



**9 КЛАСС. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.
ВАРИАНТ 1**

Задача 1 (5 баллов)

Доказать, что число $13 + 13^2 + 13^3 K + 13^{2025} + 13^{2026}$ делится на 7 без остатка.

Решение:

Представим данное число в виде

$$\begin{aligned} 13 + 13^2 + 13^3 K + 13^{2025} + 13^{2026} &= 13 \cdot (1 + 13) + 13^3 \cdot (1 + 13) + K + 13^{2025} \cdot (1 + 13) = \\ &= 14 \cdot (13 + 13^3 + K + 13^{2025}) \end{aligned}$$

Так как 14 делится на 7, то и само число делится на 7.

Задача 2 (8 баллов)

Совет акционеров, акции которых хранятся в сейфе, состоит из одиннадцати человек. Вынуть акции из сейфа можно только в том случае, когда на их собрании присутствует не менее семи акционеров. Какое наименьшее число замков нужно установить на сейф и сколько ключей придется изготовить (и как их распределить), чтобы это условие выполнялось?

Решение:

По условию, любые шесть акционеров сейф открыть не могут. Значит, у них нет ключа от некоторого замка. При этом любой другой акционер должен этот ключ иметь. Поэтому нужно поставить $C_{11}^6 = C_{11}^5$ замков. Пять ключей от каждого замка отдаются некоторой пятерке акционеров, причём разные ключи раздаются разным пятеркам.

Ответ: 462 замка, по 5 ключей к каждому замку.

Задача 3 (10 баллов)

Доказать, что число $2024^2 + 2024^2 \cdot 2025^2 + 2025^2$ является квадратом целого числа. Найти это число.

Решение:

Рассмотрим выражение

$$n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^2(n+1) + (n+1)^2 = (n^2 + n + 1)^2.$$

Данное число есть значение этого выражения при $n = 2024$.

Значит, число $2024^2 + 2024^2 \cdot 2025^2 + 2025^2 = (2024^2 + 2025)^2$ - квадрат целого числа.

Ответ: $2024^2 + 2025 = 4098601$.

Задача 4 (12 баллов)

Найти значения параметра p , при которых оба корня уравнения

$$2x^2 - 2(p+3)x + (3p+725) = 0$$

являются целыми числами.

Решение:

Корни данного уравнения имеют вид

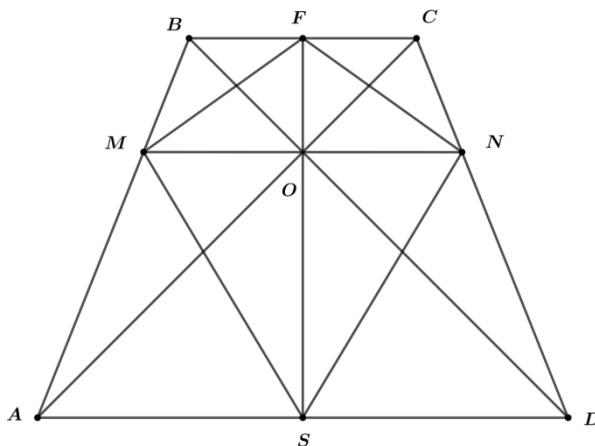
$$x_{1,2} = \frac{p+3 \pm \sqrt{(p+3)^2 - 2 \cdot (3p+725)}}{2} = \frac{p+3 \pm \sqrt{p^2 - 1441}}{2}.$$

Корни будут целыми, если $p^2 - 1441$ - точный квадрат, то есть $p^2 - 1441 = q^2$. Так как $1441 = 11 \cdot 131$, то это возможно при $p = \pm \frac{1441+1}{2}$ или $p = \pm \frac{11+131}{2}$, то есть при $p = \pm 721$, $p = \pm 71$.

Ответ: $p = \pm 721$, $p = \pm 71$.

**Задача 5 (15 баллов)**

В равнобокой трапеции $ABCD$ отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и параллелен основаниям, точки F и S - середины оснований BC и AD . Найти отношение длин оснований (большого к меньшему), если известно, что площадь четырехугольника $MFNS$ составляет $\frac{3}{8}$ площади трапеции.

**Решение:**

По свойствам трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой (это прямая FS). Так как трапеция равнобокая, то $FS \perp MN$.

Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $FS = h$ (считаем, что $a > b$). Известно, что в любой трапеции с основаниями a и b отрезок MN с концами на боковых сторонах, проходящих через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

Обозначим через S и S_1 площадь трапеции и площадь четырехугольника $MFNS$ соответственно. Тогда $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, $S_1 = \frac{1}{2} MN \cdot FS = \frac{ab}{a+b} \cdot h$.

$$\text{По условию } S_1 = \frac{3}{8} \cdot S \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{3}{8} \frac{a+b}{2} \Rightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10\left(\frac{a}{b}\right) + 3 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 3$$

Ответ: 3:1

Задача 6 (8 баллов)

На рисунке изображена электрическая схема, состоящая из источника тока, амперметра и трёх сопротивлений. При условии, что источник тока и амперметр – идеальные, найти силу тока, которую показывает амперметр.

Дано:

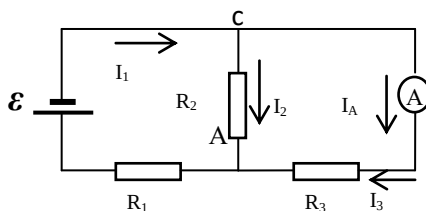
$$\varepsilon = 5 \text{ В}$$

$$R_1 = 2 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 6 \text{ Ом}$$

$$I_A = ?$$





Решение:

Поскольку амперметр и источник тока - идеальные, следовательно, их сопротивления пренебрежимо мало. Можно считать, что сопротивления R_2 и R_3 соединены параллельно, их общее сопротивление равно:

$$R_{2-3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Применим закон Ома для замкнутой цепи и найдем ток, протекающий через сопротивление R_1 .

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}$$

Подставим числовые значения:

$$I_1 = \frac{5}{2 + \frac{4 \cdot 6}{4 + 6}} = \frac{5}{4,4} = 1,1 \text{ A}$$

Очевидно, что токи I_1 , I_2 , I_3 связаны соотношением (ток I_1 втекает в узел С, а

токи I_2 , I_3 - вытекают): (*) $I_1 = I_2 + I_3$.

Учтем, что падение напряжения на сопротивлениях R_2 и R_3 одинаковое, т.к. они соединены параллельно, следовательно $I_2 R_2 = I_3 R_3$.

Отсюда ток I_2 равен:

$$I_2 = \frac{I_3 \cdot R_3}{R_2}$$

Подставим ток I_2 в выражение (*), получим: $I_1 = I_3 + \frac{I_3 \cdot R_3}{R_2}$

Отсюда I_3 равно:

$$I_3 = \frac{I_1 \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{1,1 \cdot 4}{4 + 6} = 0,44 \text{ A}$$

Очевидно, что искомая сила через амперметр $I_A = I_3$, следовательно, подставим числовые значения и найдем искомое значение I_A .

Ответ: $I_A = 0,44 \text{ A}$.

**Задача 7 (8 баллов)**

«Поднять якорь!» - дал приказ боцман, и якорь был поднят (равномерно) со дна с помощью лебёдки на высоту 10 м, при этом была совершена работа 8,57 кДж. Определите, из какого материала изготовлен якорь, если его масса составляла 100 кг. Плотности некоторых веществ приведены в таблице. Ускорение свободного падения можно считать равным 10 м/с^2 .

	Вещество	Плотность, кг/м^3
	золото	19300
	серебро	10500
	сталь	7800
	чугун	7000
	вода	1000

Дано:

$$h=10 \text{ м}$$

$$A = 8,75 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$$m_{\text{я}}=100 \text{ кг}$$

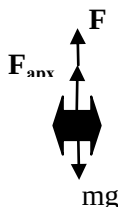
$$\rho=?$$

Решение:

Чтобы определить материал, из которого изготовлен якорь, надо узнать его плотность.

Работа, затраченная на подъём якоря, определяется по формуле:

$A=F \cdot S=F \cdot h$. Чтобы найти силу, сделаем рисунок и запишем второй закон Ньютона.



$$F - mg = 0$$

(равномерный подъём, $a=0$).

На якорь действуют сила тяжести и архимедова сила, поэтому сила, совершающая работу, определяется из соотношения: $F: F + F_{\text{арх}} = mg, F = mg - F_{\text{арх}}$.

Сила Архимеда равна:

$$F_{\text{арх}} = m_{\text{в}} g = \rho_{\text{в}} g V_{\text{я}}$$

$m_{\text{в}}$ - масса вытесненной воды, $V_{\text{я}}$ - объём якоря (объём вытесненной воды).

Объём якоря найдем из соотношения: $V_{\text{я}} = \frac{m_{\text{я}}}{\rho_{\text{я}}}$

и подставим оба равенства в выражение для силы F:



$$F = m_{\text{я}}g - m_{\text{б}}g = m_{\text{я}}g - \rho_{\text{б}}gV_{\text{я}} = m_{\text{я}}g\left(1 - \frac{\rho_{\text{б}}}{\rho_{\text{я}}}\right)$$

$$A = F \cdot h = m_{\text{я}}g\left(1 - \frac{\rho_{\text{б}}}{\rho_{\text{я}}}\right) \cdot h$$

$$\left(1 - \frac{\rho_{\text{б}}}{\rho_{\text{я}}}\right) = \frac{A}{m_{\text{я}}gh}$$

$$\rho_{\text{я}} = \frac{\rho_{\text{б}}m_{\text{я}}g \cdot h}{m_{\text{я}}gh - A} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10}{10^4 - 8,57 \cdot 10^3} = 7 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$$

Из таблицы видно, что материал якоря – чугун.

Ответ: чугун.

Задача 8 (10 баллов)

Воздушный шарик объёмом V_1 заполнен гелием под давлением p_1 при температуре T_1 . Его соединили с камерой насоса объёмом V_2 , в которой находился гелий под давлением p_2 при температуре T_2 . Найти давление и температуру, которые установятся в шарике и камере насоса после их соединения. Считать, что теплообмен с окружающей средой отсутствуют.

Решение:

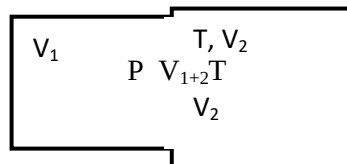
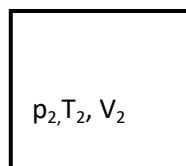
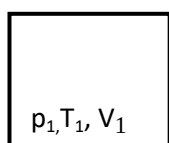
Дано:

p_1, T_1, V_1

p_2, T_2, V_2

T -?

p -?



Запишем I начало термодинамики, которое является законом сохранения энергии в термодинамических процессах:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta A$$

ΔU – изменение внутренней энергии, ΔQ – количество теплоты, переданной системе, ΔA – работа, совершаемая внешними силами.

В нашем случае сосуды теплоизолированы, работа не совершается, значит, внутренняя энергия не меняется.

Начальная внутренняя энергия газа в обоих сосудах $U_1 + U_2$ равна их суммарной внутренней энергии в общей сосуде U .

$$U_1 + U_2 = U$$



Учтем, что

$$U = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} pV$$
$$\frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} p(V_1 + V_2)$$

Откуда искомое давление равно: $p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$.

Чтобы найти температуру, воспользуемся законом сохранения вещества: количество газа после объединения сосудов не изменилось, т.е.

$$V_1 + V_2 = V_{\text{общ}}$$

Из уравнения Менделеева - Клайперона:

$$\nu = \frac{pV}{RT}.$$

Подставим в предыдущее равенство

$$\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2} = \frac{pV_1}{RT} + \frac{pV_2}{RT}.$$

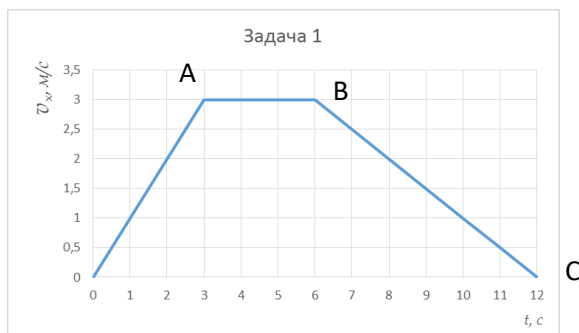
Находим T: $T = p(V_1 + V_2) : \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} \right)$

В полученное выражение подставим p из (*) и получим T:

Ответ: $T = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1} \cdot T_1 T_2$ $p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$

Задача 9 (12 баллов)

Разносчик пиццы на скутере двигался вдоль оси x, как указано на графике зависимости его скорости от времени. Дать характеристику движения на всех участках пути, нарисовать графики зависимости координаты x, ускорения a_x и пройденного пути S от времени на участке ОАВС. В начальный момент времени координата $x=0$.



**Решение:**

1. На участке 0А тело двигалось равноускоренно, ускорение равно:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} = \frac{3 - 0}{3} = 1 \text{ м/с}^2$$

Движение на участке АВ было равномерным со скоростью 3 м/с. Участку ВС соответствует равнозамедленное движение, ускорение которого отрицательно и равно:

$$a_x = \frac{v_{xc} - v_{xb}}{\Delta t} = \frac{0 - 3}{12 - 6} = -0.5 \text{ м/с}^2$$

Нарисуем график зависимости ускорения от времени. На участке 0А (на промежутке времени от 0 до 3 с) тело двигалось с постоянным ускорением 1 м/с². Участок АВ (на промежутке времени от 3 до 6 с) соответствует равномерному движению, ускорение равно 0. На участке ВС (на промежутке времени от 6 до 12 с) тело движется равнозамедленно с ускорением - 0,5м/с².

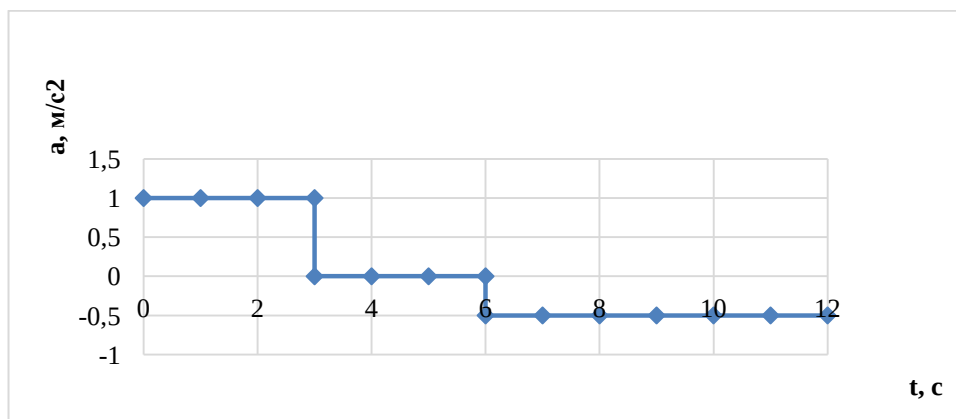


Рис.2

Нарисуем график зависимости координаты x от времени (рис.3).

На участке ОА (0- 3 с) зависимость x(t) от времени имеет вид параболы. Найдем значение x в момент времени 3 с. (Учтем, что v₀=0).

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2} = 0 + \frac{1 \cdot 3^2}{2} = 4,5(\text{м})$$

На участке АВ (3- 6 с) движение равномерное со скоростью 3 м/с, следовательно, значение координаты в момент времени 6 секунд равно:

$$x(6) = x(3) + v\Delta t = 4,5 + 3 \cdot (6 - 3) = 13,5(\text{м})$$

Участок траектории АВ - прямая.



На участке ВС (6-12 с) тело движется равнозамедленно с отрицательным ускорением - $0,5\text{ м/с}^2$. График $x(t)$ на этом участке –парабола ветвью вниз.

Для построения параболы найдем значение x в момент времени 10 и 12 с:

На участке ВС (6-12 с) тело движется равнозамедленно с отрицательным ускорением - $0,5\text{ м/с}^2$. График $x(t)$ на этом участке –парабола ветвью вниз.

Для построения параболы найдем значение x в момент времени 10 и 12 с:

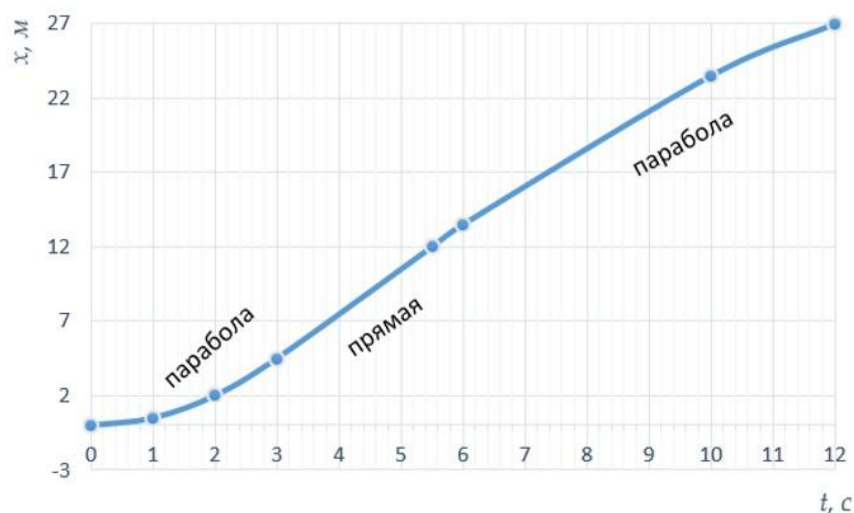


Рис.3

График зависимости пройденного пути от времени, очевидно, будет иметь такой же вид.

Задача 10 (12 баллов)

Водолаз во время погружения посветил фонарём из воды на поверхность водоёма. Угол падения луча сначала составил 30° , а затем, после подъёма на некоторую высоту - 55° . Нарисовать ход лучей. Показатель преломления воды 1,33.

Таблица синусов прилагается.

30°	0.5000	40°	0.6428	50°	0.7660
31°	5150	41°	6561	51°	7771
32°	5299	42°	6691	52°	7880
33°	5446	43°	6820	53°	7986
34°	5592	44°	6947	54°	8090
35°	0.5736	45°	0.7071	55°	0.8192
36°	5878	46°	7193	56°	8290
37°	6018	47°	7314	57°	8387
38°	6157	48°	7431	58°	8480
39°	6293	49°	7547	59°	8572
				60°	0.8660

**Решение:**

Дано:

$$\varphi_1 = 30^\circ$$

$$\varphi_{1-2} = 55^\circ$$

$$n_1 = 1,33$$

Запишем закон Снеллиуса: $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}$.

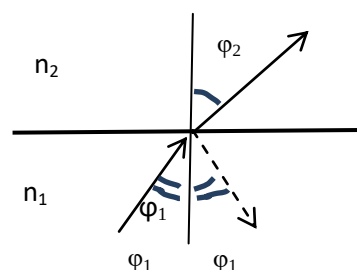
Найдем угол полного внутреннего отражения (ПВО). В этом случае $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_{\text{ПВО}} = 49^\circ$, т.к.

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_{\text{ПВО}} = \frac{1}{1,33} = 0,75.$$

В нашей задаче $n_2 = 1$, т.к. вторая среда – воздух. Найдем угол преломления φ_2 при падении под углом $\varphi_1 = 30^\circ$, который меньше угла ПВО.

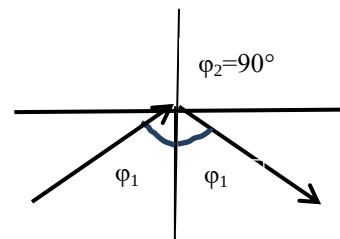
$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cdot n_1 = 1,33 \cdot 0,5 = 0,65$$

$$\varphi_2 = 41^\circ$$



Нарисуем ход лучей: падающего, преломлённого и отражённого. Угол падения равен углу отражения. Ход лучей представлен на рис 1.

При падении под углом $\varphi_1 = 55^\circ$, который больше угла полного внутреннего отражения, преломлённого луча не будет. Луч отразится в первую среду. Ход лучей показан на рис. 2.





**9 КЛАСС. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.
ВАРИАНТ 2**

Задача 1 (5 баллов)

Доказать, что число $14 + 14^2 + 14^3 + K + 14^{2025} + 14^{2026}$ делится на 5 без остатка.

Решение:

Представим данное число в виде

$$\begin{aligned} 14 + 14^2 + 14^3 K + 14^{2025} + 14^{2026} &= 14 \cdot (1 + 14) + 14^3 \cdot (1 + 14) + K + 14^{2025} \cdot (1 + 14) = \\ &= 15 \cdot (14 + 14^3 + K + 14^{2025}). \end{aligned}$$

Так как 15 делится на 5, то и само число делится на 5.

Задача 2 (8 баллов)

Совет акционеров, акции которых хранятся в сейфе, состоит из десяти человек. Вынуть акции из сейфа можно только в том случае, когда на их собрании присутствует не менее семи акционеров. Какое наименьшее число замков нужно установить на сейф и сколько ключей придется изготовить (и как их распределить), чтобы это условие выполнялось?

Решение:

По условию, любые шесть акционеров сейф открыть не могут. Значит, у них нет ключа от некоторого замка. При этом любой другой акционер должен этот ключ иметь. Поэтому нужно поставить $C_{10}^6 = C_{10}^4$ замков. Четыре ключа от каждого замка отдаются некоторой четвёрке акционеров, причём разные ключи раздаются разным четвёркам.

Ответ: 210 замков, по 4 ключа к каждому замку.

Задача 3 (10 баллов)

Доказать, что число $2025^2 + 2025^2 \cdot 2026^2 + 2026^2$ является квадратом целого числа. Найти это число.

Решение:

Рассмотрим выражение

$$n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^2(n+1) + (n+1)^2 = (n^2 + n + 1)^2.$$

Данное число есть значение этого выражения при $n = 2025$.

Значит, число $2025^2 + 2025^2 \cdot 2026^2 + 2026^2 = (2025^2 + 2026)^2$ - квадрат целого числа.

Ответ: $2025^2 + 2026 = 4102651$.

Задача 4 (12 баллов)

Найти значения параметра p , при которых оба корня уравнения

$$2x^2 - 2(p+3)x + (3p+714) = 0$$

являются целыми числами.

Решение:

Корни данного уравнения имеют вид

$$x_{1,2} = \frac{p+3 \pm \sqrt{(p+3)^2 - 2 \cdot (3p+714)}}{2} = \frac{p+3 \pm \sqrt{p^2 - 1419}}{2}.$$

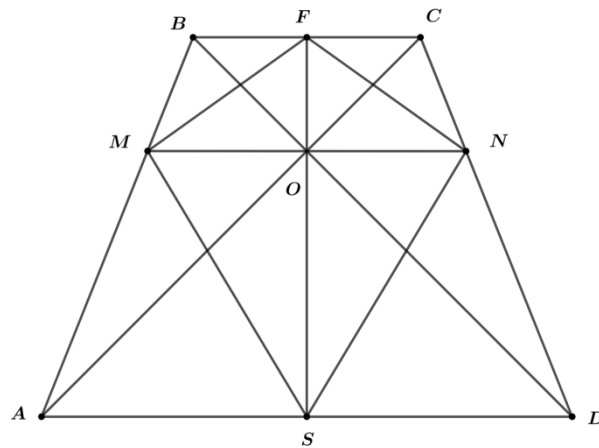


Корни будут целыми, если $p^2 - 1419$ - точный квадрат, то есть $p^2 - 1419 = q^2$. Так как $1419 = 11 \cdot 129$, $1419 = 33 \cdot 43$, $1419 = 3 \cdot 473$, то это возможно при $p = \pm \frac{1419+1}{2}$, $p = \pm \frac{11+129}{2}$, $p = \pm \frac{33+43}{2}$, $p = \pm \frac{3+473}{2}$, то есть при $p = \pm 710$, $p = \pm 70$, $p = \pm 238$, $p = \pm 38$.

Ответ: $p = \pm 710$, $p = \pm 70$, $p = \pm 238$, $p = \pm 38$.

Задача 5 (15 баллов)

В равнобокой трапеции $ABCD$ отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и параллелен основаниям, точки F и S - середины оснований BC и AD . Найти отношение длин оснований (большого к меньшему), если известно, что площадь четырехугольника $MFNS$ составляет $\frac{4}{9}$ площади трапеции.



Решение:

По свойствам трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой (это прямая FS). Так как трапеция равнобокая, то $FS \perp MN$.

Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $FS = h$ (считаем, что $a > b$). Известно, что в любой трапеции с основаниями a и b отрезок MN с концами на боковых сторонах, проходящих через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

Обозначим через S и S_1 площадь трапеции и площадь четырехугольника $MFNS$ соответственно. Тогда $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, $S_1 = \frac{1}{2} MN \cdot FS = \frac{ab}{a+b} \cdot h$.

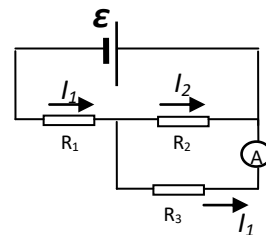
По условию

$$S_1 = \frac{4}{9} \cdot S \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{4}{9} \frac{a+b}{2} \Rightarrow 4a^2 - 10ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10\left(\frac{a}{b}\right) + 4 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2.$$

Ответ: 2:1

**Задача 6 (8 баллов)**

Найти силу тока, протекающего через амперметр, если сопротивления R_1 , R_2 и R_3 равны соответственно 5, 6 и 3 Ом. Напряжение на зажимах источника равно 2,1 В. Внутренним сопротивлением амперметра и источника пренебречь. Схема на рис.



Дано:

$R_1 = 5 \text{ Ом}$
$R_2 = 6 \text{ Ом}$
$R_3 = 3 \text{ Ом}$
$U_{\text{ист}} = 2,1 \text{ В}$

$I_A = ?$

Решение:

Из схемы видно, что сопротивления R_2 и R_3 соединены параллельно, найдем их общее сопротивление:

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Применим закон Ома для замкнутой цепи и учтем, что $U_{\text{ист}} = \varepsilon$ (ЭДС)

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}$$

найдем значение силы тока I_1 :

$$I_1 = \frac{2,1}{5 + \frac{6 \cdot 3}{6 + 3}} = 0,3 \text{ А}$$

Как видно из схемы, ток I_1 разветвляется на два: I_2 и I_3 , следовательно

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (*)$$

Поскольку падение напряжения на сопротивлениях R_2 и R_3 одинаковое, т.к. они соединены параллельно, следовательно

$$I_2 R_2 = I_3 R_3. \quad (**)$$

Так как амперметр и сопротивление R_3 соединены последовательно, то $I_A = I_3$.

Выразим ток I_2 из равенства (**) и подставим его выражение в (*)

$$I_2 = \frac{I_3 \cdot R_3}{R_2}$$



$$I_1 = I_A = I_3 + \frac{I_3 \cdot R_3}{R_2}$$

Из предыдущего равенства находим I_3 :
$$I_3 = \frac{I_1 \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{0,3 \cdot 6}{3 + 6} = 0,2 \text{ A}$$

Очевидно, что искомая сила через амперметр $I_A = I_3$.

Ответ: $I_A = 0,2 \text{ A}$.

Задача 7 (8 баллов)

Искатели сокровищ подняли со дна на высоту 8 м сундук со старинными монетами массой 11,6 тонн. Какие монеты были в сундуке, если при равномерном подъёме была совершена работа $78,3 \cdot 10^3 \text{ Дж}$. Считать объём сундука равным объёму заключенных в нем монет, массой сундука пренебречь. Плотности некоторых веществ приведены в таблице.

	Вещество	Плотность, кг/м ³
	золото	19300
	серебро	10500
	олово	7200
	чугун	7000
	вода	1000

Дано:

$$m = 11,6 \text{ т} = 1,16 \cdot 10^4 \text{ кг}$$

$$h = 8 \text{ м}$$

$$A = 78,3 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$\rho = ?$

Решение:

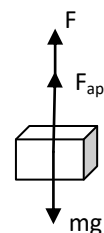
Чтобы определить материал, из которого изготовлены монеты, надо узнать плотность вещества, из которого они изготовлены.

Работа, затраченная на подъём сундука, определяется по формуле:

$$A = F \cdot S = F \cdot h.$$

Чтобы найти силу, сделаем рисунок и запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0$$



(равномерный подъём, $a=0$). На сундук действуют сила тяжести и архимедова сила, поэтому сила, совершающая работу, определяется из соотношения:

$$F: F + F_{\text{арх}} = mg, F = mg - F_{\text{арх}}.$$

$$\text{Сила Архимеда равна: } F_{\text{арх}} = m_{\text{в}} g = \rho_{\text{в}} g V_{\text{м}},$$



m_6 - масса воды, V_m - объём сундука с монетами.

Объём сундука с монетами найдем из соотношения (по условию задачи считаем объём сундука равен объёму монет, массой сундука пренебрегаем):

$$V_m = \frac{m_m}{\rho_m}$$

и подставим оба равенства в выражение для силы F :

$$F = m_m g - m_6 g = m_m g - \rho_6 g V_m = m_m g \left(1 - \frac{\rho_6}{\rho_m}\right)$$

$$A = F \cdot h = m_m g \left(1 - \frac{\rho_6}{\rho_m}\right) \cdot h$$

$$\left(1 - \frac{\rho_6}{\rho_m}\right) = \frac{A}{m_m g h}$$

$$\rho_m = \frac{\rho_6 m_m g \cdot h}{m_m g h - A} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1,16 \cdot 10^4 \cdot 9,8 \cdot 8}{1,16 \cdot 10^4 \cdot 9,8 \cdot 8 - 7,83 \cdot 10^5} = 7,2 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$$

Из таблицы видно, что материал, из которого изготовлены монеты, - олово.

Ответ: олово.

Задача 8 (10 баллов)

Воздушный шар объёмом V_1 , заполненный гелием, соединили с камерой насоса объёмом V_2 , в которой находился гелий под давлением p_2 при температуре T_2 . При соединении установилось давление p и температура T . Найти давление и температуру, при которых находился гелий в воздушном шарике.

Процессом обмена теплом с окружающей средой можно пренебречь.

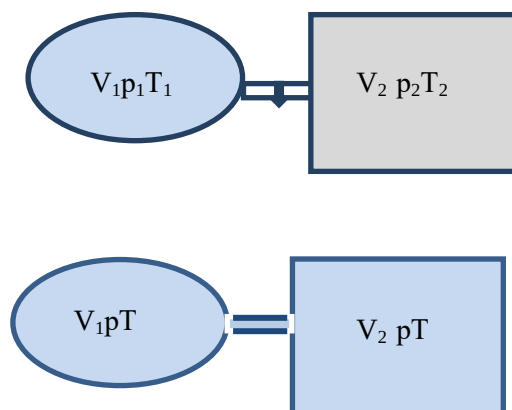
Дано:

V_1

p_2, T_2, V_2

T, p

$p_1, T_1, -?$





Решение:

Сделаем рисунок. Запишем I начало термодинамики, которое является законом сохранения энергии в термодинамических процессах.

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta A$$

где ΔU – изменение внутренней энергии, ΔQ – количество теплоты, переданной системе,

ΔA – работа, совершаемая внешними силами.

В нашем случае процессом обмена теплом с окружающей средой пренебрегаем, $\Delta Q=0$ работа не совершается $\Delta A=0$, значит, внутренняя энергия не меняется.

Начальная внутренняя энергия газа в обоих сосудах $U_1 + U_2$ равна их суммарной внутренней энергии в общей сосуде U .

$$U_1 + U_2 = U$$

Из уравнения Менделеева-Клайперона выразим νRT и подставим в выражение для внутренней энергии, учтя, что гелий – одноатомный газ:

$$U = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} pV$$

$$\frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} p(V_1 + V_2)$$

Отсюда искомое давление p_1 равно:

$$p_1 = \frac{p(V_1 + V_2) - p_2 V_2}{V_1}. \quad (*)$$

Чтобы найти температуру T_1 , воспользуемся законом сохранения вещества: количество газа после объединения сосудов не изменилось, т.е.

$$V_1 + V_2 = V_{\text{общ}}$$

Из уравнения Менделеева – Клайперона:

$$\nu = \frac{pV}{RT}.$$

$$\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2} = \frac{pV_1}{RT} + \frac{pV_2}{RT}.$$

Из выражение (*) подставляем p_1 :

$$\frac{p(V_1 + V_2) - p_2 V_2}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p(V_1 + V_2)}{T}.$$



Получили уравнение относительно T_1 .

$$\frac{p(V_1 + V_2) - p_2 V_2}{T_1} = \frac{p(V_1 + V_2)T_2 - p_2 V_2 T}{T T_2}.$$

Отсюда находим искомую температуру T_1 :

$$\text{Ответ: } T_1 = \frac{[p(V_1 + V_2) - p_2 V_2] T \cdot T_2}{p(V_1 + V_2) T_2 - p_2 V_2 T}, \quad p_1 = \frac{p(V_1 + V_2) - p_2 V_2}{V_1}.$$

Задача 9 (12 баллов)

Мальчик на самокате движется вдоль горизонтальной оси x . На графике приведена зависимость координаты мальчика от времени $x(t)$. Участок ABC – парабола, CD – отрезок прямой. (т. D соответствует время 4,5 с). Дать характеристику движения на всех участках пути, нарисовать графики зависимости скорости от времени $v_x(t)$, ускорения $a_x(t)$ и пройденного пути $S(t)$ от времени на участке ABCD.

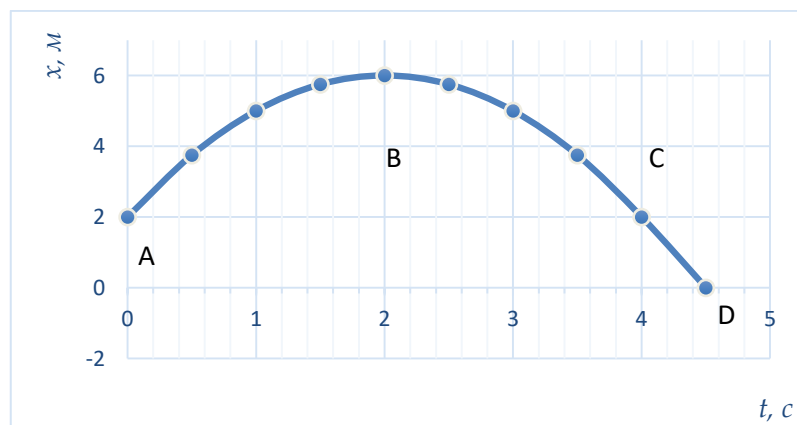


Рис.1

Решение:

Из рис.1 видно, что начальная координата равна 2 м. Далее на участке ABC (при $t=0 - 4$ с) движение является равнозамедленным, т.к. ABC – парабола, направленная осями вниз. На участке CD (при $t = 4 - 4,5$ с) движение равномерное.

В точке B (при $t=2$ с) скорость точки равна 0, т.к. это - вершина параболы.

$$v_x(2) = 0$$

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 - 2}{2 - 0} = 2 \text{ м/с}$$



Средняя скорость равна:

С другой стороны, средняя скорость м.б. рассчитана по формуле:

$$v_{cp} = \frac{v_x(0) + v_x(2)}{2} = \frac{v_{0x}}{2}$$

Зная среднюю скорость, найдем скорость в момент времени $t=0$.

$$v_{0x} = 2v_{cp} = 4 \text{ м/с.}$$

График $v(t)$ представлен на рис.2

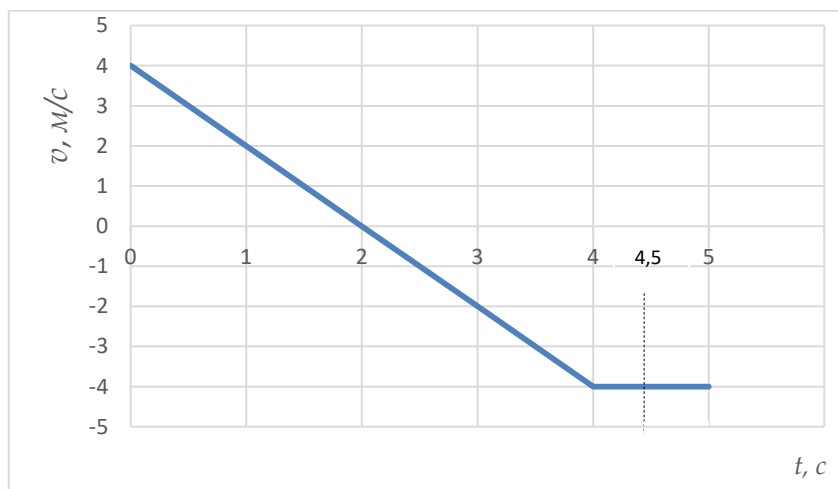


Рис.2

Найдем ускорение.

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} = \frac{0 - 4}{2} = -1 \text{ м/с}^2$$

Это ускорение на всем участке от 0 до 4 секунд (участок ABC траектории). На участке CD траектория – прямая линия, следовательно, на нем скорость постоянна, а ускорение равно 0. График $a(t)$ представлен на рис 3.

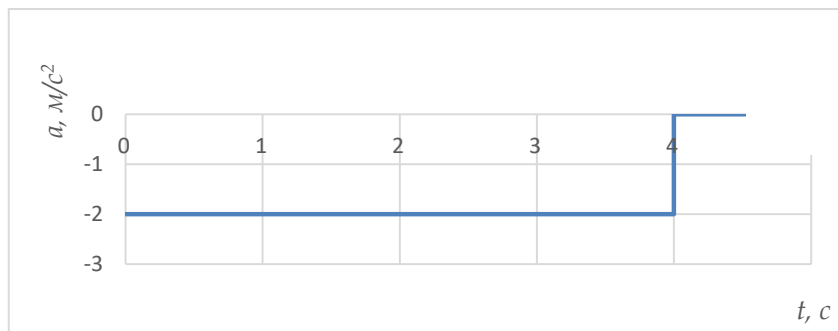


Рис.3

Нарисуем график зависимости пройденного пути от времени.



В промежуток времени от 0 до 2 секунд график $S(t)$ повторяет ход зависимости $x(t)$, только в момент времени 0 с путь был равен 0, следовательно, значения пути будут на 2 м меньше, чем координаты x . Надо учитывать, что пройденный путь может только увеличиваться, поэтому на участке 2 - 4 с парабола будет направлена ветвями вверх.

Для построения графика найдём значения пути в моменты времени 3 и 4 секунды и нанесем полученные значения на график. Этот можно сделать по данным графика $x(t)$. Видно, что в момент времени 2 с пройденный путь равен 4 м (6-2 м), а при $t=3$ с путь увеличился на 1 м и стал равен 5 м. При $t=4$ с путь $S = 8$ м. На участке CD (4 - 4,5 сек) движение равномерное, путь равен $S=vt=4 \cdot 0,5=2$ м. Итого, в момент времени 4,5 с пройденный путь составил 10 м.

График зависимости $S(t)$ представлен на рис 4. Это график можно получить чисто геометрически из анализа зависимости $x(t)$: часть параболы АВ перенести в начало координат, а часть ВС – перенести, сделав зеркальное отражение отрезка параболы ВС на графике $x(t)$. Добавить отрезок CD следует, изменив его направление на противоположное.

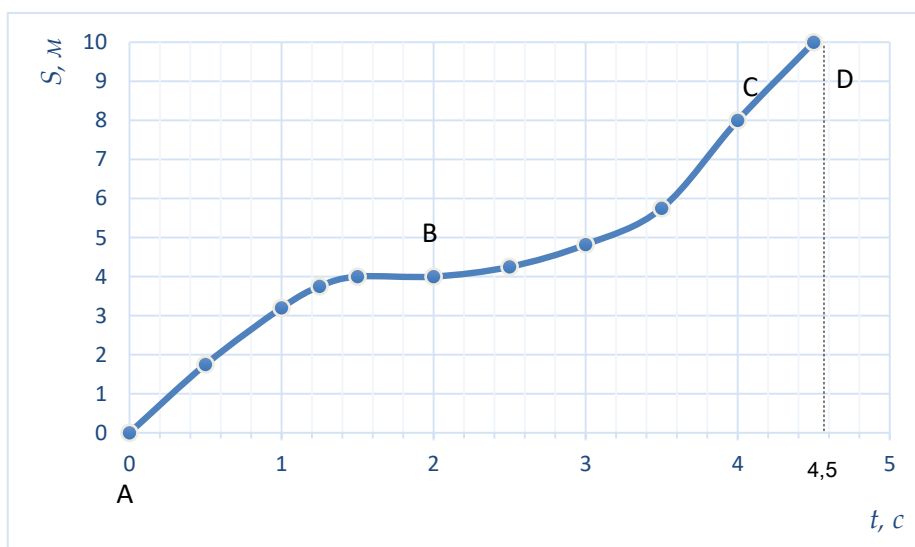


Рис.4

Задача 10 (12 баллов)

Гарри Поттер на уроке зельеварения уронил волшебный фонарик в зелье, которое представляло собой жидкость с показателем преломления 1,47. Один луч фонарика падает на границу раздела зелье – воздух под углом 35° , другой – под углом 43° . Нарисовать ход лучей

30°	0.5000	40°	0.6428	50°	0.7660
31°	5150	41°	6561	51°	7771
32°	5299	42°	6691	52°	7880
33°	5446	43°	6820	53°	7986
34°	5592	44°	6947	54°	8090
35°	0.5736	45°	0.7071	55°	0.8192
36°	5878	46°	7193	56°	8290
37°	6018	47°	7314	57°	8387
38°	6157	48°	7431	58°	8480
39°	6293	49°	7547	59°	8572
				60°	0.8660



для обоих случаев, иначе Гарри ждёт наказание. Выручайте!

Таблица синусов прилагается.

Решение:

Дано:

$$\varphi_1 = 35^\circ$$

$$\varphi_{1-2} = 43^\circ$$

$$n_1 = 1,47$$

По закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Найдем угол полного внутреннего отражения (ПВО). В этом случае $\varphi_2 = 90^\circ$,

$$\sin \varphi_{\text{пво}} = \frac{1}{1,47} = 0,68.$$

$$\varphi_{\text{пво}} = 43^\circ.$$

В нашей задаче $n_2 = 1$, т.к. вторая среда – воздух. Найдем угол преломления φ_2 при падении под углом $\varphi_1 = 35^\circ$, который меньше угла ПВО.

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cdot n_1 = 1,47 \cdot 0,57 \approx 0,838$$

$$\varphi_2 \approx 57 \text{ град}$$

Отражённый луч тоже будет наблюдаться, хотя интенсивность отражённого света невелика.

Угол падения равен углу отражения. Ход лучей представлен на рис 1.

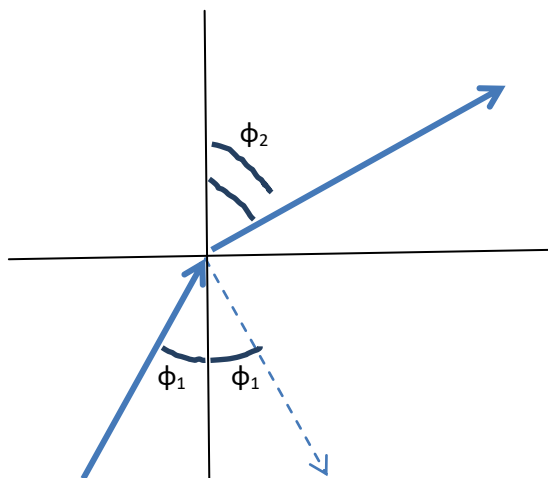


Рис 1.



Для лучей под углом падения $\phi_1 = 43^\circ$ будет наблюдаться полное внутреннее отражение, следовательно, преломлённый луч пойдет по границе раздела (рис. 2).

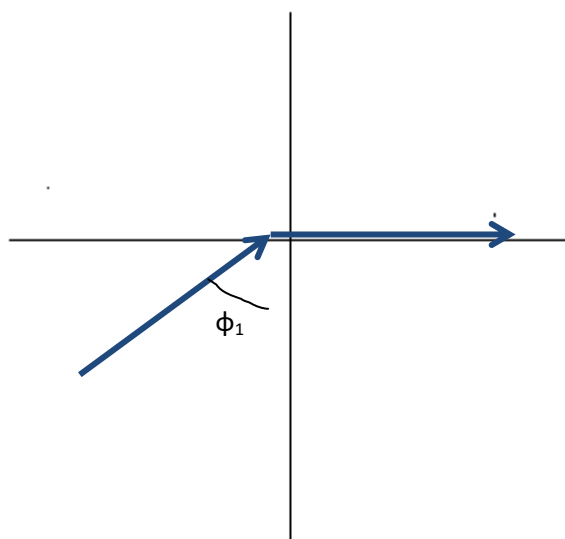


Рис.2



**9 КЛАСС. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.
ВАРИАНТ 3**

Задача 1 (5 баллов)

Доказать, что число $13+13^2+13^3K+13^{2023}+13^{2024}$ делится на 7 без остатка.

Решение:

Представим данное число в виде

$$\begin{aligned}13+13^2+13^3K+13^{2025}+13^{2026} &= 13 \cdot (1+13) + 13^3 \cdot (1+13) + K + 13^{2025} \cdot (1+13) = \\ &= 14 \cdot (13+13^3+K+13^{2025})\end{aligned}$$

Так как 14 делится на 7, то и само число делится на 7.

Задача 2 (8 баллов)

Совет акционеров, акции которых хранятся в сейфе, состоит из семи человек. Вынуть акции из сейфа можно только в том случае, когда на их собрании присутствует не менее пяти акционеров. Какое наименьшее число замков нужно установить на сейф и сколько ключей придется изготовить (и как их распределить), чтобы это условие выполнялось?

Решение:

По условию, любые четвероакционеров сейф открыть не могут. Значит, у них нет ключа от некоторого замка. При этом любой другой акционер должен этот ключ иметь. Поэтому нужно поставить $C_7^4 = C_7^3$ замков. Три ключа от каждого замка отдаются некоторой тройке акционеров, причём разные ключи раздаются разным тройкам.

Ответ: 35 замков, по 3 ключа к каждому замку.

Задача 3 (10 баллов)

Доказать, что число $2023^2 + 2023^2 \cdot 2024^2 + 2024^2$ является квадратом целого числа.

Найти это число.

Решение:

Рассмотрим выражение

$$n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^2(n+1) + (n+1)^2 = (n^2 + n + 1)^2.$$

Данное число есть значение этого выражения при $n = 2023$.

Значит, число $2023^2 + 2023^2 \cdot 2024^2 + 2024^2 = (2023^2 + 2024)^2$ - квадрат целого числа.

Ответ: $2023^2 + 2024 = 4094553$.

Задача 4 (12 баллов)

Найти значения параметра p , при которых оба корня уравнения

$$2x^2 - 2(p+3)x + (3p+670) = 0$$

являются целыми числами.

Решение:

Корни данного уравнения имеют вид

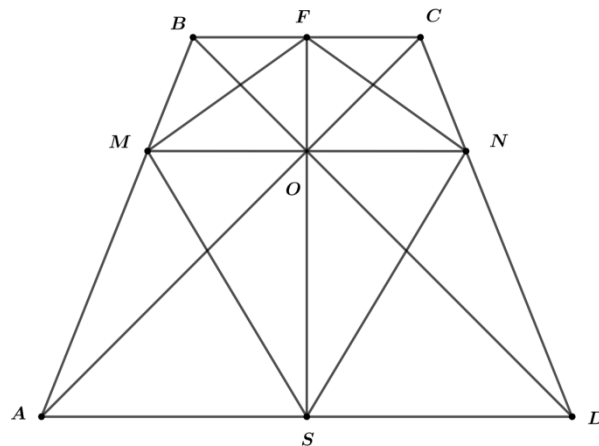
$$x_{1,2} = \frac{p+3 \pm \sqrt{(p+3)^2 - 2 \cdot (3p+670)}}{2} = \frac{p+3 \pm \sqrt{p^2 - 1331}}{2}.$$

Корни будут целыми, если $p^2 - 1331$ - точный квадрат, то есть $p^2 - 1331 = q^2$. Так как $1331 = 11 \cdot 121$, то это возможно при $p = \pm \frac{1331+1}{2}$ или $p = \pm \frac{11+121}{2}$, то есть при $p = \pm 666$, $p = \pm 66$.

Ответ: $p = \pm 666$, $p = \pm 66$.

**Задача 5 (15 баллов)**

В равнобокой трапеции $ABCD$ отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и параллелен основаниям, точки F и S - середины оснований BC и AD . Найти отношение длин оснований (большого к меньшему), если известно, что площадь четырехугольника $MFNS$ составляет $\frac{8}{17}$ площади трапеции.

**Решение:**

По свойствам трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой (это прямая FS). Так как трапеция равнобокая, то $FS \perp MN$.

Обозначим $AB = a, BC = b, FS = h$ (считаем, что $a > b$). Известно, что в любой трапеции с основаниями a и b отрезок MN с концами на боковых сторонах, проходящих через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

Обозначим через S и S_1 площадь трапеции и площадь четырехугольника $MFNS$ соответственно. Тогда $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, $S_1 = \frac{1}{2} MN \cdot FS = \frac{ab}{a+b} \cdot h$.

По условию.

$$S_1 = \frac{8}{25} \cdot S \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{8}{25} \frac{a+b}{2} \Rightarrow 8a^2 - 34ab + 8b^2 = 0 \Leftrightarrow 8\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 34\left(\frac{a}{b}\right) + 8 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 4$$

Ответ: 4:1

Задача 6 (8 баллов)

Для электрической схемы, изображенной на рисунке, надо подобрать амперметр. ЭДС и сопротивления R_1, R_2, R_3 известны. Можно считать, что источник тока и амперметр – идеальные.

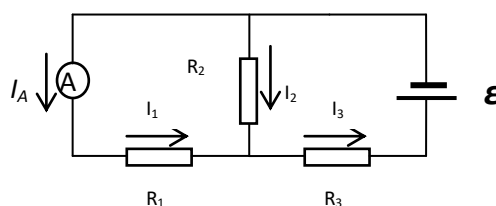
Дано:

$$R_1 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 2 \text{ Ом}$$

$$U_{\text{ист}} = 24 \text{ В}$$



$I_A = ?$

**Решение:**

Чтобы подобрать подходящий амперметр, надо узнать значение силы тока, который можно через него пропускать. Очевидно, что сила тока, протекающего через амперметр и сопротивление R_1 , имеют одинаковое значение. Сопротивления R_2 и R_1 соединены параллельно, их общее сопротивление равно

$$R_{1-2} = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 + R_1}.$$

Сопротивление амперметра равно 0. Запишем закон Ома для замкнутой цепи и найдем ток, протекающий через сопротивление R_3 .

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{R_3 + \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 + R_1}} = \frac{24}{2 + \frac{4 \cdot 4}{8}} = 6A$$

Запишем соотношение между токами I_1 , I_2 , I_3 :

$$I_3 = I_1 + I_2, \quad (*)$$

Поскольку падение напряжения на сопротивлениях R_2 и R_1 одинаковое, т.к. они соединены параллельно, следовательно

$$I_2 R_2 = I_1 R_1. \quad (**)$$

Выразим ток I_2 из (**):

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot R_1}{R_2} \quad \text{и подставим в } (*).$$

$$I_3 = I_1 + \frac{I_1 \cdot R_1}{R_2},$$

откуда находим ток I_1 и, значит, I_A :

$$I_1 = \frac{I_3}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{6}{1 + \frac{4}{4}} = 3A$$

Ответ: $I_A = 3A$.

Задача 7 (8 баллов)

Ловцы жемчуга обнаружили на дне океана сосуд объемом сосуда $0,4 \text{ м}^3$ с неизвестными сокровищами и подняли его на высоту 12 м. В сосуде оказались монеты, состав которых на вид определить было сложно. Монеты из какого металла были в сосуде, если при равномерном подъёме сосуда была совершена работа 446,88 кДж? Считать объем сосуда равным объёму заключенных в нем монет, массой сосуда пренебречь. Плотности некоторых веществ приведены в таблице.

Вещество	Плотность, кг/м^3
золото	19300
серебро	10500
сталь	7800
чугун	7000
вода	1000

Дано:

$$h = 12 \text{ м}$$

$$A = 446,88 \text{ кДж}$$

$$V_c = 0,4 \text{ м}^3$$

$\rho = ?$

**Решение:**

Чтобы определить материал, из которого изготовлены монеты, надо узнать плотность вещества, из которого они изготовлены.

Работа, затраченная на подъём сосуда, определяется по формуле: $A = F \cdot S = F \cdot h$.

Чтобы найти силу, сделаем рисунок и запишем второй закон Ньютона.

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0$$

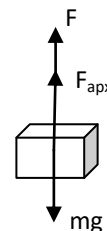
(равномерный подъём, $a=0$).

На сосуд действуют сила тяжести и архимедова сила, поэтому сила, совершающая работу, определяется из соотношения:

$$F: F + F_{\text{арх}} = mg, F = mg - F_{\text{арх}}.$$

По условию задачи считаем объём сосуда равен объёму монет, массой сосуда пренебрегаем, т.е. $V_c = V_m$.

Сила Архимеда равна: $F_{\text{арх}} = m_e g = \rho_e g V_m$
 m_e - масса воды



Таким образом, сила равна:

$$F = m_m g - m_e g = m_m g - \rho_e g V_m = V_m g (\rho_m - \rho_e)$$

Работу, совершенную при подъёме сосуда, находим из формулы:

$$A = V_m g (\rho_m - \rho_e) \cdot h,$$

откуда определим плотность вещества монет:

$$\rho_m = \frac{A}{V_m g h} + \rho_e$$

Произведем расчет: $\rho_m = \frac{446,88 \cdot 10^3}{0,4 \cdot 9,8 \cdot 12} + 10^3 = 10,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

Из таблицы видно, что материал, из которого изготовлены монеты, серебро.

Ответ: серебро.

Задача 8 (10 баллов)

Одноатомный газ, находящийся в теплоизолированном сосуде объёма V_1 под давлением p_1 при температуре T_1 , соединили с сосудом объёмом V_2 , в котором находился такой же газ. В результате установилось давление p и температура T . Второй сосуд тоже теплоизолирован. Найти давление и температуру, при которых находился газ во втором сосуде.

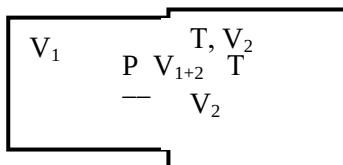
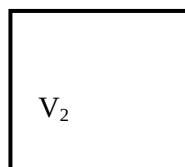
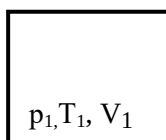
Дано:

p_1, T_1, V_1

V_2

p, T

$p_2, T_2, -?$





Запишем I начало термодинамики, которое является законом сохранения энергии в термодинамических процессах.

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta A$$

ΔU – изменение внутренней энергии, ΔQ – количество теплоты, переданной системе, ΔA – работа, совершаемая внешними силами.

В нашем случае сосуды теплоизолированы, работа не совершается, значит, внутренняя энергия не меняется.

Начальная внутренняя энергия газа в обоих сосудах $U_1 + U_2$ равна их суммарной внутренней энергии в общей сосуде U .

$$U_1 + U_2 = U$$

Из уравнение Менделеева-Клайперона выразим νRT и подставим в выражение для внутренней энергии:

$$U = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} pV$$
$$\frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} p(V_1 + V_2)$$

Отсюда выразим искомое давление p_2 :

$$p_2 = \frac{p(V_1 + V_2) - p_1 V_1}{V_2} \quad (*)$$

Для нахождения температуры T_2 , воспользуемся законом сохранения вещества: количество газа после объединения сосудов не изменилось, т.е.

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_{\text{общ}} \quad \nu = \frac{pV}{RT}$$

Из уравнения Менделеева - Клайперона:

$$\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2} = \frac{pV_1}{RT} + \frac{pV_2}{RT}$$
$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p(V_1 + V_2)}{T} - \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

Из выражение (*) подставляем p_2 : $\frac{p(V_1 + V_2) - p_1 V_1}{T_2} = \frac{p(V_1 + V_2)}{T} - \frac{p_1 V_1}{T_1}$

Откуда находим температуру T_2 : $T_2 = \frac{[p(V_1 + V_2) - p_1 V_1]T \cdot T_1}{p(V_1 + V_2)T_1 - p_1 V_1 T}$

Ответ:

$$p_2 = \frac{p(V_1 + V_2) - p_1 V_1}{V_2} \quad T_2 = \frac{[p(V_1 + V_2) - p_1 V_1]T \cdot T_1}{p(V_1 + V_2)T_1 - p_1 V_1 T}$$



Задача 9 (12 баллов)

Девочка на самокате движется в соответствии с графиком зависимости скорости v_x от времени, представленным на рис. 1. В начальный момент времени координата $x(0)=0$. Дать характеристику движения на всех участках пути, нарисовать графики зависимости перемещения, ускорения и пройденного пути от времени на участке от 0 до 10 секунд.

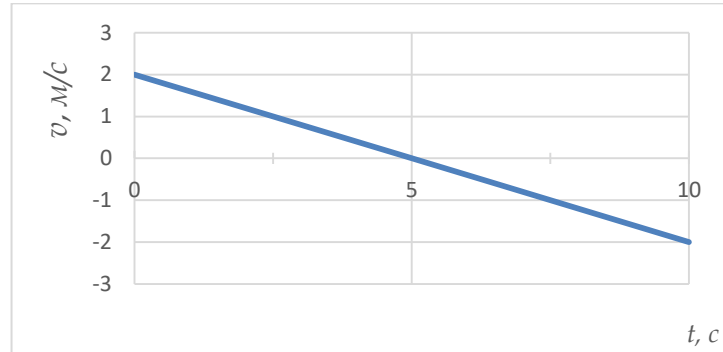


Рис.1

Решение:

Из графика $v_x(t)$ видно, что начальная скорость $v_0 = 2 \text{ м/с}$ и на всем участке изменения $t = 0 - 10 \text{ с}$ модуль скорости линейно уменьшается со временем. При $t = 5 \text{ с}$ скорость равна 0, при $t > 5 \text{ с}$ тело движется против оси x , скорость стала отрицательной. Найдём ускорение.

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} = \frac{-2 - 2}{10} = -0,4 \text{ м/с}^2$$

Движение равнозамедленное (с отрицательным ускорением).

График зависимости $a(t)$ приведен на рис.2.

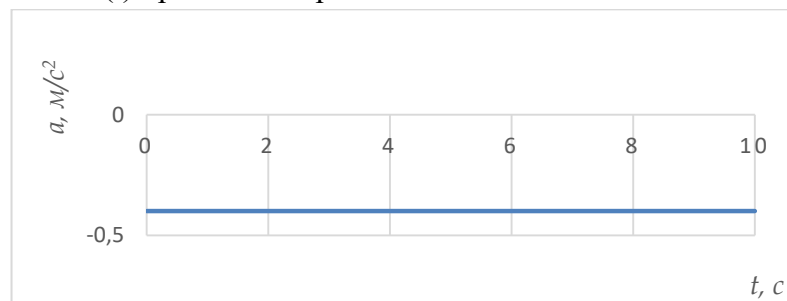


Рис. 2

Нарисуем график зависимости $x(t)$. На всем участке 0-10 с движение с отрицательным ускорением, следовательно, зависимость $x(t)$ будет представлять собой параболу ветвями вниз. Точки для построения кривой можно найти из уравнения $x(t)$.

$$x = x_0 + vt + \frac{at^2}{2}$$

Например, при $t = 2 \text{ с}$

$$x = 0 + 2 \cdot 2 - \frac{0,4 \cdot 2^2}{2} = 3,2(\text{м})$$

При $t = 5 \text{ с}$

$$x = 0 + 2 \cdot 5 - \frac{0,4 \cdot 5^2}{2} = 5(\text{м})$$

При $t = 8 \text{ с}$

$$x = 0 + 2 \cdot 8 - \frac{0,4 \cdot 8^2}{2} = 3,2(\text{м})$$



При $t=10$ $x=0$.

(Часть параболы при $t=5-10$ с можно дорисовать из соображения симметрии).

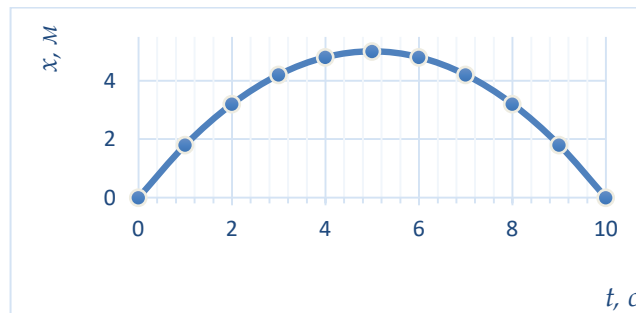


Рис.3

Для расчета пройденного пути надо учитывать, что путь может только увеличиваться. Зависимость $S(t)$ от 0 до момента времени $t=5$ с график пути повторит зависимость $x(t)$. В точке $t=5$ с кривая $S(t)$ будет испытывать перегиб: касательная к кривой в точке $t=5$ с будет параллельна оси t . Затем путь будет возрастать тоже по закону $S \sim t^2$, но парабола будет направлена ветвью вверх. Для построения графика найдем значения S , используя данные зависимости $x(t)$. Очевидно, что в момент времени 10 секунд пройденный путь составит 10 м. (парабола $x(t)$ симметрична относительно момента времени 5 с). За промежуток времени 5-10 секунд точка пройдет путь 5 м.

Вторую половину ветви параболы $x(t)$ можно зеркально отразить и получим зависимость $S(t)$.

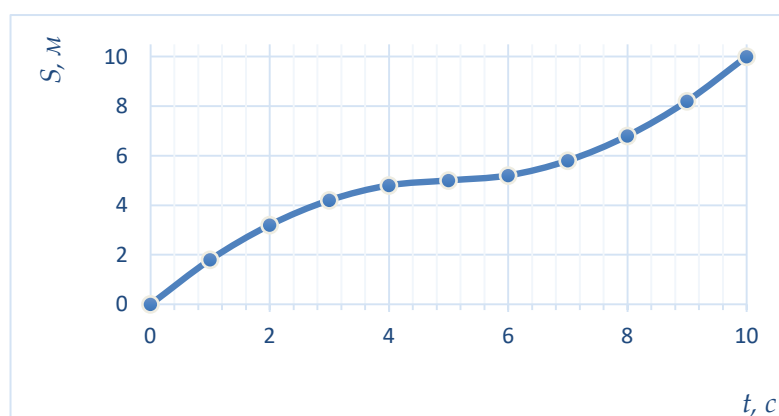


Рис 4.

**Задача 10 (12 баллов)**

Магический кристалл медленно погружается в жидкость, испуская волшебные световые лучи. Один луч падает на границу раздела жидкость – воздух под углом 60° , другой под углом 35° . Нарисовать ход лучей, идущих от магического кристалла, если жидкость имеет показатель преломления 1,3. Таблица синусов прилагается.

Дано:

$$\varphi_1 = 35^\circ$$

$$\varphi_{1-2} = 60^\circ$$

$$n_1 = 1,3$$

30°	0.5000	40°	0.6428	50°	0.7660
31°	5150	41°	6561	51°	7771
32°	5299	42°	6691	52°	7880
33°	5446	43°	6820	53°	7986
34°	5592	44°	6947	54°	8090
35°	0.5736	45°	0.7071	55°	0.8192
36°	5878	46°	7193	56°	8290
37°	6018	47°	7314	57°	8387
38°	6157	48°	7431	58°	8480
39°	6293	49°	7547	59°	8572
				60°	0.8660

Решение:

Найдем угол полного внутреннего отражения (ПВО). В этом случае $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_{\text{ПВО}} = 51^\circ$, т.к. $\arcsin 0,77 = 51^\circ$.

$$\sin \varphi_{\text{пво}} = \frac{1}{1,3} = 0,77.$$

Угол 35° меньше угла полного внутреннего отражения, следовательно, будет наблюдаться преломление на границе с воздухом.

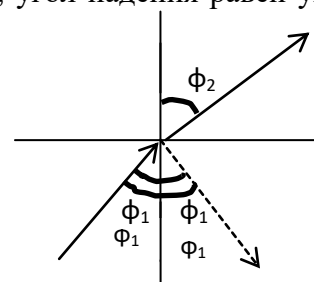
Найдем угол преломления φ_2 при падении под углом $\varphi_1 = 35^\circ$.

По закону Снеллиуса: $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}$.

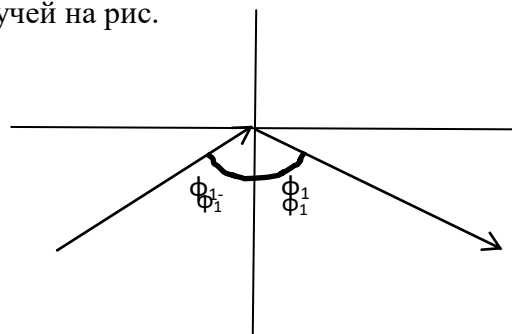
$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cdot n_1 = 1,3 \cdot 0,57 = 0,74$$

$$\varphi_2 = 48^\circ$$

При этом также будет наблюдаться слабый отражённый луч, угол падения равен углу отражения. Ход лучей представлен на рис..



Во втором случае (угол падения $\varphi_1 = 60^\circ$ больше угла ПВО), поэтому преломлённого луча не будет. Луч отразится в первую среду. Ход лучей на рис.





**9 КЛАСС. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.
ВАРИАНТ 4**

Задача 1 (5 баллов)

Доказать, что число $14 + 14^2 + 14^3 + K + 14^{2023} + 14^{2024}$ делится на 5 без остатка.

Решение:

Представим данное число в виде

$$\begin{aligned} 14 + 14^2 + 14^3 + K + 14^{2023} + 14^{2024} &= 14 \cdot (1 + 14) + 14^3 \cdot (1 + 14) + K + 14^{2023} \cdot (1 + 14) = \\ &= 15 \cdot (14 + 14^3 + K + 14^{2023}). \end{aligned}$$

Так как 15 делится на 5, то и само число делится на 5.

Задача 2 (8 баллов)

Совет акционеров, акции которых хранятся в сейфе, состоит из восьми человек. Вынуть акции из сейфа можно только в том случае, когда на их собрании присутствует не менее шести акционеров. Какое наименьшее число замков нужно установить на сейф и сколько ключей придется изготовить (и как их распределить), чтобы это условие выполнялось?

Решение:

По условию, любые пять акционеров сейф открыть не могут. Значит, у них нет ключа от некоторого замка. При этом любой другой акционер должен этот ключ иметь. Поэтому нужно поставить $C_8^5 = C_8^3$ замков. Три ключа от каждого замка отдаются некоторой тройке акционеров, причём разные ключи раздаются разным тройкам.

Ответ: 56 замков, по 3 ключа к каждому замку.

Задача 3 (10 баллов)

Доказать, что число $2030^2 + 2030^2 \cdot 2031^2 + 2031^2$ является квадратом целого числа. Найти это число.

Решение:

Рассмотрим выражение

$$n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^2(n+1) + (n+1)^2 = (n^2 + n + 1)^2.$$

Данное число есть значение этого выражения при $n = 2030$.

Значит, число $2030^2 + 2030^2 \cdot 2031^2 + 2031^2 = (2030^2 + 2031)^2$ - квадрат целого числа.

Ответ: $2030^2 + 2031 = 4122931$.

Задача 4 (12 баллов)

Найти значения параметра p , при которых оба корня уравнения

$$2x^2 - 2(p+3)x + (3p+780) = 0$$

являются целыми числами.

Решение:

Корни данного уравнения имеют вид

$$x_{1,2} = \frac{p+3 \pm \sqrt{(p+3)^2 - 2 \cdot (3p+780)}}{2} = \frac{p+3 \pm \sqrt{p^2 - 1551}}{2}.$$

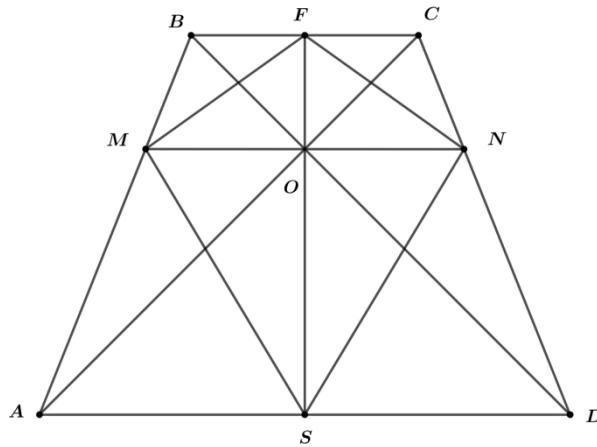


Корни будут целыми, если $p^2 - 1551$ - точный квадрат, то есть $p^2 - 1551 = q^2$. Так как $1551 = 11 \cdot 141$, $1551 = 3 \cdot 517$, $1551 = 33 \cdot 47$, то это возможно при $p = \pm \frac{1551+1}{2}$, $p = \pm \frac{11+141}{2}$, $p = \pm \frac{3+517}{2}$, $p = \pm \frac{33+47}{2}$, то есть при $p = \pm 776$, $p = \pm 76$, $p = \pm 260$, $p = \pm 40$.

Ответ: $p = \pm 776$, $p = \pm 76$, $p = \pm 260$, $p = \pm 40$.

Задача 5 (15 баллов)

В равнобокой трапеции $ABCD$ отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и параллелен основаниям, точки F и S - середины оснований BC и AD . Найти отношение длин оснований (большого к меньшему), если известно, что площадь четырехугольника $MFNS$ составляет $\frac{5}{18}$ площади трапеции.



Решение:

По свойствам трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой (это прямая FS). Так как трапеция равнобокая, то $FS \perp MN$.

Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $FS = h$ (считаем, что $a > b$). Известно, что в любой трапеции с основаниями a и b отрезок MN с концами на боковых сторонах, проходящих через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

Обозначим через S и S_1 площадь трапеции и площадь четырехугольника $MFNS$ соответственно. Тогда $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, $S_1 = \frac{1}{2} MN \cdot FS = \frac{ab}{a+b} \cdot h$.

По условию.

$$S_1 = \frac{5}{18} \cdot S \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{5}{18} \frac{a+b}{2} \Rightarrow 5a^2 - 26ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 26\left(\frac{a}{b}\right) + 5 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 5$$

Ответ: 5:1

**Задача 6 (8 баллов)**

Найти силу тока, протекающего через амперметр, если значения сопротивлений R_1 , R_2 и R_3 одинаковы и равны 6 Ом. Напряжение на зажимах источника равно 2,7 В. Внутренним сопротивлением амперметра и источника пренебречь. Схема на рис. 1.

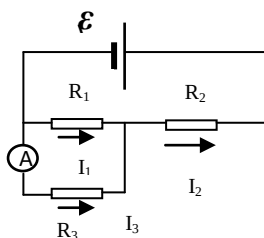


Рис.1

Решение:

Дано:

$R_1 = 6 \text{ Ом}$

$R_2 = 6 \text{ Ом}$

$R_3 = 6 \text{ Ом}$

$U_{\text{ист}} = 2,7 \text{ В}$

Из схемы видно, что сопротивления R_1 и R_3 соединены параллельно, найдем их общее сопротивление:

$$R_{\text{общ}} = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$$

I_A -? Запишем закон Ома для замкнутой цепи найдём значение силы тока I_2 :

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R + \frac{R}{2}} = \frac{2 \cdot 2,7}{3 \cdot 6} = 0,3 \text{ А}$$

Как видно из схемы, ток I_2 разветвляется на два: I_1 и I_3 , следовательно

$$I_2 = I_1 + I_3 \quad (*)$$

Падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_3 одинаковое, т.к. они соединены параллельно, следовательно

$$I_1 R_1 = I_3 R_3$$

Выразим силу тока I_1 :

$$I_1 = \frac{I_3 \cdot R_3}{R_1}$$

и подставим в (*):

$$I_2 = I_3 + \frac{I_3 \cdot R_3}{R_1},$$

Отсюда

$$I_3 = \frac{I_2 \cdot R_1}{R_1 + R_3} = \frac{0,3 \cdot 6}{12} = 0,15 \text{ А}$$

Ответ: $I_A = I_3 = 0,15 \text{ А}$

**Задача 7 (8 баллов)**

Пираты, услышав звуки приближающегося патрульного катера, подняли чугунный якорь массой 400 кг и приготовились к отплытию. Определите работу по его поднятию, если высота подъёма составила 10 м. Подъём осуществлялся равномерно, несмотря на спешку. Плотности некоторых веществ приведены в таблице.

Дано:

$$m=400 \text{ кг}$$

$$h=10 \text{ м}$$

A -?

Решение:

Работа, затраченная на подъём якоря, определяется по формуле:

$$A=F \cdot S=F \cdot h.$$

Чтобы найти силу, сделаем рисунок и запишем второй закон Ньютона.

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0$$

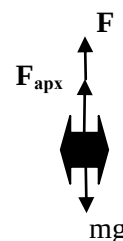
(равномерный подъём, $a=0$). На якорь действуют сила тяжести и архимедова сила, поэтому сила, совершающая работу, определяется из соотношения:

$$F: F + F_{\text{арх}} = mg, F = mg - F_{\text{арх}}.$$

Сила Архимеда равна: $F_{\text{арх}} = m_{\text{в}}g = \rho_{\text{в}}gV_{\text{я}}$

$m_{\text{в}}$ - масса воды

Объём якоря найдем из соотношения: $V_{\text{я}} = \frac{m_{\text{я}}}{\rho_{\text{я}}}$



и подставим оба равенства в выражение для силы F:

$$F = m_{\text{я}}g - m_{\text{в}}g = m_{\text{я}}g - \rho_{\text{в}}gV_{\text{я}} = m_{\text{я}}g\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{я}}}\right)$$

$$A = F \cdot h = m_{\text{я}}g\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{я}}}\right) \cdot h$$

$$A = 400 \cdot 9,8 \cdot \left(1 - \frac{10^3}{7 \cdot 10^3}\right) \cdot 10 = 33,6 \text{ кДж}$$

Ответ: работа равна 33,6 кДж.

(Если g взять равное 10 м/с^2 , то ответ будет 34,3 кДж).

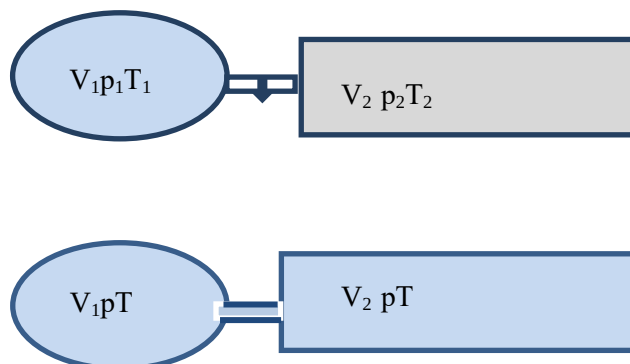
Задача 8 (10 баллов)

Аэростат, заполненный гелием под давлением p_1 , соединили с баллоном с гелием, объём которого равен V_2 , давление p_2 при температуре T_2 . При соединении установилось давление p и температура T .

Найти температуру T_1 , при которой находился гелий в аэростате, и давление p , которое установилось при соединении аэростата с баллоном. Процессом обмена теплом с окружающей средой можно пренебречь.

**Решение:**

Дано:

 p_1, V_1 V_2, p_2, T_2 T T_1, p -?

Применим I начало термодинамики, которое является законом сохранения энергии в термодинамических процессах.

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta A$$

ΔU – изменение внутренней энергии, ΔQ – количество теплоты, переданной системе, ΔA – работа, совершаемая внешними силами.

В нашем случае сосуды теплоизолированы, работа не совершается, значит, внутренняя энергия не меняется.

Начальная внутренняя энергия газа в обоих сосудах $U_1 + U_2$ равна их суммарной внутренней энергии в общей сосуде U .

$$U_1 + U_2 = U$$

Из уравнение Менделеева-Клайперона выразим νRT и подставим в выражение для внутренней энергии:

$$U = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} pV$$

$$\frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} p (V_1 + V_2)$$

Отсюда найдём давление p :

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}. \quad (*)$$

Для нахождения температуры T_1 , воспользуемся законом сохранения вещества: количество газа после объединения сосудов не изменилось, т.е.

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_{\text{общ}}$$

Из уравнения Менделеева - Клайперона:

$$\nu = \frac{pV}{RT}.$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p}{T} (V_1 + V_2)$$



Подставим в это выражение p из (*):
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{(V_1 + V_2)T} (V_1 + V_2)$$

Преобразуем:
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{T} - \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Отсюда находим искомую температуру T_1 :

$$T_1 = \frac{p_1 V_1 T \cdot T_2}{(p_1 V_1 + p_2 V_2)T_2 - p_2 V_2 T}.$$

Ответ:
$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}, \quad T_1 = \frac{p_1 V_1 T \cdot T_2}{(p_1 V_1 + p_2 V_2)T_2 - p_2 V_2 T}.$$

Задача 9 (12 баллов)

Курьер на скутере движется вдоль оси x . На графике приведена зависимость координаты скутера от времени $x(t)$. Участок ABC - парабола.

Дать характеристику движения на всех участках пути, нарисовать графики зависимости скорости от времени $v_x(t)$, ускорения a_x и пройденного пути $S(t)$ от времени на участке ABC.

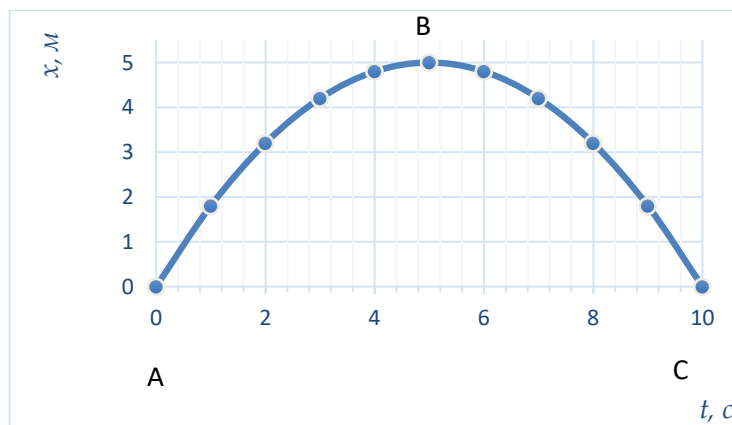


Рис.1

Решение:

Из рис. 1 видно, что начальная координата равна 0 м. На всем участке ABC движение является равнозамедленным, т.к. ABC – парабола, направленная осями вниз. Точки А, В, С относятся к моментам времени 0, 5, 10 секунд соответственно.

В точке В (при $t=5$ с) скорость точки равна 0, т.к. это - вершина параболы.

$$v_x(5) = 0$$



Средняя скорость равна:
$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5-0}{5-0} = 1 \text{ м/с}$$

С другой стороны, средняя скорость м.б. рассчитана по формуле:

$$v_{\text{cp}} = \frac{v_x(0) + v_x(5)}{2} = \frac{v_{0x}}{2}$$

Зная среднюю скорость, найдем скорость в момент времени $t=0$.

$$v_{0x} = 2v_{\text{cp}} = 2 \text{ м/с.}$$

График зависимости $v(t)$ представлен на рис.2

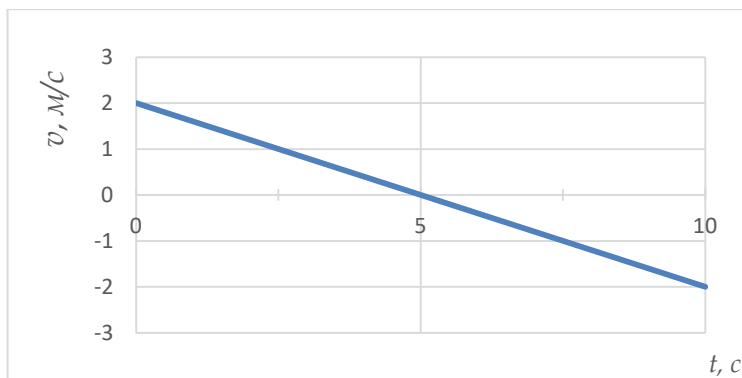


Рис.2

Найдем ускорение.

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} = \frac{0 - 2}{5} = -0,4 \text{ м/с}^2$$

Это ускорение на всем участке от 0 до 10 секунд (участок ABC траектории). График $a(t)$ представлен на рис 3.

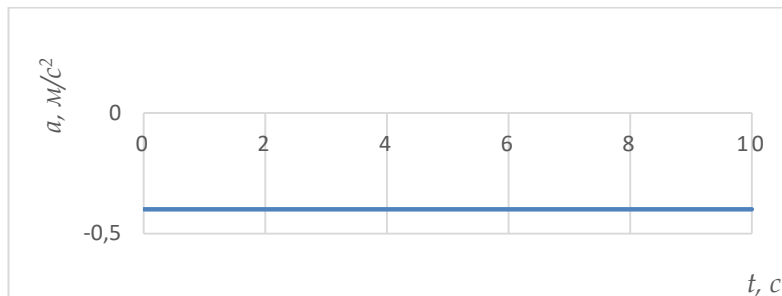


Рис.3

Нарисуем график зависимости пройденного пути от времени. В промежуток времени от 0 до 5 секунд график $S(t)$ повторяет ход зависимости $x(t)$. Надо учитывать, что пройденный путь может только увеличиваться, поэтому на участке 5-10 с парабола будет направлена



ветвью вверх. Для построения графика найдём значение пути в момент времени 2 секунды и нанесем полученное значение на график.

$$S(2) = v_0 t + \frac{a \Delta t^2}{2} = 4 - \frac{0,4 \cdot (2)^2}{2} = 3,2(м)$$

Аналогично находим значения пройденного пути в моменты времени 3 и 4 с.

$x(3)=4,2$ м, $x(4) =4,8$ м. В точке $t=5$ с кривая $S(t)$ будет испытывать перегиб: касательная к кривой в точке $t=5$ с будет параллельна оси t . Затем путь будет возрастать тоже по закону $S \sim t^2$, но парабола будет направлена ветвью вверх. Для построения графика найдем значения S , используя данные зависимости $x(t)$.

Выше найденные значения пройденного пути можно найти чисто геометрически с помощью графика $x(t)$. Для получения графика пути при $t =5 - 10$ с надо зеркально отобразить кривую $x(t)$ на этом же промежутке. Из полученного графика находим пройденный путь. Итак, в момент времени 10 с пройденный путь составил 10 м.

График зависимости $S(t)$ представлен на рис 4.

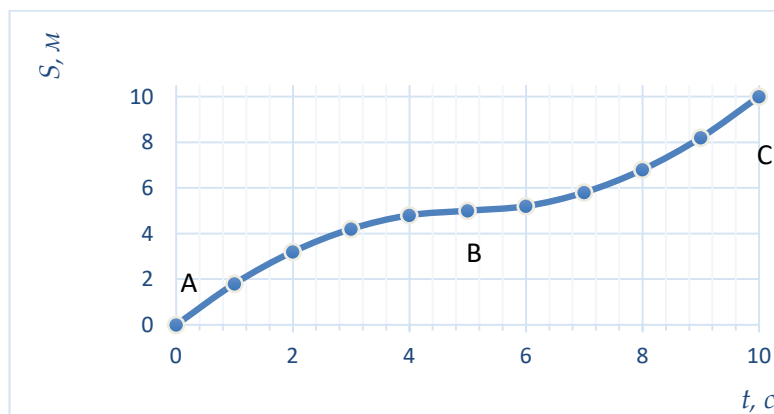


Рис.4

Задача 10 (12 баллов)

Бассейн для гидродинамических исследований заполнен жидкостью с показателем преломления 1,3. Аквалангист, находясь на дне бассейна, посветил фонариком на поверхность. Сначала угол падения составил 30° , а затем -55° . Нарисовать ход лучей в обоих случаях. Таблица синусов прилагается.

Дано:

$$\varphi_1 = 30^\circ$$

$$\varphi_{1-2} = 55^\circ$$

$$n_1 = 1,3$$

30°	0.5000	40°	0.6428	50°	0.7660
31°	5150	41°	6561	51°	7771
32°	5299	42°	6691	52°	7880
33°	5446	43°	6820	53°	7986
34°	5592	44°	6947	54°	8090
35°	0.5736	45°	0.7071	55°	0.8192
36°	5878	46°	7193	56°	8290
37°	6018	47°	7314	57°	8387
38°	6157	48°	7431	58°	8480
39°	6293	49°	7547	59°	8572
				60°	0.8660



Решение:

Найдем угол полного внутреннего отражения (ПВО). В этом случае $\varphi_2=90^\circ$,

$$\sin \varphi_{\text{пво}} = \frac{1}{1,3} = 0,707.$$

$\arcsin 0,707=45^\circ$. Следовательно, $\varphi_{\text{пво}}=45^\circ$.

Угол 30° меньше угла полного внутреннего отражения, следовательно, будет наблюдаться преломление на границе с воздухом.

Найдем угол преломления при падении под углом 30° по закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cdot n_1 = 1,3 \cdot 0,5 = 0,65$$

$$\varphi_2 = 41 \text{ град}$$

Ход лучей представлен на рис. 1.

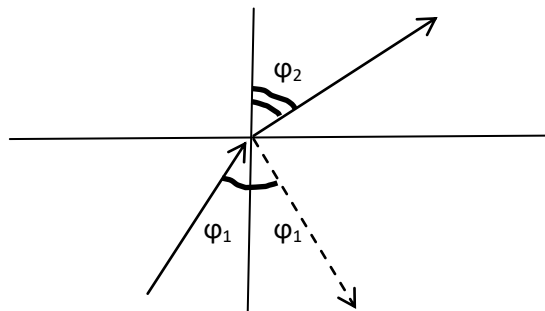


Рис. 1

Во втором случае угол падения $\varphi_1=55^\circ$ больше угла ПВО, поэтому преломлённого луча не будет. Луч отразится в первую среду.

Ход лучей показан на рис. 2.

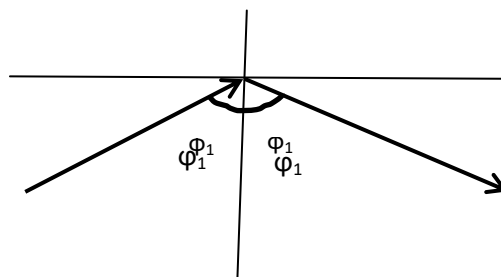


Рис 2