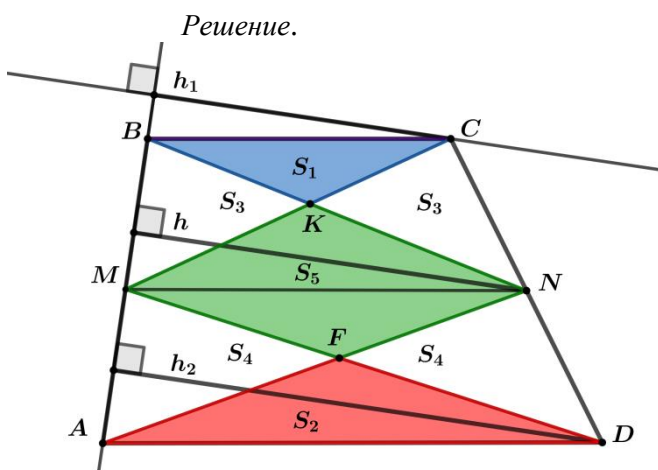


Рис.11



$$1) S_{\Delta MBK} = S_{\Delta CKN} = S_3, \text{ так как } S_{\Delta MBN} = S_{\Delta MCN}. \text{ Аналогично } S_{\Delta AFM} = S_{\Delta DFN} = S_4.$$

Введём обозначения:

$d(N; AB) = h$ - расстояние от точки N до стороны AB,

$d(C; AB) = h_1$ - расстояние от точки C до стороны AB,

$d(D; AB) = h_2$ - расстояние от точки D до стороны AB,

$S(MKNF) = S_5$.

Тогда $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ (как средняя линии трапеции),

$$S_{\Delta ABN} = \frac{1}{2} h AB = \frac{h_1 + h_2}{4} \cdot AB = \frac{1}{4} h_1 AB + \frac{1}{4} h_2 AB.$$

$$\text{Так как } S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} h_1 \cdot MB = \frac{1}{2} h_1 \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{4} h_1 \cdot AB \quad \text{и}$$

$$S_{\Delta MAD} = \frac{1}{2} h_2 \cdot AM = \frac{1}{2} h_2 \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{4} h_2 \cdot AB,$$

то $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta MBC} + S_{\Delta MAD}$.

Так как $S_{\Delta ABN} = S_3 + S_4 + S_5$, $S_{\Delta MBC} = S_3 + S_1$, $S_{\Delta MAD} = S_4 + S_2$, получим $S_3 + S_4 + S_5 = S_3 + S_1 + S_4 + S_2$, $S_5 = S_1 + S_2 = 2 + 4 = 6$.

Ответ: $S(MKNF) = 6$

Задача 56. По круглой цирковой арене радиуса 10 м, бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов его поворотов не меньше 2998 радиан.

Решение. Обозначая траекторию движения льва $A_1 A_2 \dots A_n$, распрямим ее следующим образом. Повернем относительно точки A_2 арену цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_3 попала на луч $A_1 A_2$. Затем повернем относительно точки A_3 арену цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_4 попала на луч $A_1 A_2$ и т. д. Центр O арены цирка переходит при этом последовательно в точки $O_1 = O, O_2, \dots, O_{n-1}$; точки $A_1, \dots, A_n$ переходят в точки $A'_1, \dots, A'_n$, лежащие на одной прямой (рис. 12).

Если обозначить α_{i-1} - угол поворота льва в точке A'_i ,

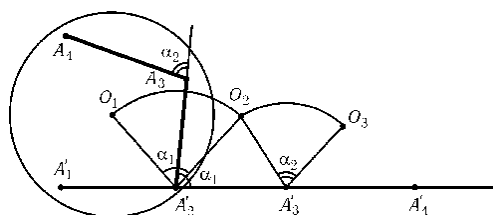


Рис. 12

то $\angle O_{i-1}A_iO_i = \alpha_{i-1}$ и $A_i'O_{i-1} = A_i'O_i \leq 10$, поэтому $O_iO_{i-1} \leq 10\alpha_{i-1}$.

Следовательно, имеем

$$30000 = A_1'A_n' = A_1'O_1 + O_1O_2 + \dots + O_{n-2}O_{n-1} + O_{n-1}A_n' \leq$$

$$\leq 10 + 10(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2}) + 10, \text{ откуда получим}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2} \leq \frac{29980}{10} = 2998.$$

Задача 57 (задача Фаньяно). Вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника.

Решение. С помощью движений плоскости попробуем выстроить стороны вписанного треугольника в ломаную линию. Тогда периметр будет не меньше отрезка, соединяющего концы этой ломаной. А наименьший периметр будет соответствовать случаю, когда стороны ломаной лежат на одной прямой.

Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC

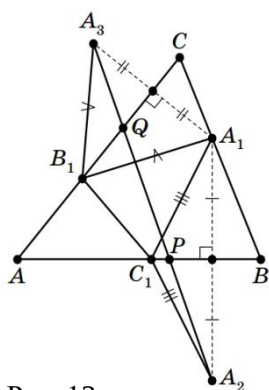


Рис. 13

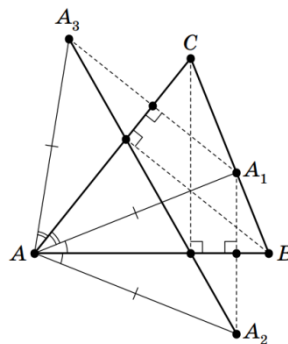


Рис. 14

(A_1 — на стороне BC и т. д. (рис. 13)). Отразим точку A_1 симметрично относительно сторон AB и AC , получив точки A_2 и A_3 соответственно.

Длина трёхзвенной ломаной $A_3B_1C_1A_2$ равна периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Для того, чтобы периметр был наименьшим (равным отрезку A_2A_3), $ABCA_1A_2A_3$ нужно, чтобы вершины B_1 и C_1 лежали в точках пересечения отрезка A_2A_3 со сторонами треугольника AB и AC . Осталось понять, как выбрать точку A_1 на стороне BC таким образом, чтобы длина отрезка A_2A_3 была наименьшей. Для этого заметим, что треугольник A_2AA_3 — равнобедренный ($A_3A = A_2A = A_1A$), а угол при его вершине A равен $2\angle BAC$ и потому не зависит от выбора точки A_1 .

Итак, при движении точки A_1 по стороне BC углы треугольника A_2AA_3 не меняются. А его линейные размеры будут наименьшими, когда наименьшей будет сторона A_2A , которая равна A_1A . Значит, A_1A — высота, опущенная на сторону BC . Далее видим, что существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра, его вершина A_1 — основание высоты (рис. 14).

Если провести те же рассуждения с вершинами B_1 и C_1 , получим, что они также являются основаниями высот (поскольку треугольник минимального периметра — единственный).



ФИЗИКА

Олимпиада по физике проводится в письменной форме. Задания, включенные в билеты олимпиады, предполагают подготовленность участников по вопросам из следующих разделов курса физики.

1. Механика (*кинематика, динамика, статика, законы сохранения в механике, механические колебания и волны*).

Кинематика. Механическое движение и его виды. Относительность механического движения. Скорость. Ускорение. Равномерное и равнопеременное, прямолинейное и криволинейное движение. Свободное падение (ускорение свободного падения). Движение по окружности с постоянной по модулю скоростью. Центростремительное ускорение. Движение тела, брошенного вертикально вверх, горизонтально и под углом к горизонту.

Динамика. Инерциальные системы отсчета. Масса тела. Плотность вещества. Сила. Первый, второй и третий законы Ньютона. Принцип относительности Галилея. Принцип суперпозиции сил. Свободное падение тел. Закон всемирного тяготения. Искусственные спутники Земли. Сила тяжести. Вес и невесомость. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения. Давление.

Статика. Момент силы. Условия равновесия твердого тела. Давление жидкости. Закон Паскаля. Закон Архимеда. Условия плавания тел.

Законы сохранения в механике. Импульс тела. Импульс системы тел. Закон сохранения импульса. Работа силы. Мощность. Работа как мера изменения энергии. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии. Закон сохранения полной механической энергии.

Механические колебания и волны. Гармонические колебания. Уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, фаза, период колебаний и частота колебаний. Свободные колебания (математический и пружинный маятники). Длина и скорость волны.

2. Молекулярная физика. Термодинамика (*молекулярно-кинетическая теория, законы идеального газа и термодинамики*).

Молекулярная физика. Модели строения газов, жидкостей и твердых тел. Диффузия. Взаимодействие частиц вещества. Модель идеального газа. Давление и средняя кинетическая энергия теплового движения молекул идеального газа. Абсолютная температура. Уравнение состояния идеального газа. Изо- процессы. Адиабатический процесс. Изменение агрегатных состояний вещества.

Термодинамика. Работа в термодинамике. Внутренняя энергия. Количество теплоты. Теплопередача. Теплоемкость вещества. Удельная и молярная теплоёмкость. Уравнение теплового баланса. Законы термодинамики. Принцип действия и КПД тепловой машины.

3. Электродинамика (*электрическое поле, постоянный ток, магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны*)

Электрическое поле. Электризация тел. Взаимодействие зарядов. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции электрических полей. Потенциал электрического поля. Проводники в электрическом поле. Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов. Энергия электрического поля конденсатора.



Законы постоянного тока. Электрический ток. Носители свободных электрических зарядов в металлах, жидкостях и газах. Сила тока. Работа тока. Напряжение. Мощность тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной электрической цепи. Сопротивление при последовательном и параллельном соединении проводников.

СТРУКТУРА БИЛЕТА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДЫ

В билет участника олимпиады включено пять заданий по физике. Задачи в билете расположены в порядке возрастания уровня их сложности. Максимальное значение баллов за решение задачи выставляется при условии, что приведено полное решение задачи, включающее следующие элементы: а) кратко записано условие задачи, записаны положения теории и физические законы, закономерности, применение которых необходимо для решения задачи выбранным способом, в случае необходимости приведены грамотные рисунки и пояснения к ним; б) описаны все вводимые в решении буквенные обозначения физических величин (за исключением обозначений используемых в условии задачи и основных констант) с пояснениями; описания физических величин, встречающихся в задачах, может производиться с помощью математических соотношений, текстуально или с помощью рисунков; в) проведены все необходимые математические преобразования (допускаются пояснения на их проведение) и расчеты, приводящие к правильному числовому ответу; г) представлен правильный ответ в общем виде и в численном значении с указанием единиц измерения искомой величины. Если задача решена не полностью, то этапы ее решения оцениваются в соответствии с критериями оценок по данной задаче. (Следует отметить, что если правильно записано краткое условие, но решение отсутствует, то за задачу выставляется 0 баллов, также наличие правильного ответа при полном отсутствии текста решения тоже 0 баллов). Итоговый результат каждого участника подсчитывается как сумма баллов за выполнение каждой задачи.

Олимпиадные задачи не требуют знания такого материала, который не предусмотрен в школьной программе по физике и математике, однако предполагают умения строить физические модели, анализировать условия, глубоко понимать сущность законов физики, самостоятельно применять их в различных ситуациях, а также безупречно владеть математическим аппаратом.

ПРИМЕРНЫЙ ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Работа над условием:
 - краткая запись условия и выяснение смысла терминов (рисунки, чертежи);
 - анализ физических явлений, процессов, описанных в задаче;
 - приведение всех данных к СИ (если это необходимо).
 - запись упрощающих предположений.
2. Поиск необходимых уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление, процесс.
3. Решение задачи в общем виде.
4. Анализ полученного результата (действие с наименованиями, проверка на частных случаях, решение другим способом).
5. Получение числового ответа.



ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Сани движутся по горизонтальной поверхности со скоростью 10 м/с. Коэффициент трения между полозьями саней и дорогой равен 0,1. Какой путь сани пройдут за 15 с?

Дано	Решение
$v = 10 \text{ м/с}$ $t = 15 \text{ с}$ $\mu = 0,1$ $g = 10 \text{ м/с}^2$ $S = ?$	На сани действуют три силы: сила тяжести, нормальная реакция опоры и сила трения. По второму закон Ньютона: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}$ За направление оси Ox выберем направление движения саней, за направление оси Oy - вертикальное направление. В проекциях на эти оси координат получим:

$$Ox: F_{\text{тр},x} = ma_x; \quad Oy: N_y - mg_y = 0.$$

Модуль силы трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, отсюда, модуль ускорения $a = \mu g$.

Так как по оси Ox на сани действует только сила трения, направленная против направления движения, то проекция ускорения на это направление будет отрицательной $a_x < 0$, движение равнозамедленное. Путь, при таком движении определяется по формуле

$$S = v_0 t - at^2 / 2$$

При замедленном движении через некоторое время t_0 сани остановятся. Заданное в условии значение времени не должно быть большим, чем время движения саней до полной остановки.

Время t_0 определим из условий:

$$\begin{cases} v_t = v_0 - \mu g t_0 \\ v_t = 0 \end{cases}$$

отсюда

$$t_0 = \frac{v_0}{\mu g}, \quad t_0 = 10 \text{ с.}$$

$$S = v_0 t_0 - \mu g \frac{t_0^2}{2} = v_0 \frac{v_0}{\mu g} - \mu g \frac{v_0^2}{2\mu^2 g^2} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

Путь, пройденный санями при любом $t > t_0$ (в том числе и за 15 с) не превысит путь, пройденный санями до полной остановки. И, при заданном коэффициенте трения и ускорении свободного падения, он будет определяться только начальной скоростью.

Проверка размерности: $[S] = \frac{\mathcal{M}^2 \cdot \mathcal{C}^2}{\mathcal{C}^2 \cdot \mathcal{M}} = \mathcal{M}$

Вычисление $S = \frac{10^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 10} = 50 \text{ м.}$

Ответ: путь, пройденный санями $S = 50 \text{ м.}$

Пример 2. Три одинаковых положительных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . определите величину напряженности поля E в точке, лежащей на расстоянии a от каждого из зарядов.

Решение

Указанная точка представляет собой вершину правильного тетраэдра, в вершинах основания которого находятся заряды. Высота тетраэдра является осью симметрии системы. Поэтому напряженность $\vec{E}$ направлена вдоль высоты тетраэдра (см. рис.а) согласно принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3, \quad (1)$$

причем $E_1 = E_2 = E_3 = k \frac{q}{a^2}$. Проецируя (1) на ось y , параллельную высоте тетраэдра

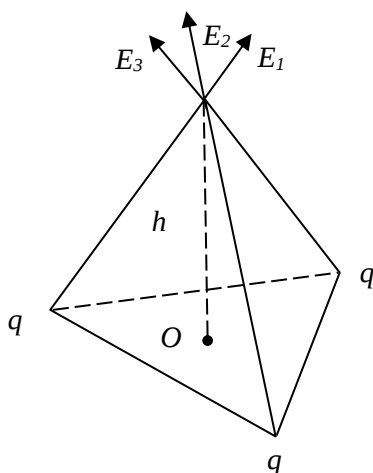


Рис.а

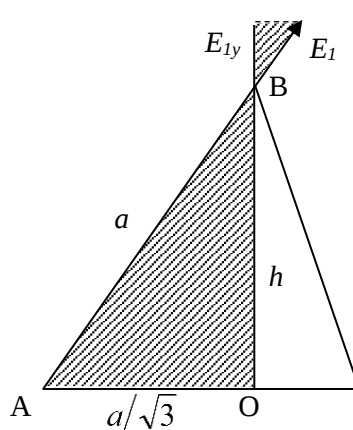


Рис.б

(и учитывая, что $E_{1y} = E_{2y} = E_{3y}$), получаем $E = 3E_{1y}$.

На рис. б показано сечение тетраэдра вертикальной плоскостью, проходящей через высоту и одну из вершин основания. Из подобия заштрихованных треугольников получаем

$$\frac{E_{1y}}{E_1} = \frac{h}{a}; \text{ из прямоугольного треугольника ABO находим } h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Отсюда $E_{1y} = \sqrt{\frac{2}{3}} k \frac{q}{a^2}$; следовательно,

$$E = \sqrt{6} k \frac{q}{a^2} = \frac{\sqrt{6} q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Ответ:

Пример 3. Не справившись с управлением, велосипедист наехал на вертикальный столб. Оцените при какой минимальной скорости движения велосипеда в момент удара о столб, шина деформируется до металлического обода.

**Решение.**

При небольших деформациях шины x сила пропорциональна деформации: $F=kx$.

При нормальной езде по ровной дороге размер сжатия шины обозначим за a . Если $F=mg$, $x=a$, то можно определить коэффициент жёсткости $k=F/x=mg/a$.

При ударе о столб будем считать, что велосипедист остановился, и вся кинетическая энергия движения перешла в потенциальную энергию упругой деформации.

Следовательно:

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{kx^2}{2}.$$

В соответствии с условием задачи величина деформации равна диаметру сечения шины d , т. е. $x=d$.

Тогда:
$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{kx^2}{2} \approx \frac{mg}{a} \frac{d^2}{2}.$$

Отсюда:
$$v \approx d \sqrt{g/a}.$$

Проверка размерности: $[v] = m \sqrt{\frac{m}{c^2 \cdot m}} = m \sqrt{\frac{1}{c^2}} = \frac{m}{c}$

Примем следующие значения величин, входящих в формулу: $a \approx 10^{-2}$ м, $d \approx 5 \cdot 10^{-2}$ м, $g = 10$ м/с².

Вычисление $v \approx 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{10/10^{-2}} \approx 1.6$ м/с

Ответ: минимальная скорость движения велосипедиста $v \approx 1.6$ м/с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Точка движется в плоскости XY так, что координаты изменяются по законам: $X=A \sin \omega t$, $Y=B \cos \omega t$ (A , B , ω – постоянные). По какой траектории движется точка? Запишите уравнение этой траектории.

Ответ: $(x/A)^2 + (y/B)^2 = 1$.

Эллипс с полуосями A и B.

2. Определите силу притяжения между однородным шаром массой $M=7$ кг и радиуса $R=6$ см, в котором имеется сферическая полость диаметром R , и маленьким шариком массой $m=100$ г. Расстояние между геометрическим центром сферической полости и центром большого шара $R/4$. Расстояние между геометрическими центрами шаров $d=8$ см.

Ответ:
$$F = \frac{GMm}{7} \left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{(d-R/2)^2} \right) = 5,7 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$$

3. Автомобиль движется вверх по пологому подъёму со скоростью $v_1 = 6$ м/с и спускается по тому же пути со скоростью $v_2 = 9$ м/с, не меняя мощности двигателя. С какой скоростью v будет ехать этот автомобиль по горизонтальному участку той же дороги, если мощность двигателя неизменна? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v = 7,2$ м/с.

4. Капля воды объемом 0,2 мл нагревается светом с длиной волны 0,75 мкм, поглощая каждую секунду 10^{10} фотонов. Определить скорость нагревания воды.

Ответ:
$$\frac{\Delta T}{t} = 3,15 \cdot 10^{-9} \text{ (К/с)}.$$

5. При расширении газа на $0,5$ м³ при постоянном давлении $1,6 \cdot 10^6$ Па ему передано $1,8 \cdot 10^6$ Дж теплоты. Определить изменение внутренней энергии газа.

Ответ: $\Delta U = 1$ МДж.



6. Пассажир первого вагона поезда прогуливался по перрону. Когда он был рядом с последним вагоном, поезд длиной l начал двигаться с ускорением a . Пассажир сразу же побежал со скоростью v . Через какое время он догонит свой вагон?

$$\text{Ответ: } t = \frac{v}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}} \right).$$

7. Один моль идеального газа находится в сосуде между двумя поршнями, соединёнными пружиной. Поршни могут перемещаться без трения вдоль оси сосуда, за поршнями вакуум. Длина пружины в нерастянутом состоянии ℓ , её жёсткость k , площадь поршня S , температура газа T . Определите давление газа в положении равновесия.

$$\text{Ответ: } p = \frac{k}{2S} \left(-\ell + \sqrt{\ell^2 + \frac{4RT}{k}} \right)$$

8. Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 (рис.4) Определить максимальную температуру $T_{\max}$ газа в ходе процесса.

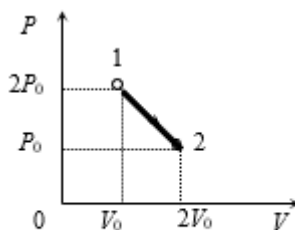


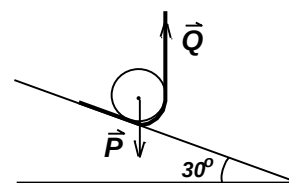
Рис.4

$$\text{Ответ: } T_{\max} = 9P_0V_0 / 4R.$$

9. Три одинаковых маленьких шарика с массами 0,1 г подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной 20 см. Какие одинаковые заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол 30° ?

$$\text{Ответ: } q = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$$

10. На наклонной плоскости с углом наклона 30° лежит цилиндр веса P (см. рис.). Цилиндр удерживается в состоянии покоя с помощью огибающей его нити (см.рис.), один конец которой закреплен на наклонной плоскости, а другой конец натянут вертикально вверх с силой Q . Чему равна сила Q ?



$$\text{Ответ: } Q = P/3$$

Составитель: доц. М.Ю. Кожокаръ



РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. «Ленинградские математические кружки», Киров, изд. АССА, 1994. – 272с.
2. Федоров Р. М. и др. «Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. » / Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.
3. Прасолов В.В. «Московские математические олимпиады. 1958 – 1967 гг.» . – М.: МЦНМО, 2013. – 328с.
4. Протасов В. Ю. «Максимумы и минимумы в геометрии», М.: МЦНМО, 2005. – 56 с.
5. Завало С. Т . Элементарная алгебра. – М.: Просвещение, М., 1964. – 298 с.
6. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства– М.: Просвещение, М., 1964. – 239 с.
7. Калинин А.Ю, Терешин Д.А. Стереометрия 10– М.:Изд-во МФТИ, 1996 – 236 с.
8. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями). – М.:Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 384 с.
9. Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы: Учеб.пособие под ред. Сканави М.И. М.: Высшая школа, 1993. – 528 с.
10. Штейнгауз. Г. Сто задач. – М.:Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 144 с.
11. Фарков А.В. Школьные математические олимпиады. – М.:ВАКО, 2016. – 240 с.

Составитель: доцент *О.А.Скепко*, доцент *О.В. Сильванович*

Научный редактор: профессор *А.П. Господариков*