



## 10 КЛАСС. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.

### ВАРИАНТ 1

#### Задача 1 (5 баллов)

Найти все целые значения  $x$ , при которых выражение  $x^2 - 3x + 2$  будет квадратом целого числа.

**Решение:**

Преобразуем выражение  $x^2 - 3x + 2 = \frac{(2x-3)^2 - 1}{4}$ .

Если  $x^2 - 3x + 2 = n^2$ , то  $(2x-3)^2 - 4n^2 = 1$ , т.е.  $(2x-3+2n)(2x-3-2n)=1$ .

Рассматривая все возможные разложения 1, получим  $x \in \{1; 2\}$ .

Ответ:  $x \in \{1; 2\}$

#### Задача 2 (8 баллов)

На технической выставке представлена коллекция, включающая 4 инновационных устройства от компании DaliTech, 5 - от VanTech, 6 - от PicassoTech. Все представленные устройства были приобретены пятью компаниями-участниками. Найти количество различных результатов распределения устройств между участниками выставки.

**Решение:**

Для устройств от компании DaliTech:  $C_{4+5-1}^{5-1} = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$  результатов;

для устройств от компании VanTech:  $C_{5+5-1}^{5-1} = C_9^4 = \frac{9!}{4!5!} = 126$  результатов;

для устройств от компании PicassoTech:  $C_{6+5-1}^{5-1} = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$  результатов.

Тогда общее количество различных результатов распределения устройств между участниками выставки:  $70 \cdot 126 \cdot 210 = 1852200$

Ответ: 1 852 200

#### Задача 3 (10 баллов)

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y = |x+100| + |x+99| + \dots + |x| + |x-1| + \dots + |x-100|$  на отрезке  $[-100, 100]$ .

**Решение:**

Рассмотрим свойства функции  $y(x)$ :  $y(x) > 0$ ,  $y(-x) = y(x)$ ,  $y(x)$  непрерывна на  $[-100, 100]$ . На отрезке  $[0, 100]$  функция  $y(x)$  возрастает, поэтому наименьшее значение принимает при  $x = 0$ , наибольшее – при  $x = 100$ :

$$y(0) = 2(1 + 2 + \dots + 100) = 10100, \quad y(100) = 200 + 199 + \dots + 1 = \frac{200 \cdot 201}{2} = 20100.$$

Ответ: 10100, 20100

#### Задача 4 (12 баллов)

Решить уравнение

$$\sin|3x| = |\sin 3x|$$

**Решение:**

Раскроем  $|\sin 3x|$ :

а)  $|\sin 3x| = \sin 3x$ , если  $\sin 3x \geq 0$ . Тогда



$$\sin 3x = \sin |3x| \Leftrightarrow \sin 3x - \sin |3x| = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{3x - |3x|}{2} \cdot \cos \frac{3x + |3x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{3x - |3x|}{2} = 0 \\ \cos \frac{3x + |3x|}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x - |3x|}{2} = \pi k \\ \frac{3x + |3x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} 3x - |3x| = 2\pi k \\ \sin 3x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} 3x + |3x| = (2k+1)\pi \\ \sin 3x \geq 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , то уравнение  $3x - |3x| = 2\pi k$  из системы 1) обращается в тождество при  $k = 0$ , а значит имеет решение при всех  $x: \sin 3x \geq 0$ , т.е. при всех  $x \in \left[ \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi + 2\pi n}{3} \right], n = 0, 1, 2, \dots$

Система 2) – решений не имеет.

Если  $x < 0$ , то система 1) также имеет решение:

$$\begin{cases} 3x - (-3x) = 2\pi k \\ \sin 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3} \\ -\frac{2\pi + 2\pi n}{3} \leq x \leq \frac{-\pi - 2\pi n}{3}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi k}{3}, k < 0$$

Система 2) – решений не имеет.

б)  $|\sin 3x| = -\sin 3x = \sin(-3x)$ , если  $\sin 3x < 0$ . Тогда

$$\sin(-3x) = \sin |3x| \Leftrightarrow \sin(-3x) - \sin |3x| = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{-3x - |3x|}{2} \cdot \cos \frac{-3x + |3x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin \frac{3x + |3x|}{2} = 0 \\ \cos \frac{-3x + |3x|}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x + |3x|}{2} = \pi k \\ \frac{-3x + |3x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} 3x + |3x| = 2\pi k \\ \sin 3x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} -3x + |3x| = (2k+1)\pi \\ \sin 3x < 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , то системы 1) и 2) решений не имеют.

Если  $x < 0$ , то уравнение  $3x + |3x| = 2\pi k$  из системы 1) обращается в тождество при  $k = 0$ , а значит имеет решение при всех  $x: \sin 3x < 0$ , т.е. при всех  $x \in \left( \frac{-\pi - 2\pi n}{3}; -\frac{2\pi n}{3} \right), n = 0, 1, 2, \dots$

Система 2) – решений не имеет.

Объединяя решения пунктов а) и б), получим:

$$x \in \left[ \frac{-\pi - 2\pi n}{3}; -\frac{2\pi n}{3} \right] \cup \left[ \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi + 2\pi n}{3} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[ \frac{-\pi - 2\pi n}{3}; -\frac{2\pi n}{3} \right] \cup \left[ \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi + 2\pi n}{3} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача 5 (15 баллов)**

В параллелограмме  $ABCD$  биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $A_1$ , а биссектриса угла  $C$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $C_1$ . Площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $AA_1$ ,  $CC_1$ ,  $BC_1$  и  $DA_1$  равна 0,96. Найти острый угол параллелограмма, если  $AB = 3$  и  $BC = 5$ .

**Решение:**

Так как  $AD$  параллельна  $BC$ , то  $\angle 1 = \angle 2$  (рис. 3). По условию  $AA_1$  - биссектриса угла  $A$ , поэтому  $\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow \angle 2 = \angle 3$ , т.е.  $\triangle ABA_1$  - равнобедренный и  $AB = BA_1 = 3$ . Аналогично,  $\triangle C_1DC$  - равнобедренный и  $CD = C_1D = 3$ , поэтому  $A_1C = AC_1 = 2$  и  $AA_1CC_1$  - параллелограмм.

Площадь параллелограмма обозначим  $S$ , площади треугольников  $\triangle AMC_1$ ,  $\triangle A_1MB$  и  $\triangle AMB$  -  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  соответственно.

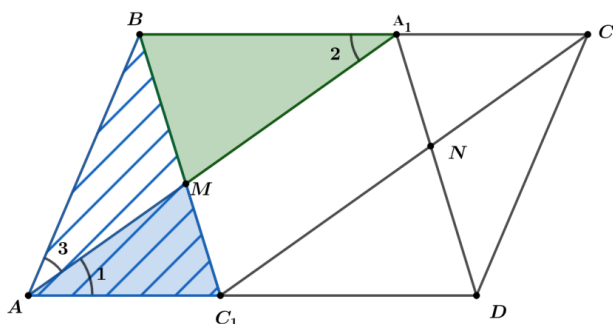


Рис.3.

$$\triangle A_1MB \text{ подобен } \triangle AMC_1: \frac{A_1B}{AC_1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{9}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{9}{4} S_1.$$

$\triangle AMB$  и  $\triangle AMC_1$  имеют общую вершину  $A$ , основания  $MB$  и  $C_1M$  лежат на одной прямой, поэтому  $\frac{S_3}{S_1} = \frac{BM}{C_1M}$ . Из подобия треугольников  $\triangle A_1MB$  и  $\triangle AMC_1$  следует, что

$$\frac{BM}{C_1M} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_3 = \frac{3}{2} S_1. \text{ Далее заметим, что } \triangle AMC_1 = \triangle CNA_1, \triangle A_1MB = \triangle C_1ND, \triangle AMB = \triangle CND.$$

Рассмотрим параллелограммы  $AA_1CC_1$  и  $ABCD$ :

$$\frac{AC_1}{AD} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{AA_1CC_1}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AA_1CC_1}}{S} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{AA_1CC_1} = \frac{2}{5} S.$$

Выразим площади параллелограммов  $AA_1CC_1$  и  $ABCD$  через площади составляющих их фигур:

$$2S_1 + 0,96 = \frac{2}{5} S, \quad 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 0,96 = S.$$

Подставляя  $S_2 = \frac{9}{4} S_1$ ,  $S_3 = \frac{3}{2} S_1$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2S_1 + 0,96 = \frac{2}{5} S \\ 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 0,96 = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 4 \\ S_1 = 0,32 \end{cases}.$$

$$S = AB \cdot BC \cdot \sin A = 3 \cdot 5 \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{4}{15} \Rightarrow A = \arcsin \frac{4}{15}.$$

$$\text{Ответ: } A = \arcsin \frac{4}{15}$$

**Задача 6 (5 баллов)**

Ученик исследует процесс теплообмена в двух одинаковых калориметрах. В первый калориметр он наливает 250 г. воды, при температуре 25 °С, затем доливает ещё столько же воды, имеющей температуру 35 °С, так что калориметр оказывается полностью заполненный. Через некоторое время, в калориметре, устанавливается температура 29 °С. В другой калориметр он наливает воду при температуре 25 °С таким образом, что она составляет треть от общего объема. Какая температура установится во втором калориметре, если его доверху заполнить водой с температурой 35°С. Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

**Решение:**

Поскольку при смешивании равных количеств горячей и холодной жидкости результирующая температура не совпадает со средним арифметическим их температур (при условии отсутствия потерь тепла в окружающую среду), необходимо учитывать теплообмен с калориметром.

Обозначим:

- $C$  — теплоёмкость калориметра;
- $C_1$  — теплоёмкость воды, занимающей половину объёма калориметра.

Тогда уравнение теплового баланса для первого смешивания воды можно записать следующим образом:

$$(C + C_1)(t_0 - t_1) = C_1(t_2 - t_0).$$

Найдем отношение теплоемкостей калориметра и половинного количества воды в калориметре:

$$\frac{C}{C_1} = \frac{t_2 + t_1 - 2t_0}{t_0 - t_1} = \frac{1}{2}$$

После рассмотрения первого случая перейдём ко второму смешиванию горячей и холодной воды в калориметре. Уравнение теплового баланса для этой ситуации принимает вид:

$$\left(C + \frac{2}{3}C_1\right)(t_x - t_1) = \frac{4}{3}C_1(t_2 - t_x),$$

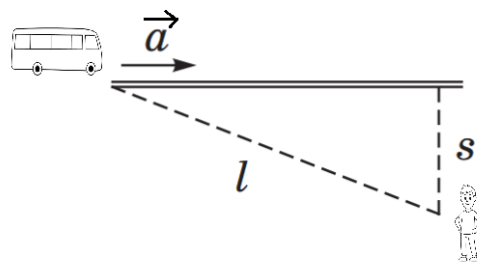
где  $t_x$  — искомая температура смеси.

$$t_x = \frac{7t_1 + 8t_2}{15} = 30,3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Ответ: 30,3 °С

**Задача 7 (7 баллов)**

Витя, выйдя из спортзала, увидел в приложении для отслеживания транспорта свой автобус. Спортзал находится на расстоянии 75 м от прямой дороги, где располагается остановка по требованию. Автобус отъезжает от предыдущей остановки, в его сторону, с постоянным ускорением  $1,2 \text{ м/с}^2$  (см. рисунок). Расстояние, по прямой, от предыдущей остановки до спортзала равно 480 м. Через какое минимальное время Витя сможет оказаться рядом с автобусом, если он умеет бегать со скоростью  $2,7 \text{ м/с}$ ? Временем разгона спортсмена можно пренебречь. Ответ округлить до сотых.

**Решение:**

## 1. Геометрия задачи:

Спортзал находится на расстоянии 75 м от дороги. Расстояние от предыдущей остановки автобуса до спортзала по прямой — 480 м. Проекция спортзала на дорогу находится на расстоянии

$$x_g = \sqrt{480^2 - 75^2} = 45\sqrt{111} \text{ м от предыдущей остановки.}$$

## 2. Уравнение встречи:

Витя бежит со скоростью  $v = 2.7 \text{ м/с}$  к точке на дороге с координатой  $x$ , а автобус начинает движение из начала координат с ускорением  $a = 1.2 \text{ м/с}^2$ .

Условие одновременного прибытия в точку  $x$ :

$$t = \frac{\sqrt{(x - x_g)^2 + 75^2}}{2,7}, \quad x = 0,6t^2.$$

Это приводит к уравнению:

$$7,29t^2 = (0,6t^2 - 45\sqrt{111})^2 + 5625.$$

## 3. Решение уравнения:

Замена  $u = t^2$  даёт квадратное уравнение:

$$0,36u^2 - (54\sqrt{111} + 7,29)u + 230400 = 0.$$

получены корни:

- $u_1 \approx 822,17$ ,
- $u_2 \approx 778,43$ .

Поскольку  $u = t^2$ , находим  $t$ :

- $t_1 = \sqrt{u_1} \approx \sqrt{822,17} \approx 28,67 \text{ с}$ ,
- $t_2 = \sqrt{u_2} \approx \sqrt{778,43} \approx 27,90 \text{ с}$ .

## 4. Выбор минимального времени:

Ситуация с меньшим временем соответствует точке встречи, где автобус ещё не достиг проекции спортзала. Это время является минимальным, так как при любом другом выборе точки встречи время увеличивается.

Ответ: 27.90 с.

**Задача 8 (10 баллов)**

Школьник, в кабинете физике, проводит опыт. Он при помощи своего дыхания и трубочки надувает мыльные пузыри. Пузыри, обладающие диаметром 23 см, и более поднимаются к потолку, а меньшего размера опускаются к полу. Температура в классе 20°C. Пренебрегая разницей давлений внутри и вне пузыря, определить толщину стенки. Молярную массу воздуха принять равной 29 г/моль.

**Решение:**

Выведем зависимость плотности от давления и температуры, опираясь на уравнение состояния идеального газа.

$$\rho = \frac{Mp_a}{RT}, \text{ где } p_a - \text{нормальное атмосферное давление } 10^5 \text{ Па.}$$

В соответствии с законом Архимеда,

$$gm = g(\rho(T_0) - \rho(T_1))V,$$

где  $m$  обозначает массу оболочки,  $T_0=20^\circ\text{C}$ ,  $T_1$  – температура которой близка к температуре человеческого тела  $36^\circ\text{C}$ . Оболочка представляет собой тонкий сферический слой, преимущественно состоящий из воды. Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Тогда:

$$\pi d D^2 \rho_v = \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) \frac{\pi D^3 M p_a}{6R}, \text{ или } d = \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) \frac{MD p_a}{6R \rho_v}$$

Переводим единицы измерения в систему СИ, и производим численную подстановку

$$d = \left( \frac{1}{293} - \frac{1}{309} \right) \frac{0,029 \cdot 0,23 \cdot 10^5}{6 \cdot 8,31 \cdot 1000} = 2,36 \cdot 10^{-6} = 2,36 \text{ мкм}$$

Ответ:  $d=2,36 \text{ мкм}$

**Задача 9 (13 баллов)**

К источнику напряжения последовательно подключают два одинаковых резистора, при этом ток постепенно снижается с 4,5 А до 3,8 А. Определить величину силы тока, протекающего через каждый резистор, после того как их подключить параллельно этому источнику.

**Решение:**

В установившемся состоянии наблюдается равенство между тепловой мощностью тока и мощностью тепловых потерь через поверхность резистора. Обозначения:  $U$  — напряжение источника,  $I_1$  — ток в установившемся режиме для двух последовательно соединённых резисторов.

$$k\Delta T = \frac{UI_1}{2}, \quad T = \frac{UI_1}{2k},$$

где  $k$  — теплопроводность поверхности резистора,  $\Delta T$  — разность температуры резистора комнатной температуры,  $I_1$  — ток в установившемся состоянии для двух последовательно соединённых резисторов. Для двух разных временных интервалов — момента включения и длительного режима работы — закон Ома представляется следующим образом:

$$U = 2R_0I_0, \quad U = 2R_0(1 + \alpha\Delta T)I_1, \quad \alpha = \frac{I_0 - I_1}{I_1\Delta T} = \frac{2(I_0 - I_1)k}{I_1^2U}.$$

Запишем закон Ома для одного резистора в случае параллельного подключения:

$$I'_1 = \frac{U}{R_0(1 + \alpha\Delta T')} = \frac{U}{R_0\left(1 + \frac{2(I_0 - I_1)kUI'_1}{I_1^2U}\right)} = \frac{2I_0}{1 + \frac{2(I_0 - I_1)I'_1}{I_1^2}}.$$

Решим получившееся квадратное уравнение, после подстановки  $I_0$  и  $I_1$

Произведем численную подстановку:

$$I_1^I = \frac{2 \cdot 4,5}{1 + \frac{2(4,5 - 3,8) \cdot I_1^I}{3,8^2}} = \frac{9}{1 + \frac{1,4 \cdot I_1^I}{14,44}}$$

Упростим дробь в знаменателе

$$14,441,4 \approx 0,09695$$

Уравнение принимает вид:

$$I_1' = 1 + 0,09695 \cdot I_1'^2$$

Избавимся от дроби (умножим обе части на знаменатель)

$$I_1' \cdot (1 + 0,09695 \cdot I_1'^2) = 9$$

Раскроем скобки:

$$I_1' + 0,09695 \cdot I_1'^3 = 9$$

Приведём к квадратному уравнению

Перенесём всё в одну сторону:

$$0,09695 \cdot I_1'^3 + I_1' - 9 = 0$$

Решим квадратное уравнение, получаем два корня, один из которых отрицательный.

Ток  $I_1'$  не может быть отрицательным, поэтому берём положительный корень:

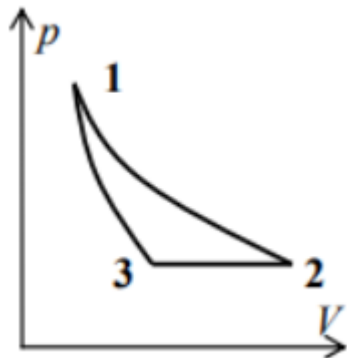
$$I_1^I \approx 5,77 \text{ А}$$

Ответ:  $I_1^I \approx 5,77 \text{ А}$

**Задача 10 (15 баллов)**

Рабочим тело тепловой машины является идеальный хлор. Машина совершает цикл, состоящий из изотермы, изобары и адиабаты, при этом модуль работы, совершаемой хлором, в изотермическом процессе в 5 раз меньше модуля работы, совершаемой в изобарном процессе. Определить, чему равен КПД такого цикла. Ответ дайте в процентах.

**Решение:**



Изобразим график процесса. Участок 12 — изотерма, 23 — изобара, 31 — адиабата.

$$\eta = \frac{A_{\text{цикл}}}{Q_{\text{пол}}},$$

КПД цикла равен:

работа за цикл:  $A_{\text{цикл}} = A_{12} + A_{23} + A_{31}$ , газ получает тепло только на изотерме  $\Delta U_{12} = 0$ , поэтому

$$Q_{\text{пол}} = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = A_{12}$$

$$A_{23} = -p_2 (v_2 - v_3) = -\nu R \Delta T, \quad \Delta T = T_2 - T_3 = T_1 - T_3,$$

По условию  $A_{12} = 5|A_{23}| = 5\nu R \Delta T$

В адиабатном процессе 31 получаем  $A_{31} = -\Delta U_{31} = -\frac{5}{2} \nu R \Delta T$

Тогда  $A_{\text{цикл}} = 5\nu R \Delta T - \nu R \Delta T - \frac{5}{2} \nu R \Delta T = 1,5\nu R \Delta T$

$$Q_{\text{пол}} = A_{12} = 5\nu R \Delta T$$

$$\eta = \frac{1,5\nu R \Delta T}{5\nu R \Delta T} = 0,3$$

Ответ:  $\eta = 30\%$



**10 КЛАСС. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.  
ВАРИАНТ 2****Задача 1 (5 баллов)**

Найти все целые значения  $x$ , при которых выражение  $x^2 - 7x + 11$  будет квадратом целого числа.

**Решение:**

Преобразуем выражение  $x^2 - 7x + 11 = \frac{(2x - 7)^2 - 5}{4}$ .

Если  $x^2 - 7x + 11 = n^2$ , то  $(2x - 7)^2 - 4n^2 = 5$ , т.е.  $(2x - 7 + 2n)(2x - 7 - 2n) = 5$ .

Рассматривая все возможные разложения 5, получим  $x \in \{2; 5\}$ .

Ответ:  $x \in \{2; 5\}$

**Задача 2 (8 баллов)**

На технической выставке представлена коллекция, включающая инновационные устройства от компаний: 3 - от DaliTech, 4 - от VanTech, 5 - от PicassoTech. Все представленные устройства были приобретены четырьмя участниками. Найти количество различных результатов распределения устройств между участниками выставки.

**Решение:**

Для устройств от компании DaliTech:  $C_{3+4-1}^{4-1} = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$  результатов;

для устройств от компании VanTech:  $C_{4+4-1}^{4-1} = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$  результатов;

для устройств от компании PicassoTech:  $C_{5+4-1}^{4-1} = C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56$  результатов.

Тогда общее количество различных результатов распределения устройств между участниками выставки:  $20 \cdot 35 \cdot 56 = 39200$ .

Ответ: 39 200.

**Задача 3 (10 баллов)**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = |x + 104| + |x + 103| + \dots + |x| + |x - 1| + \dots + |x - 104| \text{ на отрезке } [-104, 104].$$

**Решение:**

Рассмотрим свойства функции  $y(x)$ :  $y(x) > 0$ ,  $y(-x) = y(x)$ ,  $y(x)$  непрерывна на  $[-104, 104]$ . На отрезке  $[0, 104]$  функция  $y(x)$  возрастает, поэтому наименьшее значение принимает при  $x = 0$ , наибольшее – при  $x = 104$ :

$$y(0) = 2(1 + 2 + \dots + 104) = 10920, \quad y(104) = 208 + 207 + \dots + 1 = \frac{208 \cdot 209}{2} = 21736.$$

Ответ: 10920, 21736

**Задача 4 (12 баллов)**

Решить уравнение

$$\sin|2x| = |\sin 2x|$$

**Решение:**

Раскроем  $|\sin 2x|$ :

а)  $|\sin 2x| = \sin 2x$ , если  $\sin 2x \geq 0$ . Тогда



$$\sin 2x = \sin |2x| \Leftrightarrow \sin 2x - \sin |2x| = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{2x - |2x|}{2} \cdot \cos \frac{2x + |2x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{2x - |2x|}{2} = 0 \\ \cos \frac{2x + |2x|}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x - |2x|}{2} = \pi k \\ \frac{2x + |2x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} 2x - |2x| = 2\pi k \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} 2x + |2x| = (2k+1)\pi \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , то уравнение  $2x - |2x| = 2\pi k$  из системы 1) обращается в тождество при  $k = 0$ , а значит имеет решение при всех  $x: \sin 2x \geq 0$ , т.е. при всех  $x \in \left[ \pi n; \frac{\pi + 2\pi n}{2} \right]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Система 2) – решений не имеет.

Если  $x < 0$ , то система 1) также имеет решение:

$$\begin{cases} 2x - (-2x) = 2\pi k \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} \\ -\frac{2\pi + 2\pi n}{2} \leq x \leq \frac{-\pi - 2\pi n}{2}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k < 0$$

Система 2) – решений не имеет.

б)  $|\sin 2x| = -\sin 2x = \sin(-2x)$ , если  $\sin 2x < 0$ . Тогда

$$\sin(-2x) = \sin |2x| \Leftrightarrow \sin(-2x) - \sin |2x| = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{-2x - |2x|}{2} \cdot \cos \frac{-2x + |2x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin \frac{2x + |2x|}{2} = 0 \\ \cos \frac{-2x + |2x|}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x + |2x|}{2} = \pi k \\ \frac{-2x + |2x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} 2x + |2x| = 2\pi k \\ \sin 2x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} -2x + |2x| = (2k+1)\pi \\ \sin 2x < 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , то системы 1) и 2) решений не имеют.

Если  $x < 0$ , то уравнение  $2x + |2x| = 2\pi k$  из системы 1) обращается в тождество при  $k = 0$ , а значит имеет решение при всех  $x: \sin 2x < 0$ , т.е. при всех  $x \in \left( \frac{-\pi - 2\pi n}{2}; -\pi n \right]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Система 2) – решений не имеет.

Объединяя решения пунктов а) и б), получим:

$$x \in \left[ \frac{-\pi - 2\pi n}{2}; -\pi n \right] \cup \left[ \pi n; \frac{\pi + 2\pi n}{2} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[ \frac{-\pi - 2\pi n}{2}; -\pi n \right] \cup \left[ \pi n; \frac{\pi + 2\pi n}{2} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача 5 (15 баллов)**

В параллелограмме  $ABCD$  биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $A_1$ , а биссектриса угла  $C$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $C_1$ . Площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $AA_1$ ,  $CC_1$ ,  $BC_1$  и  $DA_1$  равна 1,2. Найти острый угол параллелограмма, если  $AB = 4$  и  $BC = 7$ .

**Решение:**

Так как  $AD$  параллельна  $BC$ , то  $\angle 1 = \angle 2$  (рис. 3). По условию  $AA_1$  - биссектриса угла  $A$ , поэтому  $\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow \angle 2 = \angle 3$ , т.е.  $\triangle ABA_1$  - равнобедренный и  $AB = BA_1 = 4$ . Аналогично,  $\triangle C_1DC$  - равнобедренный и  $CD = C_1D = 4$ , поэтому  $A_1C = AC_1 = 3$  и  $AA_1CC_1$  - параллелограмм.

Площадь параллелограмма обозначим  $S$ , площади треугольников  $\triangle AMC_1$ ,  $\triangle A_1MB$  и  $\triangle AMB$  -  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  соответственно.

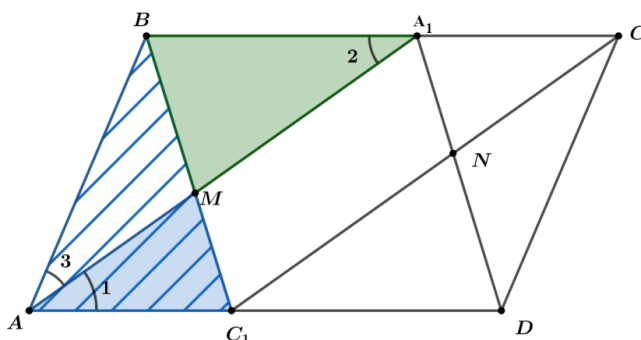


Рис.3.

$$\triangle A_1MB \text{ подобен } \triangle AMC_1: \frac{A_1B}{AC_1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{16}{9} \Rightarrow S_2 = \frac{16}{9} S_1.$$

$\triangle AMB$  и  $\triangle AMC_1$  имеют общую вершину  $A$ , основания  $MB$  и  $C_1M$  лежат на одной прямой, поэтому  $\frac{S_3}{S_1} = \frac{BM}{C_1M}$ . Из подобия треугольников  $\triangle A_1MB$  и  $\triangle AMC_1$  следует, что

$$\frac{BM}{C_1M} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_3 = \frac{4}{3} S_1. \text{ Далее заметим, что } \triangle AMC_1 = \triangle CNA_1, \triangle A_1MB = \triangle C_1ND, \triangle AMB = \triangle CND.$$

Рассмотрим параллелограммы  $AA_1CC_1$  и  $ABCD$ :

$$\frac{AC_1}{AD} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{S_{AA_1CC_1}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AA_1CC_1}}{S} = \frac{3}{7} \Rightarrow S_{AA_1CC_1} = \frac{3}{7} S.$$

Выразим площади параллелограммов  $AA_1CC_1$  и  $ABCD$  через площади составляющих их фигур:

$$2S_1 + 1,2 = \frac{3}{4} S, \quad 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 1,2 = S.$$

Подставляя  $S_2 = \frac{16}{9} S_1$ ,  $S_3 = \frac{4}{3} S_1$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2S_1 + 1,2 = \frac{3}{4} S \\ 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 1,2 = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 4,9 \\ S_1 = 0,45 \end{cases}.$$

$$S = AB \cdot BC \cdot \sin A = 4 \cdot 7 \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{4,9}{28} = \frac{7}{40} \Rightarrow A = \arcsin \frac{7}{40}.$$

Ответ:  $A = \arcsin \frac{7}{40}$



### Задача 6 (5 баллов)

Подсолнечное масло налили в U-образную трубку, малого внутреннего сечения, с длиной горизонтальной части в 8 дм. Масло заполняет вертикальные трубки так, что в каждой остается воздушная прослойка высотой 25 см. Если данную систему двигать вдоль горизонтальной оси с постоянным ускорением, не меньшим, чем величина  $a$ , то подсолнечное масло начнет выливаться. Определить величину этого ускорения. Ускорение свободного падения принять равным  $10 \text{ м/с}^2$ , плотность подсолнечного масла  $920 \text{ кг/м}^3$ . Горизонтальное колено остаётся всегда заполненным.

#### Решение:

Для горизонтального участка трубки получим следующее уравнение:

$$ma = F_{\text{л}} - F_{\text{п}}$$

$$\rho L \cdot Sa = (P_0 + \rho g H_0) \cdot S - (P_0 + \rho g (H_0 - 2H)) \cdot S$$

$$\rho La = P_0 + \rho g H_0 - P_0 - \rho g (H_0 - 2H)$$

$$\rho La = \rho g H_0 - \rho g H_0 + 2\rho g H$$

$$\text{Тогда } a_0 = g \frac{2H}{L}$$

$$a = 10 \cdot \frac{2 \cdot 0,25}{0,8} = 6,25 \text{ м/с}^2$$

Ответ:  $a = 6,25 \text{ м/с}^2$

**Задача 7 (7 баллов)**

Ракета-носитель выводит на орбиту спутник связи. Старт с пусковой установки осуществляется вертикально. Через 25 секунд полета начала полета вес спутника увеличился в 1,4 раза (относительно веса перед стартом), а к 55 секунде полёта вес был уже в 1,9 раз больше, чем перед стартом. Определите скорость вытекания продуктов сгорания относительно сопла, считая её постоянной. Массовый расход топлива считать постоянным, а  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха и изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

**Решение:**

Пусть  $m_0$  — это начальная масса ракеты. Соответственно, масса ракеты в момент времени  $t$  выражается как  $m = m_0 - \mu t$ ,  $\mu = -\frac{\Delta m}{\Delta t}$  — массовый расход топлива. Тогда за малое время

$$\Delta t - mg\Delta t = m\Delta V - u(-\Delta m).$$

$$-mg = m\frac{\Delta V}{\Delta t} + u\frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

$$(m_0 - \mu t)(g + a) = \mu u$$

Если к моменту времени  $t$ , когда ускорение  $a$ , вес увеличился в  $k$  раз, то

$$km_c g = (a + g)m_c, \text{ где } m_c \text{ — масса спутника,}$$

Из последних двух уравнений

$$(m_0 - \mu t)kg = \mu u$$

Для моментов  $t_1$  и  $t_2$  имеем

$$(m_0 - \mu t_1)k_1 g = \mu u \quad \text{и} \quad (m_0 - \mu t_2)k_2 g = \mu u, \text{ тогда}$$

$$u = \frac{k_1 k_2 g (t_2 - t_1)}{k_2 - k_1}$$

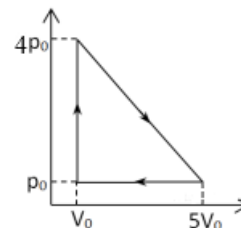
Произведем численную подстановку:

$$u = 1596 \text{ м/с}$$

Ответ:  $u = 1596 \text{ м/с}$

**Задача 8 (10 баллов)**

Озон совершает замкнутый цикл тепловой машины. Цикл состоит из трех участков представлен на рисунке. Считая газ идеальным, определить КПД такой тепловой машины.

**Решение:**

Найдем КПД как отношение работы, совершенной за цикл к полученной от нагревателя теплоте, для этого рассмотрим поочередно участки цикла

Обозначим состояния:

1.  $(P_0, V_0)$
2.  $(4P_0, V_0)$  — изохорный нагрев.
3.  $(P_0, 5V_0)$  — расширение (линейный процесс на графике  $P-V$ ).
4. Возврат в точку 1:  $(P_0, 5V_0) \rightarrow (P_0, V_0)$  — изобарное сжатие.

Полезная работа цикла численно равна площади фигуры на  $P-V$  диаграмме (в данном случае — прямоугольного треугольника):

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{основание} \cdot \text{высота} = \frac{1}{2} \cdot (5V_0 - V_0) \cdot (4P_0 - P_0)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4V_0 \cdot 3P_0 = 6P_0V_0$$

**Определение подведенного тепла  $Q_{in}$** 

Тепло подводится на тех участках, где температура растет и/или газ совершает работу против внешних сил.

**• Участок 1–2 (Изохора):**

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = 3 \cdot \Delta(PV) = 3 \cdot (4P_0V_0 - P_0V_0) = 9P_0V_0$$

(Тепло поглощается,  $Q > 0$ ).

**• Участок 2–3 (Линейное расширение):**

Здесь меняются и давление, и объем. Согласно первому закону термодинамики:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23}$$

$$\Delta U_{23} = 3 \cdot (P_3V_3 - P_2V_2) = 3 \cdot (P_0 \cdot 5V_0 - 4P_0 \cdot V_0) = 3P_0V_0$$

$A_{23}$  — площадь трапеции под графиком:

$$A_{23} = \frac{4P_0 + P_0}{2} \cdot (5V_0 - V_0) = \frac{5P_0}{2} \cdot 4V_0 = 10P_0V_0$$

$$Q_{23} = 3P_0V_0 + 10P_0V_0 = 13P_0V_0$$

(Тепло поглощается,  $Q > 0$ ).

**• Участок 3–1 (Изобара):**

Здесь газ сжимается и охлаждается, тепло отдается холодильнику ( $Q < 0$ ).

**Суммарное подведенное тепло:**

$$Q_{in} = Q_{12} + Q_{23} = 9P_0V_0 + 13P_0V_0 = 22P_0V_0$$



Коэффициент полезного действия тепловой машины вычисляется по формуле:

$$\eta = \frac{A}{Q_{in}} = \frac{6P_0V_0}{22P_0V_0} = \frac{3}{11} \approx 0,2727$$

Ответ: 27%

### Задача 9 (13 баллов)

В середине ангара взрывается ракета фейерверка массой 360 г, распадаясь на три осколка равной массы и обладающими одинаковыми начальными скоростями. Первый продолжает движение по исходной траектории, а два других разлетаются только в вертикальной плоскости, причём угол между их направлениями составляет  $60^\circ$ . Осколок летевший прямо ударяется о стену ангара через 2 с после взрыва, а время между приземлением двух других осколков равно 1,5 с. Когда один из осколков коснулся крыши ангара, его скорость была направлена горизонтально. Все удары считать абсолютно упругими. Определить высоту и длину ангара. Ускорение свободного падения принять равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

#### Решение:

При горизонтальном движении ракета за время  $t_1$  пройдёт расстояние  $L/2$  и столкнётся со стеной. При вертикальном запуске ракета достигнет максимальной высоты своей траектории — крыши ангара. Эти движения описываются законами баллистики для тела, брошенного под углом. Введём обозначения:  $L$  (длина ангара),  $H$  (высота ангара).

$$\frac{L}{2} = v_0 t_1, \quad \frac{H}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

В силу горизонтальности движения ракеты до разрыва, по закону сохранения импульса суммарная вертикальная составляющая импульса осколков равна нулю. При угле разлёта осколков  $60^\circ$  это означает, что каждый из осколков с вертикальной скоростью движется под углом  $30^\circ$  к горизонту. Время полёта тела, брошенного под углом, задаёт разницу во времени прибытия верхнего и нижнего осколков.

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \rightarrow v_0 = \frac{g\tau}{2 \sin \alpha}$$

Полученное значение подставляем в уравнения для высоты и длины ангара

$$L = \frac{g\tau t_1}{\sin \alpha} = 2g\tau t_1, \quad H = \frac{g\tau^2}{4}$$

Подставим численные значения:

$L=60 \text{ м}$ ,  $H=5,625 \text{ м}$

Ответ:  $L=60 \text{ м}$ ,  $H=5,625 \text{ м}$

**Задача 10 (15 баллов)**

Троллейбус движется по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью, КПД его двигателя равен 87%, при потреблении тока силой в 120 А. Затем троллейбус движется под уклон с той же скоростью без потребления электроэнергии. Найти значение силы тока, потребляемую двигателем троллейбуса, при движении в этот же уклон на обратном пути.

**Решение:**

Введём обозначения для следующих величин:

- напряжение в троллейбусной сети:  $U_0$ ;
- сила тока на горизонтальном участке:  $I_1$ ;
- сила тока при движении вверх по наклонному участку:  $I_2$ ;
- полное сопротивление цепи (двигатель + контактные провода):  $R$ ;
- модуль мощности силы трения:  $P_{\text{тр}}$ ;
- модуль мощности силы тяжести:  $P_{\text{т}}$ .

При движении троллейбуса по горизонтальному участку пути мощность тока, потребляемая от сети, равна  $P = U_0 I_1$ . Часть этой мощности теряется в виде джоулева тепла  $I_1^2 R$ , выделяющегося на полном сопротивлении  $R$ . Поэтому КПД двигателя:

$$\eta = \frac{U_0 I_1 - I_1^2 R}{U_0 I_1} = 1 - \frac{I_1 R}{U_0}$$

Согласно закону сохранения и превращения энергии, при движении трамвая с постоянной скоростью по горизонтальному участку пути полезная мощность  $\eta U_0 I_1$  должна быть равна мощности силы трения  $P_{\text{тр}}$ :

$$\eta U_0 I_1 = P_{\text{тр}}$$

Для движения троллейбуса вниз по уклону с неизменной скоростью и выключенным двигателем необходимо, чтобы мощность силы тяжести была равна абсолютному значению мощности сил трения:

$$P_{\text{тр}} = P_{\text{т}}$$

а при движении по этому же наклонному участку пути вверх мощность, потребляемая из сети, будет расходоваться на джоулево тепло и на совершение работы против сил трения и тяжести:

$$U_0 I_2 = I_2^2 R + P_{\text{тр}} + P_{\text{т}} = I_2^2 R + 2\eta U_0 I_1$$
$$I_2^2 \frac{R}{U_0} - I_2 + 2\eta I_1 = 0.$$

$$\frac{R}{U_0} = \frac{1 - \eta}{I_1}$$

$$I_2^2 (1 - \eta) - I_1 I_2 + 2\eta I_1^2 = 0.$$

$$I_2^2 \cdot 0,13 - 120 I_2 + 25056 = 0$$

При решении квадратного уравнения получается два действительных корня:  
 $I_2 = 603,94$  А,  $I_2 = 319,13$  А.

Ответ:  $I_2 = 603,94$  А,  $I_2 = 319,13$  А.





## 10 КЛАСС. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.

## ВАРИАНТ 3

**Задача 1 (5 баллов)**

Найти все целые значения  $x$ , при которых выражение  $x^2 - 5x + 4$  будет квадратом целого числа.

**Решение:**

Преобразуем выражение  $x^2 - 5x + 4 = \frac{(2x-5)^2 - 9}{4}$ .

Если  $x^2 - 5x + 4 = n^2$ , то  $(2x-5)^2 - 4n^2 = 9$ , т.е.  $(2x-5+2n)(2x-5-2n) = 9$ .

Рассматривая все возможные разложения 9, получим  $x \in \{0; 1; 4; 5\}$ .

Ответ:  $x \in \{0; 1; 4; 5\}$ .

**Задача 2 (8 баллов)**

На технической выставке представлена коллекция, включающая инновационные устройства от компаний: 3 - от компании DaliTech, 4 - от VanTech, 6 - от PicassoTech. Все представленные устройства были приобретены четырьмя участниками. Найти количество различных результатов распределения устройств между участниками выставки.

**Решение:**

Для устройств от компании DaliTech:  $C_{3+4-1}^{4-1} = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$  результатов;

для устройств от компании VanTech:  $C_{4+4-1}^{4-1} = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$  результатов;

для устройств от компании PicassoTech:  $C_{6+4-1}^{4-1} = C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84$  результатов.

Тогда общее количество различных результатов распределения устройств между участниками выставки:  $20 \cdot 35 \cdot 84 = 58800$ .

Ответ: 58800.

**Задача 3 (10 баллов)**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = |x+106| + |x+105| + \dots + |x| + |x-1| + \dots + |x-106| \text{ на отрезке } [-106, 106].$$

**Решение:**

Рассмотрим свойства функции  $y(x)$ :  $y(x) > 0$ ,  $y(-x) = y(x)$ ,  $y(x)$  непрерывна на  $[-106, 106]$ . На отрезке  $[0, 106]$  функция  $y(x)$  возрастает, поэтому наименьшее значение принимает при  $x = 0$ , наибольшее – при  $x = 106$ :

$$y(0) = 2(1 + 2 + \dots + 106) = 11342, \quad y(106) = 212 + 211 + \dots + 1 = \frac{212 \cdot 213}{2} = 22578.$$

Ответ: 11342, 22578

**Задача 4 (12 баллов)**

Решить уравнение

$$\sin|5x| = |\sin 5x|$$

**Решение:**

Раскроем  $|\sin 5x|$ :

а)  $|\sin 5x| = \sin 5x$ , если  $\sin 5x \geq 0$ . Тогда



$$\sin 5x = \sin |5x| \Leftrightarrow \sin 5x - \sin |5x| = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{5x - |5x|}{2} \cdot \cos \frac{5x + |5x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{5x - |5x|}{2} = 0 \\ \cos \frac{5x + |5x|}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x - |5x|}{2} = \pi k \\ \frac{5x + |5x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} 5x - |5x| = 2\pi k \\ \sin 5x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} 5x + |5x| = (2k+1)\pi \\ \sin 5x \geq 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , то уравнение  $5x - |5x| = 2\pi k$  из системы 1) обращается в тождество при  $k = 0$ , а значит имеет решение при всех  $x: \sin 5x \geq 0$ , т.е. при всех  $x \in \left[ \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi + 2\pi n}{5} \right]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Система 2) – решений не имеет.

Если  $x < 0$ , то система 1) также имеет решение:

$$\begin{cases} 5x - (-5x) = 2\pi k \\ \sin 5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{5} \\ -\frac{2\pi + 2\pi n}{5} \leq x \leq \frac{-\pi - 2\pi n}{5}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi k}{5}, k < 0$$

Система 2) – решений не имеет.

б)  $|\sin 5x| = -\sin 5x = \sin(-5x)$ , если  $\sin 5x < 0$ . Тогда

$$\sin(-5x) = \sin |5x| \Leftrightarrow \sin(-5x) - \sin |5x| = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{-5x - |5x|}{2} \cdot \cos \frac{-5x + |5x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin \frac{5x + |5x|}{2} = 0 \\ \cos \frac{-5x + |5x|}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x + |5x|}{2} = \pi k \\ \frac{-5x + |5x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} 5x + |5x| = 2\pi k \\ \sin 5x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} -5x + |5x| = (2k+1)\pi \\ \sin 5x < 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , то системы 1) и 2) решений не имеют.

Если  $x < 0$ , то уравнение  $5x + |5x| = 2\pi k$  из системы 1) обращается в тождество при  $k = 0$ , а значит имеет решение при всех  $x: \sin 5x < 0$ , т.е. при всех  $x \in \left( \frac{-\pi - 2\pi n}{5}; -\frac{2\pi n}{5} \right)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Система 2) – решений не имеет.

Объединяя решения пунктов а) и б), получим:

$$x \in \left[ \frac{-\pi - 2\pi n}{5}; -\frac{2\pi n}{5} \right) \cup \left[ \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi + 2\pi n}{5} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[ \frac{-\pi - 2\pi n}{5}; -\frac{2\pi n}{5} \right) \cup \left[ \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi + 2\pi n}{5} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача 5 (15 баллов)**

В параллелограмме  $ABCD$  биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $A_1$ , а биссектриса угла  $C$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $C_1$ . Площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $AA_1$ ,  $CC_1$ ,  $BC_1$  и  $DA_1$  равна 3,75. Найти острый угол параллелограмма, если  $AB=5$  и  $BC=8$ .

Решение:

Так как  $AD$  параллельна  $BC$ , то  $\angle 1 = \angle 2$  (рис. 3). По условию  $AA_1$  - биссектриса угла  $A$ , поэтому  $\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow \angle 2 = \angle 3$ , т.е.  $\triangle ABA_1$  - равнобедренный и  $AB = BA_1 = 5$ . Аналогично,  $\triangle C_1DC$  - равнобедренный и  $CD = C_1D = 5$ , поэтому  $A_1C = AC_1 = 3$  и  $AA_1CC_1$  - параллелограмм.

Площадь параллелограмма обозначим  $S$ , площади треугольников  $\triangle AMC_1$ ,  $\triangle A_1MB$  и  $\triangle AMB$  -  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  соответственно.

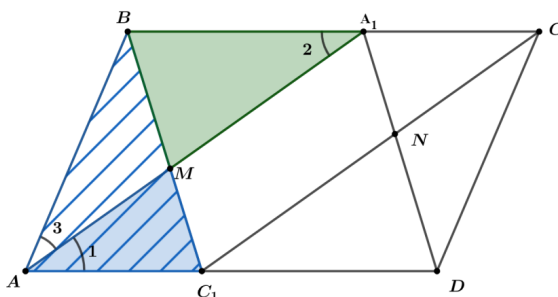


Рис.3.

$$\triangle A_1MB \text{ подобен } \triangle AMC_1: \frac{A_1B}{AC_1} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{25}{9} \Rightarrow S_2 = \frac{25}{9} S_1.$$

$\triangle AMB$  и  $\triangle AMC_1$  имеют общую вершину  $A$ , основания  $MB$  и  $C_1M$  лежат на одной прямой, поэтому  $\frac{S_3}{S_1} = \frac{BM}{C_1M}$ . Из подобия треугольников  $\triangle A_1MB$  и  $\triangle AMC_1$  следует, что  $\frac{BM}{C_1M} = \frac{5}{3} \Rightarrow S_3 = \frac{5}{3} S_1$ . Далее заметим, что  $\triangle AMC_1 = \triangle CNA_1$ ,  $\triangle A_1MB = \triangle C_1ND$ ,  $\triangle AMB = \triangle CND$ .

Рассмотрим параллелограммы  $AA_1CC_1$  и  $ABCD$ :

$$\frac{AC_1}{AD} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{S_{AA_1CC_1}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AA_1CC_1}}{S} = \frac{3}{8} \Rightarrow S_{AA_1CC_1} = \frac{3}{8} S.$$

Выразим площади параллелограммов  $AA_1CC_1$  и  $ABCD$  через площади составляющих их фигур:

$$2S_1 + 3,75 = \frac{3}{8} S, \quad 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 3,75 = S.$$

Подставляя  $S_2 = \frac{25}{9} S_1$ ,  $S_3 = \frac{5}{3} S_1$ , получим систему уравнений

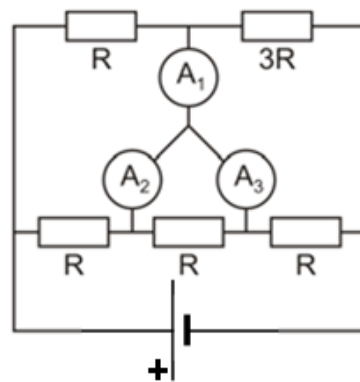
$$\begin{cases} 2S_1 + 3,75 = \frac{3}{8} S \\ 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 3,75 = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 16 \\ S_1 = 1,125 \end{cases}.$$

$$S = AB \cdot BC \cdot \sin A = 5 \cdot 8 \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} \Rightarrow A = \arcsin \frac{2}{5}.$$

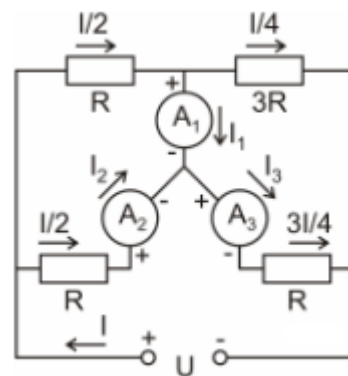
Ответ:  $A = \arcsin \frac{2}{5}$

**Задача 6 (5 баллов)**

Школьник, выполняя исследовательскую работу, собрал цепь, состоящую из пяти резисторов, изображённую на рисунке, и подсоединил её к источнику с постоянным напряжением в 27 В. Сопротивления резисторов указаны на схеме. Определить значение сопротивления  $R$ , а также показания амперметров 2 и 3, если амперметр  $A_1$  показывает ток в 250 мА. Сопротивления амперметров и подводящих проводов пренебрежимо малы.

**Решение:**

Отметим, что средний резистор в нижнем ряду закорочен с помощью амперметров 2 и 3, в результате чего через него не протекает ток. Следовательно, мы можем исключить этот резистор из анализа. Учитывая, что сопротивление амперметров незначительно, рассматриваемая цепь состоит из двух пар параллельных резисторов. Изобразим токи, проходящие через цепь, и обозначим  $I$  как общий ток, поступающий от источника.



Таким образом, основываясь на законах параллельного соединения, можно установить, что токи, протекающие через резисторы в левой паре, равны  $\frac{I}{2}$ , как и токи, проходящие через резисторы в правой паре  $\frac{I}{4}$  и  $\frac{3I}{4}$ . Из этого следует, что мы можем определить значения силы тока, измеряемые каждым из амперметров:

$$I_1 = \frac{I}{4}, I_2 = \frac{I}{2}, I_3 = \frac{3I}{4}$$

$$I = I_1 \cdot 4 = 0,25 \cdot 4 = 1 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ A}, I_3 = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ A}$$

Чтобы найти  $R$ , запишем общее напряжение в цепи

$$U = \frac{IR}{2} + \frac{3IR}{4} = \frac{5IR}{4}, \quad R = \frac{4U}{5I}$$

$$R = \frac{4 \cdot 27}{5} = 21,6 \text{ Ом}$$

Ответ:  $I_2 = 0,5 \text{ A}$ ;  $I_3 = 0,75 \text{ A}$ ;  $R = 21,6 \text{ Ом}$

**Задача 7 (7 баллов)**

Садовый разбрызгиватель осуществляет полив огорода. Капли воды вылетают из сопла во все стороны со скоростью 0,6 м/с. На какую высоту, относительно уровня земли, нужно поднять разбрызгиватель, чтобы увеличить площадь орошения в 2,5 раза. Ускорение свободного падения 10 м/с<sup>2</sup>, сопротивлением воздуха пренебречь.

**Решение:**

Вектор, описывающий смещение капли за период полёта длительностью  $t$

$$L = \frac{gt^2}{2} + vt,$$

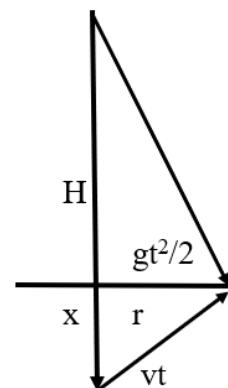
$g$  — ускорение падения,  $v$  — начальная скорость. Рис. отвечает ситуации, когда у  $v$  положительная проекция на вертикаль, тогда

$$\frac{gt^2}{2} = H + x,$$

где  $x$  — проекция  $vt$  на вертикаль, а  $H$  высота разбрызгивателя над землёй. Отрицательной проекции отвечает отрицательное  $x$ . Расстояние  $r$ , пройденное по горизонтали, выразим через теорему Пифагора:

$$r^2 = (vt)^2 - x^2.$$

$$t^2 = \frac{2(H+x)}{g}.$$



Площадь полива определяется максимальным значением  $r^2$ , которое выражено квадратным трёхчленом по  $x$ . Приведением к полному квадрату, использованием симметрии параболы, с помощью ли производной можно найти максимальное значение:

$$S_{\max} = 2,5S_0$$

$$R_{\max}^2 = 2,5r_0^2$$

$$r_{\max}^2 = \frac{2v^2H}{g} + \frac{v^4}{g^2}.$$

$$0,09 = 0,075 \cdot H + 0,001296$$

$$H = 1,18272 \approx 1,18 \text{ м}$$

Ответ:  $H \approx 1,18 \text{ м}$

**Задача 8 (10 баллов)**

Гелий (идеальный газ) проходит термодинамический процесс, в ходе которого давление убывает линейно по мере увеличения объёма. Известно, что конечное давление составляет половину начального, а конечный объём в 4 раза превышает начальный. Найдите отношение количества теплоты, полученной газом, к изменению его внутренней энергии.

**Решение:**

Работа, совершенная газом в рассматриваемом процессе,

$$A = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1),$$

изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Согласно первому закону термодинамики

$$\Delta Q = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) + \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Искомое отношение равно

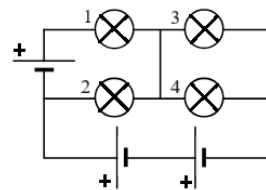
$$k = \frac{4p_2 V_2 - 4p_1 V_1 + p_1 V_2 - p_2 V_1}{3(p_2 V_2 - p_1 V_1)} = \frac{4 \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} - 4 + \frac{V_2}{V_1} - \frac{p_2}{p_1}}{3 \left( \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} - 1 \right)}$$

$$k=2,5$$

Ответ: 2,5

**Задача 9 (12 баллов)**

Ученик собрал электрическую цепь, состоящую из трех батареек с напряжением по 9 В, каждая, и четырех одинаковых ламп накаливания. Сопротивление подводящих проводив пренебрежимо мало. Определить величину напряжения на каждой лампочке.

**Решение:**

Несложно заметить, что напряжение на 3 и 4 лампочках будут давать одинаковое значение:  $U_3 = U_4$ .

Поскольку сумма напряжений на элементах любого замкнутого контура равна нулю, то для второй и четвертой лампочки имеем  $U_2 + U_4 = 2U$ . Для первой и третьей  $U_1 + U_3 = 3U$ . С другой стороны, лампочки одинаковы, следовательно, напряжения на них пропорциональны токам через них. Но сумма токов, текущих через первую и вторую лампочку, равна сумме токов, текущих через третью и четвертую. Поэтому  $U_3 + U_4 = U_1 + U_2$ .

Решая эту систему уравнений, получим:

$$U_1 = \frac{7U}{4}, U_2 = \frac{3U}{4}, U_3 = U_4 = \frac{5U}{4}.$$

$$U_1=15,75 \text{ В}, U_2=6,75 \text{ В}, U_3=U_4=11,25 \text{ В}.$$

Ответ:  $U_1=15,75 \text{ В}, U_2=6,75 \text{ В}, U_3=U_4=11,25 \text{ В}.$

**Задача 10 (15 баллов)**

В пространстве расположен куб с длиной ребра 35 см. В каждой из вершин куба находится бусинка массой 2 грамма, несущая электрический заряд 15 мКл. Определить скорость, которую разовьют бусинки после того, как их отпустят.

**Решение:**

Используем закон сохранения энергии:

$$\frac{8mv^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i,$$

где  $\varphi_i$  — электростатический потенциал в точке, в которой находится  $i$ -тая бусинка. Учитывая, что все бусинки тождественны, закон сохранения энергии принимает вид  $mv^2 = q\varphi$ . Вклад в потенциал дают 3 бусинки, которые находятся на соседних вершинах

$$\left( \varphi_1 = \frac{kq}{l} \right)$$

3 бусинки, которые находятся на диагоналях граней

$$\left( \varphi_2 = \frac{kq}{l\sqrt{2}} \right)$$

1 бусинка, которая находится на противоположной вершине

$$\left( \varphi_3 = \frac{kq}{l\sqrt{3}} \right)$$

Общий потенциал:  $\varphi = 3\varphi_1 + 3\varphi_2 + \varphi_3$ .

$$v = \sqrt{\frac{q\varphi}{m}} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{kq^2}{ml}} \cdot \sqrt{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{2}} + 3 \right)}.$$

$$v \approx 0,0873 \text{ м/с}$$

Ответ:  $v \approx 0,0873 \text{ м/с}$



## 10 КЛАСС. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ.

## ВАРИАНТ 4

## Задача 1 (5 баллов)

Найти все целые значения  $x$ , при которых выражение  $x^2 - 9x + 18$  будет квадратом целого числа.

**Решение:**

Преобразуем выражение  $x^2 - 9x + 18 = \frac{(2x-9)^2 - 9}{4}$ .

Если  $x^2 - 9x + 18 = n^2$ , то  $(2x-9)^2 - 4n^2 = 9$ , т.е.  $(2x-9+2n)(2x-9-2n) = 9$ .

Рассматривая все возможные разложения 9, получим  $x \in \{2; 3; 6; 7\}$ .

Ответ:  $x \in \{2; 3; 6; 7\}$

## Задача 2 (8 баллов)

На технической выставке представлена коллекция, включающая инновационные устройства от компаний: 4 - от DaliTech, 5 - от VanTech, 7 от PicassoTech. На выставке присутствуют 5 технологических компаний-участников. Все представленные устройства были приобретены пятью участниками. Найти количество различных результатов распределения устройств между участниками выставки.

**Решение:**

Для устройств от компании DaliTech:  $C_{4+5-1}^{5-1} = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$  результатов;

для устройств от компании VanTech:  $C_{5+5-1}^{5-1} = C_9^4 = \frac{9!}{4!5!} = 126$  результатов;

для устройств от компании PicassoTech:  $C_{7+5-1}^{5-1} = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!7!} = 330$  способов.

Тогда общее количество различных результатов распределения устройств между участниками выставки:

$$70 \cdot 126 \cdot 330 = 2910600$$

Ответ: 2910600.

## Задача 3 (10 баллов)

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = |x+102| + |x+101| + \dots + |x| + |x-1| + \dots + |x-102| \text{ на отрезке } [-102, 102].$$

**Решение:**

Рассмотрим свойства функции  $y(x): y(x) > 0$ ,  $y(-x) = y(x)$ ,  $y(x)$  непрерывна на  $[-102, 102]$ .

На отрезке  $[0, 102]$  функция  $y(x)$  возрастает, поэтому наименьшее значение принимает при  $x = 0$ , наибольшее – при  $x = 102$ :

$$y(0) = 2(1 + 2 + \dots + 102) = 10506, \quad y(102) = 204 + 203 + \dots + 1 = \frac{204 \cdot 205}{2} = 20910.$$

Ответ: 10506, 20910

## Задача 4 (12 баллов)

Решить уравнение

$$\sin|4x| = |\sin 4x|$$

**Решение:**

Раскроем  $|\sin 4x|$ :

а)  $|\sin 4x| = \sin 4x$ , если  $\sin 4x \geq 0$ . Тогда





$$\sin 4x = \sin |4x| \Leftrightarrow \sin 4x - \sin |4x| = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{4x - |4x|}{2} \cdot \cos \frac{4x + |4x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{4x - |4x|}{2} = 0 \\ \cos \frac{4x + |4x|}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x - |4x|}{2} = \pi k \\ \frac{4x + |4x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} 4x - |4x| = 2\pi k \\ \sin 4x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} 4x + |4x| = (2k+1)\pi \\ \sin 4x \geq 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , то уравнение  $4x - |4x| = 2\pi k$  из системы 1) обращается в тождество при  $k = 0$ , а значит имеет решение при всех  $x: \sin 4x \geq 0$ , т.е. при всех  $x \in \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi + 2\pi}{4} \right]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Система 2) – решений не имеет.

Если  $x < 0$ , то система 1) также имеет решение:

$$\begin{cases} 4x - (-4x) = 2\pi k \\ \sin 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{4} \\ -\frac{2\pi + 2\pi n}{4} \leq x \leq \frac{-\pi - 2\pi n}{4}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi k}{4}, k < 0$$

Система 2) – решений не имеет.

б)  $|\sin 4x| = -\sin 4x = \sin(-4x)$ , если  $\sin 4x < 0$ . Тогда

$$\sin(-4x) = \sin |4x| \Leftrightarrow \sin(-4x) - \sin |4x| = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{-4x - |4x|}{2} \cdot \cos \frac{-4x + |4x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin \frac{4x + |4x|}{2} = 0 \\ \cos \frac{-4x + |4x|}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x + |4x|}{2} = \pi k \\ \frac{-4x + |4x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} 4x + |4x| = 2\pi k \\ \sin 4x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} -4x + |4x| = (2k+1)\pi \\ \sin 4x < 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , то системы 1) и 2) решений не имеют.

Если  $x < 0$ , то уравнение  $4x + |4x| = 2\pi k$  из системы 1) обращается в тождество при  $k = 0$ ,

а значит имеет решение при всех  $x: \sin 4x < 0$ , т.е. при всех  $x \in \left( \frac{-\pi - 2\pi n}{4}; -\frac{\pi}{2} \right]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Система 2) – решений не имеет.

Объединяя решения пунктов а) и б), получим:

$$x \in \left[ \frac{-\pi - 2\pi n}{4}; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi + 2\pi n}{4} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[ \frac{-\pi - 2\pi n}{4}; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi + 2\pi n}{4} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача 5 (15 баллов)**

В параллелограмме  $ABCD$  биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $A_1$ , а биссектриса угла  $C$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $C_1$ . Площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $AA_1$ ,  $CC_1$ ,  $BC_1$  и  $DA_1$  равна 2. Найти острый угол параллелограмма, если  $AB = 5$  и  $BC = 7$ .

**Решение:**

Так как  $AD$  параллельна  $BC$ , то  $\angle 1 = \angle 2$  (рис. 3). По условию  $AA_1$  - биссектриса угла  $A$ , поэтому  $\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow \angle 2 = \angle 3$ , т.е.  $\triangle ABA_1$  - равнобедренный и  $AB = BA_1 = 5$ . Аналогично,  $\triangle C_1DC$  - равнобедренный и  $CD = C_1D = 5$ , поэтому  $A_1C = AC_1 = 2$  и  $AA_1CC_1$  - параллелограмм.

Площадь параллелограмма обозначим  $S$ , площади треугольников  $\triangle AMC_1$ ,  $\triangle A_1MB$  и  $\triangle AMB$  -  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  соответственно.

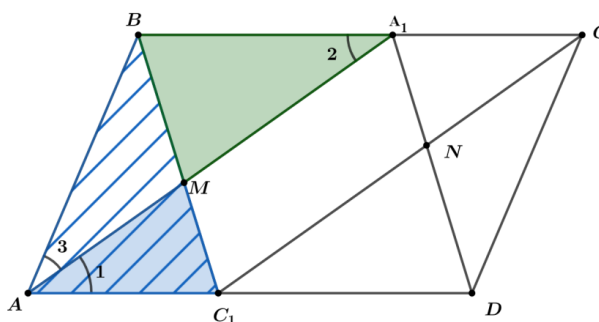


Рис.3.

$$\triangle A_1MB \text{ подобен } \triangle AMC_1: \frac{A_1B}{AC_1} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{25}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{25}{4} S_1.$$

$\triangle AMB$  и  $\triangle AMC_1$  имеют общую вершину  $A$ , основания  $MB$  и  $C_1M$  лежат на одной прямой, поэтому  $\frac{S_3}{S_1} = \frac{BM}{C_1M}$ . Из подобия треугольников  $\triangle A_1MB$  и  $\triangle AMC_1$  следует, что

$$\frac{BM}{C_1M} = \frac{5}{2} \Rightarrow S_3 = \frac{5}{2} S_1. \text{ Далее заметим, что } \triangle AMC_1 = \triangle CNA_1, \triangle A_1MB = \triangle C_1ND, \triangle AMB = \triangle CND.$$

Рассмотрим параллелограммы  $AA_1CC_1$  и  $ABCD$ :

$$\frac{AC_1}{AD} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{S_{AA_1CC_1}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AA_1CC_1}}{S} = \frac{2}{7} \Rightarrow S_{AA_1CC_1} = \frac{2}{7} S.$$

Выразим площади параллелограммов  $AA_1CC_1$  и  $ABCD$  через площади составляющих их фигур:

$$2S_1 + 2 = \frac{2}{7} S, \quad 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2 = S.$$

Подставляя  $S_2 = \frac{25}{4} S_1$ ,  $S_3 = \frac{5}{2} S_1$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2S_1 + 2 = \frac{2}{7} S \\ 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2 = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 9,8 \\ S_1 = 0,4 \end{cases}$$

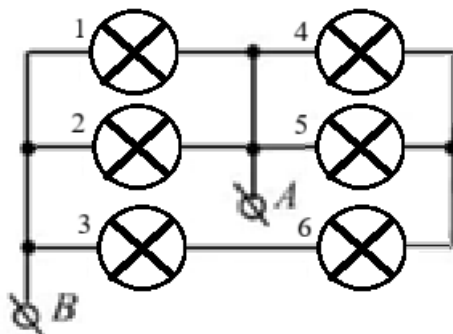
$$S = AB \cdot BC \cdot \sin A = 5 \cdot 7 \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{9,8}{35} = \frac{7}{25} \Rightarrow A = \arcsin \frac{7}{25}.$$

Ответ:  $A = \arcsin \frac{7}{25}$



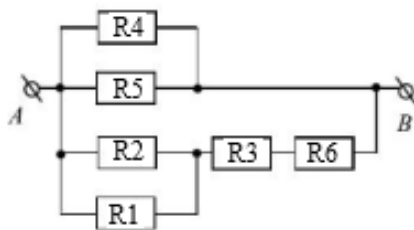
**Задача 6 (5 баллов)**

Ученик составил электрическую цепь, состоящую из 6 лам накаливания. Определите сопротивление участка цепи между контактами А и В, если сопротивление лам имеют следующие значения:  $R_1=R_2=R_3=60\text{ Ом}$ , а  $R_4=R_5=R_6=30\text{ Ом}$ .



**Решение:**

Упрощая исходную схему, нарисует эквивалентную, сопротивление которой поэтапно рассчитывается стандартными методами и равно:



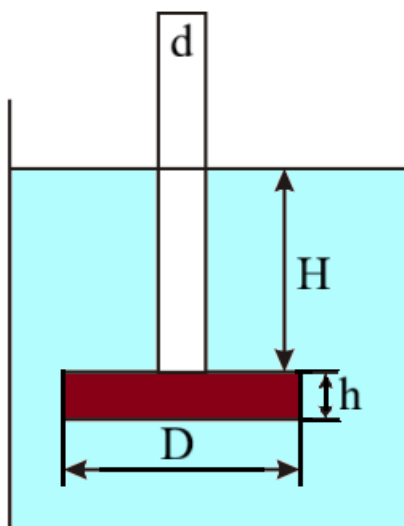
90

$$R_{AB} = \frac{4}{9} R = \frac{4}{9} \cdot 30 = 13,3\text{ Ом}$$

Ответ: 13,3 Ом.

**Задача 7 (7 баллов)**

Однородную полиэтиленовую пластину, имеющую форму диска, прикладывают к нижнему концу тонкостенной стеклянной трубки диаметром  $d=1,5$  см. Данную конструкцию погружают в воду, придерживая снизу. Диаметр пластины  $D=6$  см, а её толщина  $h=8$  мм. Определить глубину погружения пластины  $H$ , при которой она не оторвётся от трубки, если её отпустить. Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ , а плотность полиэтилена  $1500 \text{ кг/м}^3$ . Между трубкой и пластиной вода не проникает.

**Решение:**

Пусть  $R$  — радиус пластины,  $r$  — радиус трубки, а  $d$  — толщина пластины. Найдём выталкивающую силу  $F_A$ , действующую на пластину. Силы давления воды на верхнюю и нижнюю стороны пластины (соответственно,  $F_1$  и  $F_2$ ) равны.

$$F_1 = \rho_0 g h \cdot \pi (R^2 - r^2), \quad F_2 = \rho_0 g (h + d) \cdot \pi R^2$$

Найдём значение для  $F_A$ :

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho_0 g (h + d) \cdot \pi R^2 - \rho_0 g h \cdot \pi (R^2 - r^2) = \rho_0 g \cdot \pi (dR^2 + hr^2)$$

На минимальной глубине, при которой пластинка ещё не отрывается от трубки, сила тяжести, действующая на пластину равна выталкивающей силе:

$$F_T = F_A \Rightarrow \rho \pi R^2 d g = \rho_0 g \cdot \pi (dR^2 + hr^2) \Rightarrow h = \frac{(\rho - \rho_0) d R^2}{\rho_0 r^2}$$

$$h = 0,064 \text{ м} = 6,4 \text{ см}$$

Ответ:  $h = 0,064 \text{ м} = 6,4 \text{ см}$

**Задача 8 (10 баллов)**

Некоторого количества идеального азота занимает объем 1,5 литра при давлении 2 атмосферы. Затем газ расширяют таким образом, что его давление уменьшается до одной атмосферы, а затем вновь расширяют и делают давление равным первоначальному. При этом объем, который занимает газ, в конечном состоянии составляет 4,5 л. Определите количество теплоты, которым газ обменялся с другими телами.

**Решение:**

Исходя из первого закона термодинамики, величина искомой теплоты  $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$ ,  $\Delta U$  — изменение внутренней энергии, а  $\Delta A$  — совершённая газом работа при переходе из состояния 1 в состояние 3.

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_1),$$

где  $\nu$  — количество газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная, а  $T_1$  и  $T_3$  — абсолютные температуры газа в точках 1 и 3, то согласно уравнению Менделеева-Клапейрона

$$\Delta U = \frac{3}{2} p_1 (V_3 - V_1).$$

Учитывая, что  $\Delta A = \Delta A_{12} + \Delta A_{23}$ , находим, что

$$\Delta A = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_3 - V_2) = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_3 - V_1).$$

$$\Delta Q = \left( 2p_1 + \frac{p_2}{2} \right) (V_3 - V_1).$$

$$\Delta Q = 13,5 \text{ кДж}$$

Ответ:  $\Delta Q = 13,5 \text{ кДж}$



### Задача 9 (13 баллов)

Хоккейная шайба массой 160 г движется по горизонтальной поверхности и налетает на вторую шайбу, расположенную первоначально неподвижно. В результате упругого столкновения шайбы разлетаются на угол в  $30^\circ$ , и останавливаются на одинаковом расстоянии от точки удара равным 90 см. Коэффициент трения шайб о поверхность равен 0,25. Определить массу второй шайбы и величину скорости первой шайбы перед моментом удара? Ускорение свободного падения  $10 \text{ м/с}^2$ .

#### Решение:

1. Поскольку  $v^2 = 2\mu gL$ , то скорости шайб после удара одинаковы.
  2. Из сохранения импульса получаем  $m^2 u^2 = (m^2 + M^2 - 2mM \cos \alpha) v^2$ .
  3. Из сохранения энергии для упругого удара  $mu^2 = (m + M)v^2$ .
  4. Разделив первое равенство на второе, исключаем скорости и находим массу второй шайбы  $M = m(1 + 2 \cos \alpha)$ .
  5. Из сохранения энергии для искомой скорости  $u$  находим  $u^2 = 2(1 - \cos \alpha)v^2 = 4(1 - \cos \alpha)\mu gL$  и  $u = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{2\mu gL}$ .
- Подставим численные значения:  
 $M = 0,437 \text{ кг}$ ;  $u = 1,0980 \text{ м/с}$
- Ответ:  $M = 0,437 \text{ кг}$ ;  $u = 1,0980 \text{ м/с}$



### Задача 10 (15 баллов)

Груз массой 150 г подвешен на пружине длиной 11 дм и жесткостью 180 Н/м. Груз, не деформируя пружину, отклонили на угол в  $90^\circ$  и отпустили. Определить удлинение пружины в момент прохождения положения равновесия системы. Ответ дать с точностью до десятых долей мм.

#### Решение:

Обозначим длину пружины за  $L$ , а удлинение  $\Delta L$ .

В конечном состоянии энергия системы будет состоять из кинетической энергии груза и потенциальной энергии растяжения пружины:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta L^2}{2} = E_{\text{после}}.$$

по закону сохранения энергии можно записать:

$$mg(L + \Delta L) = \frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta L^2}{2}.$$

В нижней точке можно записать уравнение Ньютона, где сумма всех сил будет равна центростремительному ускорению:

$$\frac{mv^2}{L + \Delta L} = k\Delta L - mg.$$

Выражая  $mv^2$  и подставляя его в закон сохранения энергии можно получить следующее:

$$mv^2 = (k\Delta L - mg)(L + \Delta L), 2mg(L + \Delta L) = k\Delta L^2 + (k\Delta L - mg)(L + \Delta L).$$

Раскрывая скобки, получаем квадратное уравнение относительно  $\Delta L$

$$2k\Delta L^2 + \Delta L(kL - 3mg) - 3mgL = 0.$$

Подставим численные значения и решим относительно  $\Delta L$

$$2 \cdot 180 \cdot \Delta L^2 + \Delta L(180 \cdot 0,11 - 3 \cdot 0,15 \cdot 10) - 3 \cdot 0,15 \cdot 10 = 0$$

Получаем два корня. Один положительный – другой отрицательный.

Выбираем положительный корень

$$\Delta L \approx 0,0926 \text{ м} \approx 92,6 \text{ мм}$$

Ответ: 92,6 мм