

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**



**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ГРАНИТ НАУКИ»**

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

**Методические указания для подготовки к
заключительному туру олимпиады в
2024/2025 учебном году для обучающихся 10-11 классов**

Санкт-Петербург
2025

ФИЗИКА

Олимпиада по физике проводится в письменной форме. Задания, включенные в билеты олимпиады, предполагают подготовленность участников по вопросам из следующих разделов курса физики.

1. Механика (*кинематика, динамика, статика, законы сохранения в механике, механические колебания и волны*).

Кинематика. Механическое движение и его виды. Относительность механического движения. Скорость. Ускорение. Равномерное и равнопеременное, прямолинейное и криволинейное движение. Свободное падение (ускорение свободного падения). Движение по окружности с постоянной по модулю скоростью. Центростремительное ускорение. Движение тела, брошенного вертикально вверх, горизонтально и под углом к горизонту.

Динамика. Инерциальные системы отсчета. Масса тела. Плотность вещества. Сила. Первый, второй и третий законы Ньютона. Принцип относительности Галилея. Принцип суперпозиции сил. Свободное падение тел. Закон всемирного тяготения. Искусственные спутники Земли. Сила тяжести. Вес и невесомость. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения. Давление.

Статика. Момент силы. Условия равновесия твердого тела. Давление жидкости. Закон Паскаля.

Закон Архимеда. Условия плавания тел.

Законы сохранения в механике. Импульс тела. Импульс системы тел. Закон сохранения импульса. Работа силы. Мощность. Работа как мера изменения энергии. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии. Закон сохранения полной механической энергии.

Механические колебания и волны. Гармонические колебания. Уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, фаза, период колебаний и частота колебаний. Свободные колебания (математический и пружинный маятники). Длина и скорость волны.

2. Молекулярная физика. Термодинамика (*молекулярно-кинетическая теория, законы идеального газа и термодинамики*).

Молекулярная физика. Модели строения газов, жидкостей и твердых тел. Диффузия. Взаимодействие частиц вещества. Модель идеального газа. Давление и средняя кинетическая энергия теплового движения молекул идеального газа. Абсолютная температура. Уравнение состояния идеального газа. Изо- процессы. Адиабатический процесс. Изменение агрегатных состояний вещества.

Термодинамика. Работа в термодинамике. Внутренняя энергия. Количество теплоты. Теплопередача. Теплоемкость вещества. Удельная и молярная теплоёмкость. Уравнение теплового баланса. Законы термодинамики. Принцип действия и КПД тепловой машины.

3. Электродинамика (*электрическое поле, постоянный ток, магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны*)

Электрическое поле. Электризация тел. Взаимодействие зарядов. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции электрических полей. Потенциал электрического поля. Проводники в электрическом поле. Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов. Энергия электрического поля конденсатора.

Законы постоянного тока. Электрический ток. Носители свободных электрических зарядов в металлах, жидкостях и газах. Сила тока. Работа тока. Напряжение. Мощность тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной электрической цепи. Сопротивление при последовательном и параллельном соединении проводников.

Магнитное поле. Индукция магнитного поля. Сила Ампера. Сила Лоренца. Масс-

спектрограф. Магнитный поток. Электромагнитное поле. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Вихревое электрическое поле. Самоиндукция. Индуктивность.

Электромагнитная индукция. Явление электромагнитной индукции. Магнитный поток. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца. Самоиндукция. Индуктивность. Энергия магнитного поля.

Электромагнитные колебания и волны. Свободные и вынужденные электромагнитные колебания.

Колебательный контур. Гармонические электромагнитные колебания. Переменный ток. Электромагнитное поле. Свойства электромагнитных волн. Идеи теории Максвелла. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны. Радио.

4. Геометрическая, волновая и квантовая оптика. Прямолинейное распространение света. Законы отражения и преломления света. Полное внутреннее отражение. Линзы. Оптическая сила линзы. Формула тонкой линзы. Построение изображений в плоском зеркале и в линзах. Глаз как оптическая система. Интерференция, дифракция, поляризация и дисперсия света. Дифракционная решетка. Корпускулярно-волновой дуализм. Гипотеза Планка о квантах. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотоны. Энергия, масса и импульс фотона.

5. Физика атома и атомного ядра.

Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Линейчатые спектры. Излучение и поглощение фотонов при переходе атома с одного уровня энергии на другой.

Нуклонная модель ядра. Заряд ядра. Массовое число ядра. Изотопы. Ядерные силы. Дефект массы ядра. Радиоактивность. Альфа-распад. Бета-распад. Гамма-излучение. Закон радиоактивного распада.

СТРУКТУРА БИЛЕТА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДЫ

В билет участника олимпиады включено пять заданий по физике. Задачи в билете расположены в порядке возрастания уровня их сложности. Максимальное значение баллов за решение задачи выставляется при условии, что приведено полное решение задачи, включающее следующие элементы: а) кратко записано условие задачи, записаны положения теории и физические законы, закономерности, применение которых необходимо для решения задачи выбранным способом, в случае необходимости приведены грамотные рисунки и пояснения к ним; б) описаны все вводимые в решении буквенные обозначения физических величин (за исключением обозначений используемых в условии задачи и основных констант) с пояснениями; описания физических величин, встречающихся в задачах, может производиться с помощью математических соотношений, текстуально или с помощью рисунков; в) проведены все необходимые математические преобразования (допускаются пояснения на их проведение) и расчеты, приводящие к правильному числовому ответу; г) представлен правильный ответ в общем виде и в численном значении с указанием единиц измерения искомой величины. Если задача решена не полностью, то этапы ее решения оцениваются в соответствии с критериями оценок по данной задаче. (Следует отметить, что если правильно записано краткое условие, но решение отсутствует, то за задачу выставляется 0 баллов, также наличие правильного ответа при полном отсутствии текста решения тоже 0 баллов). Итоговый результат каждого участника подсчитывается как сумма баллов за выполнение каждой задачи.

Олимпиадные задачи не требуют знания такого материала, который не

предусмотрен в школьной программе по физике и математике, однако предполагают умения строить физические модели, анализировать условия, глубоко понимать сущность законов физики, самостоятельно применять их в различных ситуациях, а также безупречно владеть математическим аппаратом.

ПРИМЕРНЫЙ ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Работа над условием:
 - краткая запись условия и выяснение смысла терминов (рисунки, чертежи);
 - анализ физических явлений, процессов, описанных в задаче;
 - приведение всех данных к СИ (если это необходимо).
 - запись упрощающих предположений.
2. Поиск необходимых уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление, процесс.
3. Решение задачи в общем виде.
4. Анализ полученного результата (действие с наименованиями, проверка на частных случаях, решение другим способом).
5. Получение числового ответа.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Автомобиль проехал половину пути со скоростью $v_1 = 54$ км/ч. Половину оставшегося времени движения он ехал со скоростью $v_2 = 18$ км/ч, а последний участок пути – со скоростью $v_3 = 36$ км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля на всем пути?

Дано:	СИ
$v_1 = 54$ км/ч	15 м/с
$v_2 = 18$ км/ч	5 м/с
$v_3 = 36$ км/ч	10 м/с
$v_{\text{ср}} = ?$	

Решение. Средняя скорость автомобиля на второй половине пути составляет $(v_2 + v_3)/2$.
Полное время прохождения пути S

$$t = \frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2[(v_2 + v_3)/2]} = S \frac{2v_1 + v_2 + v_3}{2v_1(v_2 + v_3)}.$$

Тогда средняя скорость на всем пути

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

Проверка размерности: $[v_{\text{ср}}] = \frac{\text{м/с}(\text{м/с} + \text{м/с})}{\text{м/с} + \text{м/с} + \text{м/с}} = \text{м/с}.$

$$\text{Вычислим } v_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot 15 \cdot (5 + 10)}{2 \cdot 15 + 5 + 10} = 10 \text{ м/с.}$$

Ответ: $v_{\text{ср}} = 10$ м/с.

Пример 2. Определить температуру идеального газа в состоянии 2 (рис.1), если состояния 2 и 4 лежат на одной изотерме. Температуры T_1 и T_3 в состояниях 1 и 3 известны.

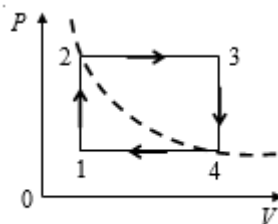


Рис.1

Дано:
 T_1
 T_3
 $T_2 = ?$

СИ

Решение. Воспользуемся уравнением Клапейрона $PV/T = \text{const}$, позволяющим связать между собой параметры всех четырех состояний газа:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_4 V_4}{T_4}.$$

Согласно графику $P_2 = P_3$, $P_4 = P_1$, $V_2 = V_1$, $V_4 = V_3$. Учитывая, что $T_4 = T_2$, запишем систему уравнений

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_3 V_1}{T_2}, \quad \frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_1 V_3}{T_2}.$$

Перемножая почленно эти уравнения, получим $T_1 T_3 = T_2^2$. Следовательно, $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$.

Проверка размерности: $[T_2] = \sqrt{K \cdot K} = K$.

Ответ: В состоянии 2 температура $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$.

Пример 3. Определить сопротивление R бесконечной цепи, показанной на рис.2.

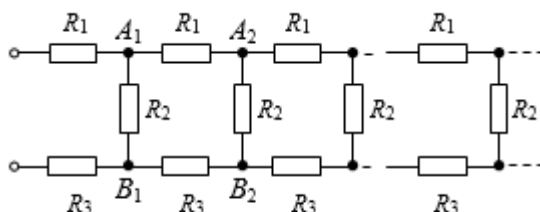


Рис.2

Решение. Поскольку рассматриваемая в задаче цепь бесконечна, удаление одной «ячейки» не влияет на ее сопротивление. Значит, вся цепь, находящаяся правее звена $A_1 B_1$, тоже имеет сопротивление R . Это позволяет использовать эквивалентную схему цепи, показанную на рис.3, и записать уравнение

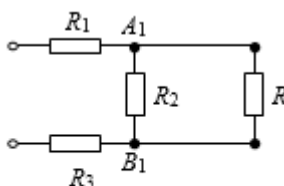


Рис.3

$$R = R_1 + R_3 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}.$$

Тогда

$$R^2 - (R_1 + R_3)R - (R_1 + R_3)R_2 = 0$$

и

$$R = \frac{R_1 + R_3}{2} \pm \sqrt{\frac{(R_1 + R_3)^2}{4} + R_2(R_1 + R_3)}.$$

Знак минус не соответствует физическому содержанию задачи. Если $R_2 \ll R_1 + R_3$, то $R = R_1 + R_3$ (резистор с сопротивлением R_2 практически «закоротит» всю последующую бесконечную цепь).

Проверка размерности:

$$[R] = \text{Ом} + \text{Ом} + \sqrt{\text{Ом}^2 + \text{Ом}^2} = \text{Ом}.$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{R_1 + R_3}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1 + R_3}} \right) \text{ Ом}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. К нити подвешен груз массой $m = 500$ г. Определить силу натяжения нити, если нить с грузом поднимать с ускорением 2 м/с^2 .

Ответ: $F = 6 \text{ Н}$.

2. В катушке с индуктивностью $0,2 \text{ Гн}$ сила тока равна 10 А . Какова энергия магнитного поля этой катушки? Как изменится энергия поля, если сила тока увеличится вдвое?

Ответ: $E = 10 \text{ Дж}$; увеличится в 4 раза.

3. При ударе мяча о горизонтальную поверхность теряется половина его механической энергии. Какую минимальную скорость в вертикальном направлении нужно сообщить мячу, находящемуся на высоте 5 м , чтобы после удара он снова смог подняться на эту высоту? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v = 10 \text{ м/с}$.

4. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла 500 нм . Определить в электрон-вольтах минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект.

Ответ: $\varepsilon_{\text{ф}} = 2,49 \text{ эВ}$.

5. При расширении газа на $0,5 \text{ м}^3$ при постоянном давлении $1,6 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ему передано $1,8 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ теплоты. Определить изменение внутренней энергии газа.

Ответ: $\Delta U = 1 \text{ МДж}$.

6. Пассажир первого вагона поезда прогуливался по перрону. Когда он был рядом с последним вагоном, поезд длиной l начал двигаться с ускорением a . Пассажир сразу же побежал со скоростью v . Через какое время он догонит свой вагон?

$$\text{Ответ: } t = \frac{v}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}} \right).$$

7. Каков период дифракционной решетки, если на экране, отстоящем от решетки на 1 м ,

расстояние между спектрами первого порядка равно 15,2 см ? Длина волны падающего света 0,76 мкм.

Ответ: $d = 10$ мкм

8. Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 (рис.4) Определить максимальную температуру $T_{\max}$ газа в ходе процесса.

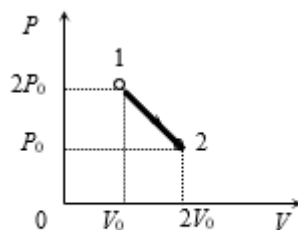


Рис.4

Ответ: $T_{\max} = 9P_0V_0 / 4R$.

9. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0,1$ Тл возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость v частицы.

Ответ: $v = 10^6$ м/с.

10. Каково наименьшее возможное расстояние l между предметом и его действительным изображением, создаваемым собирающей линзой с фокусным расстоянием $F = 12$ см.

Ответ: $l = 0,48$ м.

Составители: доц. А.С. Иванов, доц. М.Ю. Кожокаръ

МАТЕМАТИКА

Олимпиада по математике проводится только в письменной форме. Предлагаемые задачи, хотя и не выходят за рамки школьного курса математики, требуют творческого подхода, отличного владения материалом и определенной эрудиции. Разнообразие приемов и методов решения настолько велико, что собрать их в коротком пособии невозможно, подобранные задачи лишь позволяют увидеть уровень сложности и вспомнить некоторые наиболее распространенные моменты. Разделение задач по темам весьма условно, так как при решении задач из одной темы могут понадобиться сведения из других тем.

Каждый участник олимпиады получает вариант, содержащий пять заданий по математике. Они могут включать все темы школьного курса математики. При решении следует учитывать, что в вариант включены задания разной сложности в порядке возрастания их номера. Соответственно, выполнение более сложного задания оценивается большим числом баллов.

Все числовые ответы должны быть приведены точно, поэтому не нужно переводить обыкновенные дроби в десятичные и заменять значения иррациональных чисел их приближенными значениями в виде десятичных дробей (то есть нельзя вместо $\sqrt{3}$ писать 1, 7). В решениях также требуется выполнить все необходимые математические выкладки и строго обосновать все логические переходы.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Такие задачи обычно решаются элементарными приемами:

- применение формул сокращенного умножения;
- возведение в степень и извлечение корня;
- преобразование более общего выражения с последующим возвращением к исходному.

Задача 1. Вычислить $\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}$.

Решение. Заметив, что данное выражение отрицательно, возведем его в квадрат:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2 &= 4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{4-\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{15}} = \\ &= 8 - 2\sqrt{16-15} = 6.\end{aligned}$$

Следовательно, $\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}} = -\sqrt{6}$.

Ответ. $-\sqrt{6}$.

Задача 2. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}} = A$. Тогда

$$\begin{aligned}A^3 &= 26 + \sqrt{675} + 3\left(\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}\right)^2 \sqrt[3]{26-\sqrt{675}} + \\ &+ 3\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} \left(\sqrt[3]{26-\sqrt{675}}\right)^2 + 26 - \sqrt{675} = \\ &= 52 + 3\sqrt{(26+\sqrt{675})(26-\sqrt{675})} \left[\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}\right] = \\ &= 52 + 3\sqrt{676-675} \cdot A = 52 + 3A.\end{aligned}$$

Решение кубического уравнения

$$A^3 - 3A - 52 = 0$$

находим разложением левой части на множители:

$$\begin{aligned}A^3 - 64 - 3A + 12 &= 0 \Rightarrow (A^3 - 64) - 3(A - 4) = 0 \Rightarrow \\ (A - 4)(A^2 + 4A + 13) &= 0 \Rightarrow A = 4.\end{aligned}$$

Ответ. 4.

Задача 3. Упростить выражение

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right).$$

Решение. Чтобы упростить первый множитель, воспользуемся определением квадратного корня:

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} = |p - q|.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}&\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right) = \\ &= |p - q| \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} + \frac{q}{p - q} + \frac{p}{p + q} \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |p - q| \frac{2pq + pq + q^2 + p^2 - pq}{p^2 - q^2} = \\
&= \frac{|p - q|(p + q)^2}{(p - q)(p + q)} = \frac{|p - q|(p + q)}{(p - q)} = (p + q) \operatorname{sgn}(p - q) = \\
&= \begin{cases} p + q, & p > q; \\ -p - q, & p < q. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ. $p + q$ при $p > q$,
 $-p - q$ при $p < q$.

Задача 4. Представить в виде несократимой дроби

$$7 \frac{23}{2020} \cdot 6 \frac{23}{2019} - 13 \frac{1997}{2020} \cdot 2 \frac{1996}{2019} - 9 \cdot \frac{23}{2020}.$$

Решение. Обозначим $a = \frac{23}{2020}$, $b = \frac{23}{2019}$. Тогда данное выражение запишется в виде:

$$\begin{aligned}
&(7 + a)(6 + b) - (14 - a)(3 - b) - 9a = \\
&= 42 + 6a + 7b + ab - 42 + 3a + 14b - ab - 9a = 21a = \frac{21 \cdot 23}{2020} = \frac{483}{2020}. \text{ Ответ. } \frac{483}{2020}.
\end{aligned}$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Основные методы решения алгебраических уравнений:

- разложение на множители;
- тождественные преобразования;
- замена неизвестной,
- графическая интерпретация.

Решение уравнений в целых или натуральных числах рассматриваются в параграфе «Элементарная теория чисел».

Задача 5. Решить уравнение:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{9}{x}\right) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3).$$

Решение. Уравнение имеет смысл при $x \neq 0$. Приведя к общему знаменателю, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{x^2 - 4}{x} \cdot \frac{x^2 - 9}{x} = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3); \\
&\frac{(x - 1)(x + 1)}{x} \cdot \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} \cdot \frac{(x - 3)(x + 3)}{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3).
\end{aligned}$$

Значения $x = 1, 2, 3$ - решения данного уравнения. Сократим на общие множители:

$$\begin{aligned}
&(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = x^3; \quad x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3; \\
&6x^2 + 11x + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Дискриминант $D = -23$, следовательно, других действительных решений исходное уравнение не имеет.

Ответ. $x = 1, 2, 3$.

Задача 6. Решить уравнение

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Решение. В уравнении

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0$$

положим $x = 5/2 + y$. Тогда заданное уравнение примет вид:

$$3 \left(\frac{1}{\frac{5}{2} + y} + \frac{1}{y - \frac{5}{2}} \right) + \left(\frac{1}{y + \frac{3}{2}} + \frac{1}{y - \frac{3}{2}} \right) + 4 \left(\frac{1}{y + \frac{1}{2}} + \frac{1}{y - \frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$\text{или } 2y \left[\frac{3}{y^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{1}{y^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{4}{y^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right] = 0.$$

Отсюда $y = 0 \Leftrightarrow x = 5/2$ или

$$3 \left(y^2 - \frac{9}{4} \right) \left(y^2 - \frac{1}{4} \right) + \left(y^2 - \frac{25}{4} \right) \left(y^2 - \frac{1}{4} \right) + 4 \left(y^2 - \frac{9}{4} \right) \left(y^2 - \frac{25}{4} \right) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$8y^4 - 48y^2 + \frac{119}{2} = 0,$$

откуда находим:

$$y^2 = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 119}}{8} = \frac{24 \pm 10}{8}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{5}{2}; \quad x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}; \quad x_{4,5} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении и доказательстве алгебраических неравенств следует обратить внимание на следующие распространенные приемы:

- доказательство неравенств на основе определения;
- выделение квадратов или других степеней;
- последовательные оценки;
- метод математической индукции;
- использование специальных и классических неравенств;
- использование элементов математического анализа;
- использование геометрических аналогий.

Задача 7. Доказать, что $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$.

Доказательство.

Используя очевидное неравенство $2 < \sqrt{6} < 3$, оценим левую часть:

$$\begin{aligned} \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} &< \\ < \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + 3}} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + 3}} = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3, \end{aligned}$$

Задача 8. a, b, c – стороны треугольника, Доказать, что

$$a^3+b^3+3abc > c^3.$$

Решение. Используя неравенство треугольника $a+b>c$ и неравенство $a^2-ab+b^2\geq 0$, получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+3abc &= (a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc > \\ &> c(a^2-ab+b^2)+3abc = c(a^2+2ab+b^2) = c(a+b)^2 > c^3. \end{aligned}$$

Задача 9. Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c.$$

Доказать, что $a + b + c \geq 3abc$.

Доказательство.

Сначала докажем, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca): \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0; \\ 2(a^2+b^2+c^2) &\geq 2(ab+bc+ac); \\ a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ac. \end{aligned}$$

Прибавив к обеим частям $2(ab+bc+ac)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) &\geq 3(ab+bc+ac), \text{ что равносильно} \\ (a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ac). \end{aligned}$$

Умножая неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$ на общий знаменатель, получим равносильное неравенство:

$$bc+ac+ab \geq (a+b+c)abc.$$

По доказанному выше:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(bc+ac+ab) \geq 3(a+b+c)abc.$$

Задача 10. Доказать, что если $a+b+c \leq 3$ и $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, то справедливо неравенство:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Если $a \leq b \leq c, x \leq y \leq z$, то сумма произведений $cz + by + ax$ будет принимать максимальное значение из всех сумм, составленных из попарных произведений множителей a, b, c и x, y, z , а сумма $az + by + cx$, будет принимать минимальное значение из всех таких возможных сумм (почему?).

$$\text{Если } a \geq b \geq c, \text{ то } a+1 \geq b+1 \geq c+1 \Rightarrow \frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{b+1} \leq \frac{1}{c+1}.$$

$$S_{\min} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}. \text{ Все остальные суммы, составленные из попарных произведений}$$

множителей a, b, c и $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}$, будут больше. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} &\leq \frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1}; \\ \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} &\leq \frac{c}{b+1} + \frac{a}{c+1} + \frac{b}{a+1}. \end{aligned}$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$\begin{aligned}
2S_{\min} &\leq \frac{a+c}{b+1} + \frac{a+b}{c+1} + \frac{b+c}{a+1} \leq \frac{3-b}{b+1} + \frac{3-c}{c+1} + \frac{3-a}{a+1} = \\
&= \frac{3+3b-3b-b}{b+1} + \frac{3+3a-3a-a}{a+1} + \frac{3+3c-3c-c}{c+1} = \\
&= \frac{3(b+1)-4b}{b+1} + \frac{3(a+1)-4a}{a+1} + \frac{3(c+1)-4c}{c+1} = \\
&= 3 - \frac{4b}{b+1} + 3 - \frac{4a}{a+1} + 3 - \frac{4c}{c+1} = \\
&= 9 - 4\left(\frac{b}{b+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{c}{c+1}\right) = 9 - 4S_{\min} = 9 - 4S_{\min}
\end{aligned}$$

Таким образом, $2S_{\min} \leq 9 - 4S_{\min}$, $6S_{\min} \leq 9$. Следовательно, $S_{\min} \leq \frac{3}{2}$.

Задача 11. Пусть x, y вещественные неотрицательные числа, такие, что $x + y = 2$. Доказать, что $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$.

Доказательство. Известно, что среднее геометрическое не превосходит среднее арифметическое $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Так как x, y вещественные неотрицательные числа, то $\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$.

По условию $x + y = 2$, следовательно, $\frac{4}{4} \geq xy$, то есть $xy \leq 1 \Rightarrow x^2 y^2 \leq 1$.

Кроме того,

$$x + y = 2 \Rightarrow x \leq 2, y \leq 2, x^2 \leq 4, y^2 \leq 4, x^4 \leq 16, y^4 \leq 16.$$

В этом случае (см. предыдущую задачу):

$$\begin{aligned}
x^4 \cdot y^2 + x^2 y^4 &\leq x^4 y^4 + x^2 y^2, \\
x^2 y^2 \cdot (x^2 + y^2) &\leq (x^2 y^2 + 1) \cdot x^2 y^2 \leq (1+1) \cdot 1 = 2.
\end{aligned}$$

Задача 12. Для любых положительных чисел a, b, c доказать, что справедливо неравенство:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Пусть $x = a + b$, $y = b + c$, $z = a + c$, тогда левая часть данного неравенства примет вид:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \left(\frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3 \right),
\end{aligned}$$

$$\text{а так как } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2, \text{ то } S \geq \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}.$$

Задача 13. Верно ли, что для любых чисел $0 < a < b$ выполнено неравенство:

$$(a+b)^6 < 32(a^6 + b^6).$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{(a+b)^6}{32(a^6 + b^6)} < 1$. Рассмотрим функцию

$f(x) = \frac{(x+b)^6}{32(x^6+b^6)}$, непрерывную на $x = (0; +\infty)$ при $x \in (0; b]$. Найдем производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6(x+b)^5 \cdot 32(x^6+b^6) - 32 \cdot 6x^5(x+b)^6}{32^2(x^6+b^6)^2} = \\ &= \frac{6(x+b)^5 \cdot ((x^6+b^6) - x^5(x+b))}{32(x^6+b^6)^2} = \frac{6(x+b)^5 \cdot ((x^6+b^6) - x^5(x+b))}{32(x^6+b^6)^2} = \\ &= \frac{6(x+b)^5 \cdot (b^6 - x^5b)}{32(x^6+b^6)^2} = \frac{6b(x+b)^5 \cdot (b^5 - x^5)}{32(x^6+b^6)^2} > 0. \end{aligned}$$

Поскольку производная положительна, то функция возрастает, и $f(x) < f(b) = 1$. Следовательно,

$$\frac{(a+b)^6}{32(a^6+b^6)} < 1.$$

Задача 14. Доказать, что при любом натуральном n большем 1 справедливо двойное неравенство: $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Доказательство (метод математической индукции).

База: при $n = 2$ неравенство $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ очевидно.

Предположение индукции: пусть для $n = k$ утверждение верно, то есть $\sqrt{k} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$.

Индукционный переход: докажем истинность утверждения для $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ \frac{\sqrt{k^2+k+1}}{\sqrt{k+1}} &< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2\sqrt{k^2+k+1}}{\sqrt{k+1}}, \end{aligned}$$

откуда получим

$$\frac{k+1}{\sqrt{k+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2k+2}{\sqrt{k+1}}.$$

Здесь воспользовались неравенством $k < \sqrt{k^2+k} < k + \frac{1}{2}$, которое можно проверить непосредственным возведением в квадрат. Сокращая, получим требуемое неравенство:

$$\sqrt{k+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

Таким образом, утверждение верно для любых $n > 1$.

Задача 15. Доказать, что при натуральном $n > 1$ и $|x| < 1$ справедливо неравенство $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$.

Доказательство (метод математической индукции).

База. При $n = 2$ неравенство верно. Действительно, имеет

$$(1-x)^2 + (1+x)^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 + 2x + x^2 = 2 + 2x^2 < 2^2.$$

Предположение. Пусть неравенство верно при $n = k$:

$$(1-x)^k + (1+x)^k < 2^k.$$

Индукционный переход. Докажем для $n = k + 1$:

$$(1-x)^{k+1} + (1+x)^{k+1} < ((1-x)^k + (1+x)^k) \cdot ((1-x) + (1+x)) < 2^k \cdot 2;$$

$$(1-x)^{k+1} + (1+x)^{k+1} < 2^{k+1}.$$

Неравенство доказано для любого натурального $n > 1$.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

В элементарной теории чисел существует богатейшее разнообразие задач и методов их решения, и перечислить их все не представляется возможным. К основным приемам относятся:

- разложение чисел на простые множители (основная теорема арифметики);
- изучение остатков от деления на некоторое число;
- перебор всех различных возможностей;
- метод математической индукции.

Задача 16. Доказать, что число $(1000^{2020} - 1)$ является составным.

Доказательство.

Заметим, что число 1000^{2020} содержит 1 и 6060 нулей, при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6060 девяток. Оно делится на 9, следовательно, является составным.

Задача 17. Вычислите $(99 \dots 9)^2$, если в записи числа $99 \dots 9$ имеется n девяток.

Решение. $\underset{n \text{ девяток}}{99 \dots 9} = \underset{n \text{ нулей}}{100 \dots 0} - 1 = 10^n - 1.$

$$\left(\underset{n \text{ девяток}}{99 \dots 9} \right)^2 = (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = \underset{n-1 \text{ девятка}}{99 \dots 9} \underset{n-1 \text{ ноль}}{800 \dots 01}$$

Замечание. Попробуйте доказать это по методу математической индукции.

Задача 18. Доказать, что сумма произведения четырех последовательных целых чисел и единицы есть точный квадрат.

Решение. Обозначим наименьшее из этих чисел n , тогда:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1 = \\ &= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

Задача 19. Существует ли представление числа 5^{2020} в виде произведения $x^{17} \cdot y^{59}$ для натуральных x, y ?

Решение. Такое представление существует (и не единственное). Для его построения представим 2020 в виде какой-нибудь линейной комбинации чисел 17 и 59, например, имеет $2020 = 39 \cdot 17 + 23 \cdot 59$.

$$\text{Тогда } 5^{2020} = 5^{39 \cdot 17 + 23 \cdot 59} = 5^{39 \cdot 17} \cdot 5^{23 \cdot 59} = (5^{39})^{17} \cdot (5^{23})^{59}.$$

$$\text{Ответ. } x = 5^{39}; y = 5^{23}.$$

Замечание. Верно ли, что всякое натуральное число n можно представить в виде $n = ak + bl$ для любых $k, l \in \mathbb{N}$, если $a, b \in \mathbb{Z}$?

Задача 20. Решить в натуральных числах уравнение $28x + 30y + 31z = 365$.

Решение. Уравнение имеет очевидное решение $x = 1, y = 4, z = 7$ (365 дней в году складываются из 28 дней февраля, 30 дней апреля, июня, сентября и ноября и 31 дня января, марта, мая, июля, августа, октября и декабря).

В силу натуральности неизвестных и условия $28x + 30y + 31z = 365$ выполнены неравенства

$1 \leq x \leq 11, 1 \leq y \leq 10, 1 \leq z \leq 10$. Покажем, что сумма $x + y + z = 12$. Предположим противное, тогда $x + y + z \leq 11$ или $x + y + z \geq 13$.

Если $x + y + z \leq 11$, то

$$28x + 30y + 31z \leq 31x + 31y + 31z = 31(x + y + z) \leq 31 \cdot 11 = 341 < 365$$

Если $x + y + z \geq 13$, то

$$28x + 30y + 31z = 28(x + y + z) + 2y + 3z \geq 28 \cdot 13 + 5 = 369 > 365.$$

Рассмотрим теперь остатки от деления на 5 левой и правой частей уравнения $28x + 30y + 31z = 365$. Так как 30 и 365 делятся на 5 без остатка, а коэффициенты 28 и 31 дают остатки 3 и 1, то $3x + z$ делится на 5, то есть $3x + z = 5k$.

Перебором значений x и k находим

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow z = 2; 7, \text{ тогда } \begin{cases} x = 1, y = 10, z = 2; \\ x = 1, y = 4, z = 7; \end{cases} \\ x = 2 &\Rightarrow z = 4; 9, \text{ тогда } \begin{cases} x = 2, y = 6, z = 4; \\ x = 2, y = 1, z = 9; \end{cases} \\ x = 3 &\Rightarrow z = 1; 6, \text{ тогда } \begin{cases} x = 3, y = 8, z = 1; \\ x = 3, y = 3, z = 6; \end{cases} \end{aligned}$$

и так далее.

Учитывая, что z должно быть нечетным (коэффициенты 28 и 30 – четные, 31 и 365 – нечетные), и подставляя в исходное уравнение, получим второе решение $x = 2, y = 1, z = 9$.

Ответ. $x = 1, y = 4, z = 7$ или $x = 2, y = 1, z = 9$.

Задача 21. Решить в целых числах уравнение

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

Ответ. $(1, 4, 7), (2, 1, 9), (-1, 10, 3), (10, 8, -5), (0, 7, 5)$.

Задача 22. На круизном лайнере находится от 250 до 400 путешественников. Если рассадить их в спасательные шлюпки, вмещающие 15 человек, то семерым не хватит места, а если разместить путешественников на плотках, рассчитанных на 25 человек, то останется 8 свободных мест. Сколько всего путешественников на лайнере?

Решение. Пусть a – число путешественников. По условию:

$$\begin{cases} a = 15k + 7 = 15(k + 1) - 8; \\ a = 25l - 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 8) : 15; \\ (a + 8) : 25. \end{cases} \Rightarrow (a + 8) : 75.$$

Число $a + 8$ следует искать среди чисел, кратных 75: 225, 300, 375, 450, ..., откуда $a = 292, 367$.

Ответ. $a = 292, 367$.

Задача 23. Из книги объемом менее 500 страниц вырвали один лист. Сумма цифр номера страницы с одной стороны равна 10, а с другой – 11. Если из меньшего номера вычесть единицу, то оно будет делиться на 10, а если к большему добавить единицу, то оно будет делиться на 11. Найти номера страниц на вырванном листе.

Решение. Искомые номера – это подряд идущие натуральные числа, а значит, одно из них четное. По условию, если из меньшего числа вычесть 1, оно будет делиться на 10, следовательно, большее число четное и оканчивается на 2. Кроме того, после его увеличения на 1 оно будет делиться на 11 и оканчиваться цифрой 3. Рассмотрим числа, делящиеся на 11, оканчивающиеся цифрой 3 и меньшие 500. Такими числами будут 33 и 363, а по условию задачи в искомом числе сумма цифр равна 11, следовательно, номера страниц равны 361 и 362.

Ответ. 361 и 362.

Задача 24. В турнире участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый сыграл с каждым один раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза

больше очков, нежели все десятиклассники. Сколько очков набрал самый успешный десятиклассник?

Решение. Пусть в турнире приняло участие a десятиклассников, которые заработали b очков. Тогда играли $10a$ одиннадцатиклассников, которые заработали $4,5b$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11a$ игроков играют $\frac{11a(11a-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение

$$11a(11a-1) = 5,5b, \text{ откуда } b = 2a(11a-1).$$

Каждый участник играет $11a-1$ партий. Значит, каждый десятиклассник может набрать максимум $2(11a-1)$ очков, если выиграет все игры. Так как a десятиклассников набрали $2a(11a-1)$, они выиграли все свои игры.

Если в турнире участвовало хотя бы два десятиклассника, то в игре между собой один из них не выиграл – противоречие. Значит, был только один десятиклассник, т. е. $a = 1$. Он набрал $2(11a-1) = 20$ очков.

Ответ. 20.

Задача 25. На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к двум из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что сделав не более 30 таких ходов, всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули?

Ответ. Неверно.

Решение. Пусть сначала на доске были написаны числа 1, 8 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Изучим, как меняются разности между вторым и первым числом, а также между третьим и первым числом. Изначально они равны 7 и 8. При вычитании трёх единиц разности не меняются. Если единицы прибавляются к первым двум числам, то первая разность не меняется, а вторая уменьшается на 1. Аналогично, если единицы прибавляются к первому и третьему числам, то первая разность уменьшается на 1, а вторая не меняется. Наконец, при прибавлении к последним числам разности увеличиваются. Итак, поскольку первая разность уменьшилась на 7, а вторая – на 8, то к первому числу единица прибавлялась не меньше, чем $7 + 8 = 15$ раз. Значит, из него должны были хотя бы 16 раз вычитать единицу, ибо в конце оно стало нулём. Поэтому итоговое количество операций не меньше, чем $15 + 16 = 31$.

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ЗАДАЧИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ

Задача 26 (задача Рамсея). Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Решение. Выберем одного человека из шести и назовем его N . Среди оставшихся пяти обязательно найдутся либо трое знакомых с ним, либо трое незнакомых с N . Пусть среди оставшихся пяти человек есть трое знакомых с N . Среди этих троих людей либо найдутся двое знакомых – тогда они вместе с N образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы, и утверждение доказано. Второй случай разбирается аналогично.

Задача 27. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:

1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина – на третий;

2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.

На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа: на второй или на третий?

Решение. Обозначим n_{12} количество поездок с первого этажа на второй. Аналогично определим числа n_{13} , n_{21} , n_{23} , n_{31} , n_{32} . Все поездки разобьём на три группы: поездки на третий этаж, поездки с третьего этажа и поездки между первым и вторым этажом. По условию задачи первая группа составляет менее трети всех поездок. С другой стороны, она количественно равна второй, так как число покупателей, приехавших на третий этаж равно числу уехавших с третьего этажа. Значит, последняя группа составляет более трети всех поездок:

$$(n_{31}+n_{32})=(n_{13}+n_{23})<(n_{12}+n_{21}).$$

Подставляя в это неравенство $n_{21} = n_{23}$, получим $n_{13} < n_{12}$: с первого этажа чаще ездили на второй, нежели на третий.

Ответ. С первого на третий этаж за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

Задача 28. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. А, В и С — жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. А и В сказали следующее:

А: — В по рангу выше, чем С.

В: — С по рангу выше, чем А.

Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу — А или В?»

Решение. Переберем варианты, кем может быть житель А.

Если А — рыцарь, то В — обычный человек, а С — лжец и С ответит: «В».

Если А лжец, то С рыцарь, а В — обычный человек, и С также ответит: «В».

Наконец, если А — обычный человек, то В не может быть ни рыцарем (иначе С тоже был бы рыцарем, а это невозможно), ни обычным человеком, значит он лжец, но тогда С тоже лжец, что невозможно. Значит, А не может быть обычным человеком. Таким образом, С всегда ответит: «В».

Ответ. В.

Задача 29.

Поезда А и В встречаются на перегоне во второй половине дня. Поезд А прибывает на перегон между 18:30 и 19:30 часами, стоит 10 минут и уезжает. Поезд В может прибыть в произвольное время с 18:30 до 19:20, тоже стоит 10 минут и уезжает. Какова вероятность того, что поезда не встретятся на перегоне?

Решение. Изобразим графически время прибытия поездов. Время прибытия поезда А будем откладывать по оси Х, а время прибытия поезда В — по оси Y.

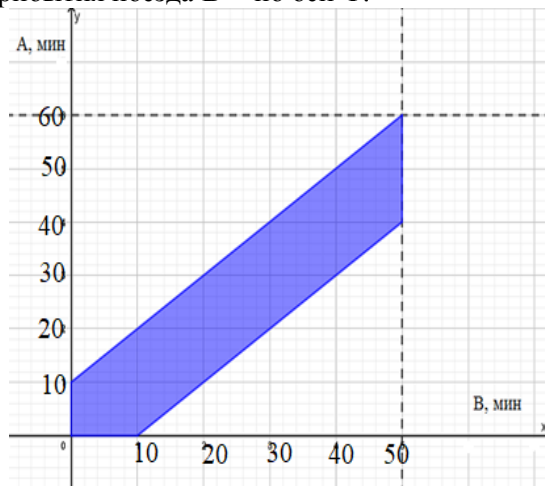


Рис. 1.

Закрашенная фигура — это множество всех возможных вариантов времени, при которых поезда встретятся. Вероятность искомого события равна отношению всех возможных вариантов времени прибытия, удовлетворяющие условию встречи, к множеству всех возможных прибытий. Численно данная вероятность будет равна отношению площади закрашенной фигуры к площади

прямоугольника 5×6 . Если считать площадь по клеткам, то получим $P(A) = \frac{19}{60}$. Следовательно,

вероятность того, что поезда не встретятся равна $1 - P(A) = 1 - \frac{19}{60} = \frac{41}{60}$

Ответ. $\frac{41}{60}$.

Задача 30 (Задача Бюффона). Плоскость разлинована на полосы шириной 1. На неё бросают иглу (отрезок) длиной 1. Какова вероятность, что игла пересечёт одну из линий?

Решение. Положение иглы (смещение её вдоль линий не учитывается) определяется двумя параметрами: расстоянием y конца иглы от верхнего края полосы, в которую он попал ($0 < y < 1$), и углом α иглы с прямой, перпендикулярной линиям – см. рис. 2 а. По соображениям симметрии можно считать, что $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Условие, при котором игла пересекает край полосы: $y < \cos \alpha$. Таким образом, среди точек (α, y) в прямоугольнике $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 1$, мы должны выбрать те, которые лежат ниже линии $y = \cos \alpha$ (рис.2 б) и найти отношение площади S полученной фигуры к площади прямоугольника (равной $\frac{\pi}{2}$).

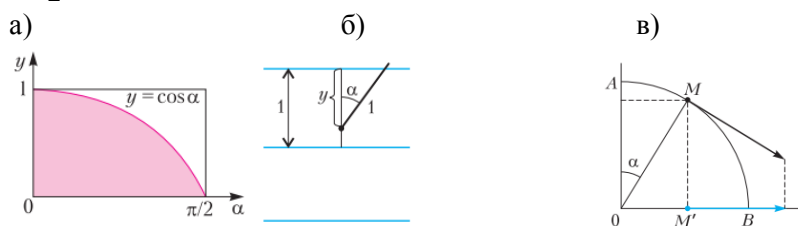


Рис.2.

С помощью интеграла находим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$ и искомая вероятность равна $\frac{2}{\pi}$. Этот же результат можно получить и с помощью механики. Пусть точка равномерно с единичной скоростью проходит дугу AB в $\frac{1}{4}$ круга радиуса 1 (рис.1 в). Когда точка M находится в положении α на дуге ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), скорость её проекции M' на радиус OB равна $\cos \alpha$. Тогда площадь S под графиком движения точки по окружности равна пройденному точкой M' пути: $S = OB = 1$, искомая вероятность $\frac{2}{\pi}$.

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

При решении задач по тригонометрии не следует забывать об области определения, особенно, если в них используются тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арккотангенс. Кроме того знание графиков этих функций часто оказывается очень полезным.

Задача 31. Решить уравнение

$$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}.$$

Решение. Областью определения функции $\arcsin x$ является интервал $[-1; 1]$, следовательно,

$$\begin{cases} -1 \leq \sqrt{1-x} \leq 1; \\ -1 \leq \frac{2}{3\sqrt{x}} \leq 1; \\ x > 0; \quad 1-x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1; \\ x \geq \frac{4}{9}; \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{то есть } x \in \left[\frac{4}{9}; 1 \right].$$

Таким образом, неизвестная принадлежит первой

четверти. Возьмем синус от обеих частей уравнения:

$$\sin \left(\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} \right) = \sin \arcsin \frac{1}{3}.$$

По формуле синуса разности имеем

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \cos \arcsin \sqrt{1-x} - \sqrt{1-x} \cos \arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}.$$

Применив основное тригонометрическое тождество, упростим полученное равенство:

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \sqrt{1-\sqrt{1-x}^2} - \sqrt{1-x} \sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \sqrt{\frac{9x-4}{9x}} = \frac{1}{3}; \quad \sqrt{\frac{(9x-4)(1-x)}{9x}} = \frac{1}{3},$$

откуда имеем $\frac{(9x-4)(1-x)}{x} = 1; -9x^2 + 12x - 4 = 0.$

Корни этого уравнения равны $x_{1,2} = \frac{2}{3}.$

Ответ. $x_{1,2} = \frac{2}{3}$

Задача 32. Решить неравенство

$$\frac{4 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} + 1}{\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)^2} > 0.$$

Найдем ОДЗ:

$$\frac{1}{2} - \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

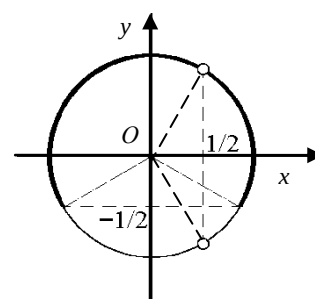


Рис.2

Поскольку знаменатель положителен, исходное неравенство сводится к неравенству вида

$$4 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} + 1 > 0. \text{ Воспользуемся формулой:}$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$$

Найдем

$$2(\sin x + \sin(-2\pi/3)) + \sqrt{3} + 1 > 0$$

или

$$2 \sin x - 2\sqrt{3}/2 + \sqrt{3} + 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (2\pi k - \pi/6; 2\pi k + 7\pi/6).$$

$$\sin x > -1/2 \text{ (рис. 1)} \Rightarrow$$

С учетом ОДЗ получим

$$x \in (2\pi k - \pi/6; 2\pi k + \pi/3) \cup (2\pi k + \pi/3; 2\pi k + 7\pi/6), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } x \in (2\pi k - \pi/6; 2\pi k + \pi/3) \cup$$

$$\cup (2\pi k + \pi/3; 2\pi k + 7\pi/6), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 33. Вычислить значение выражения

$$\cos 260^\circ \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 160^\circ.$$

Решение. Преобразуем данное выражение и воспользуемся формулами приведения:

$$\cos 260^\circ \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 160^\circ =$$

$$= \cos(270^\circ - 10^\circ) \cdot \sin(180^\circ - 50^\circ) \cdot \cos(180^\circ - 20^\circ) =$$

$$= -\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot (-\cos 20^\circ) = (\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ) \cdot \cos 20^\circ =$$

(по формуле произведения синусов)

$$= \frac{1}{2}(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \left(\cos 40^\circ - \frac{1}{2} \right) \cos 20^\circ =$$

$$= \frac{2 \cos 40^\circ - 1}{4} \cdot \cos 20^\circ = \frac{2 \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 20^\circ}{4} =$$

(по формуле произведения косинусов)

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ) - \cos 20^\circ}{4} = \frac{\cos 60^\circ}{4} = \frac{1}{8}.$$

Ответ. 1/8.

Задача 34. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x.$$

Решение. ОДЗ уравнения $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x$ определяется неравенствами

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x \neq \pi l, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{-2\sin^2 x \cos^2 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 + \frac{4}{\sin^2 2x}. \end{aligned}$$

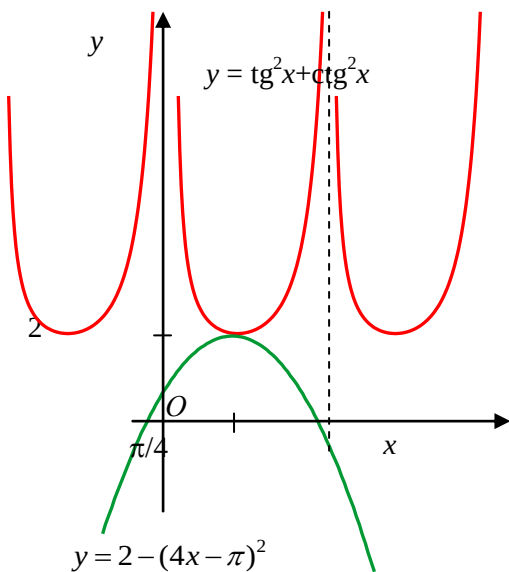


Рис.3

Очевидно, что наименьшее значение левой части уравнения равно 2 и достигается при $\sin^2 2x = 1$, откуда

$$2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Правая часть уравнения представляет собой квадратный трехчлен и достигает наибольшего значения,

равного 2, при условии $(4x - \pi)^2 = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{4}$.

Сравнивая полученные результаты, получим, что равенство левой и правой частей уравнения возможно лишь при $x = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4}$.

Замечание. Графическое решение уравнения также приветствуется при условии объяснения построений, например, с помощью элементарных преобразований графиков тангенса и котангенса и их суперпозиции (рис. 3).

Задача 35. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2). \end{cases}$$

Решение: ОДЗ: $x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = (\sqrt{3} - 2)\sqrt{3}, \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2).$$

$$\text{Таким образом, } \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)} - \frac{\sqrt{2}}{2} < -1.$$

Ответ. нет решений.

Задача 36. Решить уравнение

$$2|\sin x| \cos(2\pi - x) = \cos^2(7\pi/2 - x).$$

Воспользуемся формулами приведения и тем, что $\sin^2 x = |\sin x|^2$:

$$2|\sin x| \cos x = \sin^2 x \Rightarrow 2|\sin x| \cos x = |\sin x|^2 \Rightarrow |\sin x|(2\cos x - |\sin x|) = 0.$$

Получим $|\sin x| = 0 \Rightarrow x = \pi k$ или $2\cos x = |\sin x|$.

Отсюда при $\sin x \geq 0$ имеем $2\cos x = \sin x$, $\operatorname{tg} x = 2$, то есть $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$.

С учетом условия $\sin x \geq 0$ получим $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$.

Аналогично при $\sin x < 0$ имеем $2\cos x = -\sin x$, $\operatorname{tg} x = -2$ и $x = -\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$ (с учетом условия $\sin x < 0$).

Ответ. $x = \pi k$, $x = \pm \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 37. Определить количество решений уравнения $x^3 = \sin 3x$.

Построим графики левой и правой частей уравнения $x^3 = \sin 3x$ (рис.3). Очевидно, что графики этих функций пересекаются в начале координат и еще в двух симметричных относительно начала координат точках.

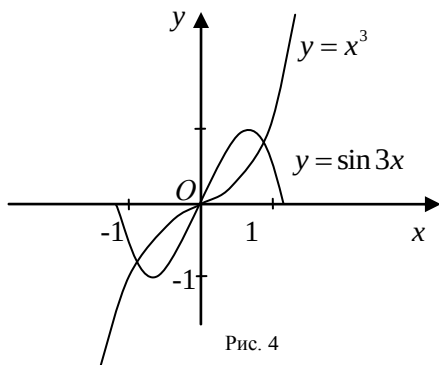


Рис. 4

Так как функция $y = x^3$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а функция $y = \sin 3x$ ограничена и периодична (период $T = \frac{2\pi}{3}$), других точек пересечения графиков функций нет.

Ответ. 3.

ПРОГРЕССИИ

Задача 38. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение. Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Общий член прогрессии задается формулой: $a_n = 102 + (n-1) \cdot 6$. Так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102 + (n-1) \cdot 6 \leq 999, \quad n \leq 1 + \frac{999-102}{6} = 1 + \frac{897}{6} = 150,5.$$

Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму, равно $n = 150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии:

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 150 \cdot 102 + \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot 6 = 82305.$$

Ответ. 82305.

Задача 39. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию (рис. 4). Найти острые углы этого треугольника.

Решение: по теореме Пифагора $(aq^2)^2 = a^2 + (aq)^2$, тогда

$$a^2 q^4 = a^2 (1 + q^2) \text{ и}$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$(q^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

$$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{aq^2} = \frac{1}{q^2} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\alpha \in \text{I четв.});$$

$$\cos \beta = \frac{aq}{aq^2} = \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

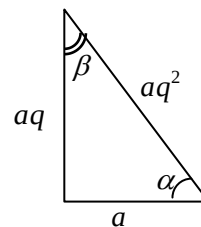


Рис. 4

Ответ. $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\arccos \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 40. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5 : 4. Найти количество членов этой прогрессии.

Решение. Пусть a – первый член арифметической прогрессии, через d — разность, через n — количество членов. Тогда сумма первых тринадцати ее членов будет равна:

$$S_{1..,13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = \frac{13(a_1 + a_1 + 12d)}{2} = \frac{13(2a_1 + 12d)}{2} = 13(a_1 + 6d),$$

сумма последних тринадцати членов:

$$\begin{aligned} S_{n-13..,n} &= \frac{13(a_{n-13} + a_n)}{2} = \frac{13(a_1 + (n-13)d + a_1 + (n-1)d)}{2} = \\ &= \frac{13(2a_1 + (2n-14)d)}{2} = 13(a_1 + (n-7)d); \end{aligned}$$

сумма всех членов без первых трех:

$$S_{4,..,n} = \frac{(n-3)(a_4 + a_n)}{2} = \frac{(n-3)(a_1 + 3d + a_1 + (n-1)d)}{2};$$

сумма всех членов без последних трех:

$$S_{1,..,n-3} = \frac{(n-3)(a_1 + a_{n-3})}{2} = \frac{(n-3)(2a_1 + (n-4)d)}{2}.$$

По условию $2S_{1,..,13} = S_{n-13,..,n}$, то есть

$$26(a_1 + 6d) = 13(a_1 + (n-7)d).$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \frac{S_{4,..,n}}{S_{1,..,n-3}} &= \frac{5}{4}, \quad 4S_{4,..,n} = 5S_{1,..,n-3}; \\ 4 \frac{(n-3)(2a_1 + (n+2)d)}{2} &= 5 \frac{(n-3)(2a_1 + (n-4)d)}{2}; \\ 4(2a_1 + (n+2)d) &= 5(2a_1 + (n-4)d). \end{aligned}$$

Решая систему

$$\begin{cases} 13a_1 + (247-13n)d = 0; \\ 2a_1 + (n-28)d = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (19-n)d = 0; \\ 2a_1 + (n-28)d = 0, \end{cases} \text{ получим}$$

$(66-3n)d = 0$, откуда найдем $n = 22$ (так как по условию $d \neq 0$).

Ответ. 22.

Задача 41. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = 1$. Вычислить $\log_3(a_{2023} + 3)$

Решение. Пусть $x_n = a_n + 3$, тогда $x_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$,

$x_{n+1} = 2x_n$, $x_1 = 4 = 2^2$, $x_1 = 4 = 2^2$, $x_2 = 2^3$, ..., $x_n = 2^{n+1}$, тогда

$$a_n + 3 = 2^{n+1}, \quad \log_3(a_{2023} + 3) = \log_3 2^{2023+1} = 2024 \log_3 2$$

Ответ. $\log_3(a_{2023} + 3) = 2024 \cdot \log_3 2$

Задача 42. Доказать, что $\sqrt{\underset{2n \text{ раз}}{11...1} - \underset{n \text{ раз}}{22...2}} = \underset{n \text{ раз}}{33...3}$.

Решение. По определению десятичной записи числа

$\underset{2n \text{ раз}}{11...1} = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + ... + 1 \cdot 10^{2n-1}$ - это сумма геометрической прогрессии, поэтому

$$\underset{2n \text{ раз}}{11...1} = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + ... + 1 \cdot 10^{2n-1} = \frac{1 \cdot (10^{2n} - 1)}{10 - 1} = \frac{10^{2n} - 1}{9}.$$

Так как $\underset{n \text{ раз}}{22...2} = 2 \cdot \underset{n \text{ раз}}{11...1}$ и $\underset{n \text{ раз}}{33...3} = 3 \cdot \underset{n \text{ раз}}{11...1}$, то аналогично получаем

$$\underset{n \text{ раз}}{22...2} = 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \quad \text{и} \quad \underset{n \text{ раз}}{33...3} = 3 \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\underset{2n \text{ раз}}{11...1} - \underset{n \text{ раз}}{22...2}} &= \sqrt{\frac{10^{2n} - 1}{9} - 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9}} = \sqrt{\frac{10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2}{9}} = \\ &= \sqrt{\left(3 \cdot \frac{10^n - 1}{9}\right)^2} = \underset{n \text{ раз}}{33...3} \end{aligned}$$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Задача 43 (задача Дирака). Представить произвольное натуральное число в виде выражения, в запись которого входят три двойки и произвольные математические символы.

Ответ. $N = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}$.
N радикалов

Замечание. $2020 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}$.
2020 радикалов

Задача 44. Сколько членов содержит последовательность

$$a_1 = \ln 1, a_2 = \ln \ln 2, a_3 = \ln \ln \ln 3, \dots, a_n = \underbrace{\ln \ln \dots \ln n}_{n \text{ раз}}?$$

Решение. Найдем область определения $a_n = \underbrace{\ln \ln \dots \ln n}_{n \text{ раз}}$:

$$\begin{cases} n > 0; \\ \ln n > 0; \\ \ln \ln n > 0; \\ \ln \ln \ln n > 0; \\ \ln \ln \ln \ln n > 0; \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n > 0; \\ n > 1; \\ n > e; \\ n > e^e; \\ n > e^{e^e}; \\ \vdots \end{cases}$$

Эти неравенства выполнены для $n = 1, 2, 3$, при $n = 4$ не выполняется условие $4 > e^e \approx 15$.

Задача 45. Доказать, что $\frac{1}{2020} < \ln \frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019}$.

Решение. $\ln \frac{2020}{2019} = \ln \left(1 + \frac{1}{2019} \right)$. На графике (рис.5) видно, что $\ln(1+x) < x$, но можно проверить

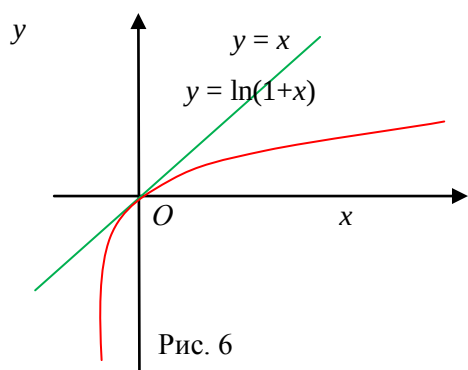


Рис. 6

этот факт и аналитически. Составим разность

$f(x) = \ln(1+x) - x$ и вычислим производную:

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}.$$

На интервале $(-1; 0)$ производная положительна, при $x > 0$ — отрицательна, следовательно, $x = 0$ — точка максимума разности, и $f(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$, а значит, в остальных точках области определения разность $\ln(1+x) - x$ меньше 0. Следовательно, $\ln(1+x) < x$, и

$$\ln \frac{2020}{2019} = \ln \left(1 + \frac{1}{2019} \right) < \frac{1}{2019}.$$

С другой

стороны,

$$-\ln \frac{2020}{2019} = \ln \frac{2019}{2020} = \ln \left(1 + \left(-\frac{1}{2020} \right) \right) < -\frac{1}{2020}, \text{ следовательно, } \ln \frac{2020}{2019} > \frac{1}{2020}.$$

Задача 46. Решить уравнение $2 - \log_{\sin x} \cos x = \log_{\cos x} \sin x$.

Решение. Уравнение определено при $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\sin x \neq 1$, $\cos x \neq 1$.

Приведем логарифм в правой части уравнения к основанию $\sin x$:

$$2 - \log_{\sin x} \cos x = 1 / (\log_{\sin x} \cos x).$$

После преобразований получим:

$$(\log_{\sin x} \cos x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log_{\sin x} \cos x = 1.$$

После потенцирования будем иметь:

$$\cos x = \sin x, \quad x = \pi/4 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Среди полученных значений ОДЗ удовлетворяют только решения вида $x = \pi/4 + 2k\pi$.

Ответ. $x = \pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 47. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$.

Решение. Найдем область определения:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0; \\ x-1 \neq 1; \\ \log_{x-1} 9 > 0; \\ \log_2 \log_{x-1} 9 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0; \\ x \neq 2; \\ \log_{x-1} 9 > \log_{x-1} 1; \\ \log_{x-1} 9 > 1, \end{cases}$$

но так как неравенство $\log_{x-1} 9 > \log_{x-1} 1$ может выполняться только при $x-1 > 1$, то окончательно область определения:

$$\begin{cases} x > 1; \\ x \neq 2; \\ x-1 > 1; \\ \log_{x-1} 9 > \log_{x-1}(x-1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1; \\ x \neq 2; \\ x > 2; \\ x-1 < 9. \end{cases} \Rightarrow x \in (2, 10).$$

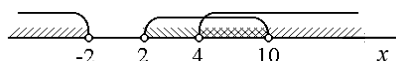


Рис. 7

Исходное неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > \log_{\frac{1}{2}} 1.$$

Поскольку основание логарифма меньше единицы, при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный:

$$\log_2 \log_{x-1} 9 < 1 \Leftrightarrow \log_2 \log_{x-1} 9 < \log_2 2 \Leftrightarrow \log_{x-1} 9 < 2.$$

Знак неравенства сохраняется, так как основание логарифма больше единицы. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \log_{x-1} 9 < \log_{x-1}(x-1)^2, \quad 9 < (x-1)^2 &\Leftrightarrow 9 - (x-1)^2 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 - 3^2 > 0 &\Rightarrow (x-1-3)(x-1+3) > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2) > 0. \end{aligned}$$

С учетом области определения (рис.7) $x \in (4; 10)$.

Ответ. $x \in (4; 10)$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Задача 48. Функция $y = f(x)$ определена при всех $x \in R$ и удовлетворяет для некоторого числа $k \neq 0$ соотношению $f(x+k) \cdot (1 - f(-x)) = 1 + f(x)$. Доказать, что $y = f(x)$ - периодическая функция и найти период.

Решение. По условию $f(x+k) = \frac{1+f(x)}{(1-f(-x))}$. Тогда $f(x+2k) = -\frac{1}{f(x)}$, тогда

$$f(x+4k) = -\frac{1}{f(x+2k)} = f(x) - \text{значит функция периодическая, период } 4k.$$

Задача 49. Функция $f(x)$ при всех $x \in R$ удовлетворяет неравенствам $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ и $f(x) \geq x$. Найти все такие функции $f(x)$.

Решение. Из неравенства $f(x) \geq x$ при $x=0$ следует, что $f(0) \geq 0$, а из $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ при $y=0$ следует, что $f(x+0) \geq f(x) + f(0)$. Тогда $0 \geq f(0)$, а значит $f(0) = 0$.

$$\text{При } y = -x: f(x+(-x)) \geq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow 0 \geq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(-x) \geq f(x).$$

По свойствам функции $f(x): f(-x) \geq -x \Leftrightarrow -f(-x) \leq x$, тогда

$x \geq -f(-x) \geq f(x) \Rightarrow x \geq f(x)$. Учитывая условие $f(x) \geq x$, получаем $f(x) = x$ (для всех $x \in R$).

Ответ. $f(x) = x$.

Задача 50. Для функции $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ найти значение суммы S :

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f(1).$$

Решение. $f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = 1$, тогда рассмотрим выражение $2S$:

$$2S = S + S = f(0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f(1) +$$

$$+ f(1) + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right) + \dots + f(1) + f(0) =$$

$$= f(0) + f(1-0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(1-\frac{1}{2023}\right) + \dots + f(1) + f(0) = 2024$$

$$\Rightarrow S = \frac{2024}{2} = 1012$$

Ответ. $S = 1012$

ПЛАНИМЕТРИЯ

Задача 51. Три пиццы диаметром 4 дециметра каждая упакованы в треугольную коробку. Найти наименьшую площадь коробки, если пиццы попарно соприкасаются, но не перекрывают друг друга.

Решение. Радиус $r = 2$ дм; круги равны $\Rightarrow \triangle ABC$ – правильный треугольник

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ (рис.8).

$DG \perp AC$ (радиус перпендикулярен касательной), $DG = r \Rightarrow$ из $\triangle ADG$ гипотенуза $AD = 2r$ (катет, лежащий против угла 30° , равен половине гипотенузы).

$AG = r\sqrt{3}$ (теорема Пифагора) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = AG + GH + HC = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r(1 + \sqrt{3}).$$

Окончательно получим:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(AC)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2(1 + \sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 2r^2(2\sqrt{3} + 3).$$

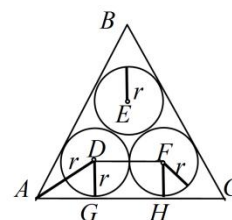


Рис. 8

Ответ. $8(2\sqrt{3} + 3) \text{ дм}^2$.

Задача 52. Через квадрат $ABCD$ проведены 9 прямых, каждая из которых проходит через противоположные стороны и разбивает его на пару четырехугольников, причем один из четырехугольников имеет площадь, в полтора раза большую, чем другой. Доказать, что внутри квадрата имеется хотя бы одна точка, через которую проходят три прямые.

Решение. По формуле площади трапеции (для прямоугольников эта формула также верна):

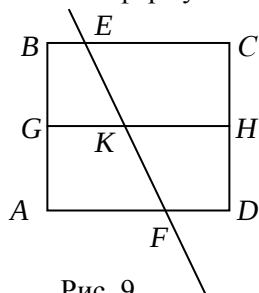


Рис. 9

$$S_{ABEF} = \frac{BE + AF}{2} \cdot AB = GK \cdot AB;$$

$$S_{FECD} = \frac{FD + EC}{2} \cdot CD = KH \cdot AB;$$

$$\frac{S_{FECD}}{S_{ABEF}} = 1,5 \Rightarrow KH = 1,5GK.$$

Таким образом, каждая из прямых проходит через точку K, либо через симметричную ей относительно центра квадрата, либо через одну из двух таких точек на второй средней линии квадрата (рис. 9). Девять прямых проходят через четыре точки, следовательно, по принципу Дирихле хотя бы через одну из точек проходит не менее трех прямых.

Задача 53. Участок земли имеет форму трапеции ABCD. На участке необходимо выделить три ландшафтные зоны. Для этого провели прямую MN, соединяющую середины боковых сторон участка и прямые AN, DM, MC и BN (см. рис. 10). Площадь участков BKC и AFD известна $S_{BKC} = S_1 = 2$, $S_{AFD} = S_2 = 4$. Найти площадь участка MKNF.

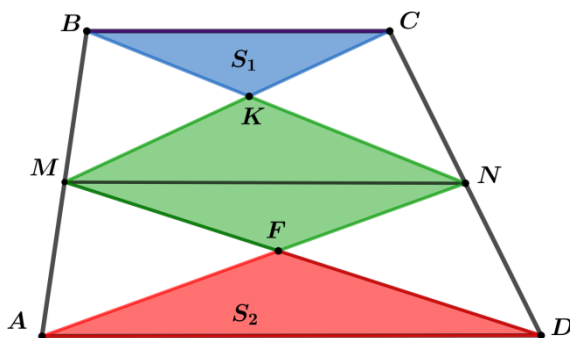
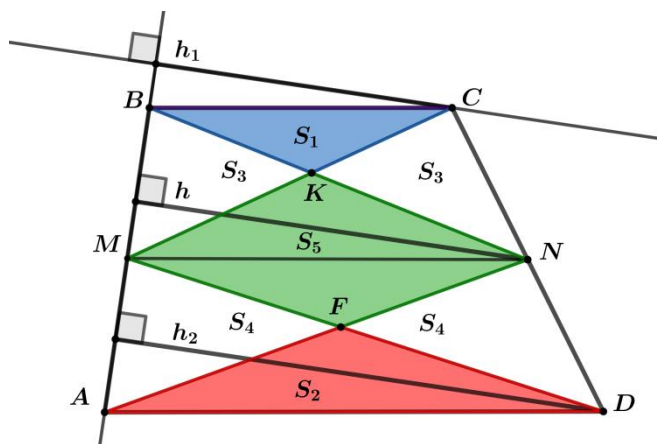


Рис.10

Решение.



1) $S_{\Delta MBK} = S_{\Delta CKN} = S_3$, так как $S_{\Delta MBN} = S_{\Delta MCN}$. Аналогично $S_{\Delta AFM} = S_{\Delta DFN} = S_4$.

Введём обозначения:

$d(N; AB) = h$ - расстояние от точки N до стороны AB,

$d(C; AB) = h_1$ - расстояние от точки C до стороны AB,

$d(D; AB) = h_2$ - расстояние от точки D до стороны AB,

$S(MKNF) = S_5$.

Тогда $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ (как средняя линии трапеции),

$$S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} hAB = \frac{h_1 + h_2}{4} \cdot AB = \frac{1}{4} h_1 AB + \frac{1}{4} h_2 AB.$$

$$\text{Так как } S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} h_1 \cdot MB = \frac{1}{2} h_1 \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{4} h_1 \cdot AB \quad \text{и} \quad S_{\triangle MAD} = \frac{1}{2} h_2 \cdot AM = \frac{1}{2} h_2 \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{4} h_2 \cdot AB,$$

$$\text{то } S_{\triangle ABN} = S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAD}.$$

$$\text{Так как } S_{\triangle ABN} = S_3 + S_4 + S_5, \quad S_{\triangle MBC} = S_3 + S_1, \quad S_{\triangle MAD} = S_4 + S_2, \quad \text{получим}$$

$$S_3 + S_4 + S_5 = S_3 + S_1 + S_4 + S_2, \quad S_5 = S_1 + S_2 = 2 + 4 = 6.$$

$$\text{Ответ: } S(MKNF) = 6$$

Задача 54. По круглой цирковой арене радиуса 10 м, бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов его поворотов не меньше 2998 радиан.

Решение. Обозначая траекторию движения льва $A_1 A_2 \dots A_n$, распрямим ее следующим образом. Повернем относительно точки A_2 арену цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_3 попала на луч $A_1 A_2$. Затем повернем относительно точки A_3 арену цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_4 попала на луч $A_1 A_2$ и т. д. Центр O арены цирка переходит при этом последовательно в точки $O_1 = O, O_2, \dots, O_{n-1}$; точки $A_1, \dots, A_n$ переходят в точки $A'_1, \dots, A'_n$, лежащие на одной прямой (рис. 11).

Если обозначить α_{i-1} — угол поворота льва в точке A'_i , то $\angle O_{i-1} A'_i O_i = \alpha_{i-1}$ и $A'_i O_{i-1} = A'_i O_i \leq 10$, поэтому $O_i O_{i-1} \leq 10 \alpha_{i-1}$.

Следовательно, имеем

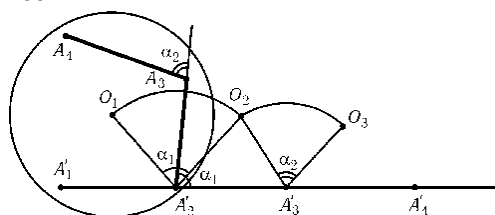


Рис. 11

$$\begin{aligned} 30000 &= A'_1 A'_n = A'_1 O_1 + O_1 O_2 + \dots + O_{n-2} O_{n-1} + O_{n-1} A'_n \leq \\ &\leq 10 + 10(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2}) + 10, \text{ откуда получим} \end{aligned}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2} \leq \frac{29980}{10} = 2998.$$

Задача 55 (задача Фаньяно). Вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника.

Решение. С помощью движений плоскости попробуем выстроить стороны вписанного треугольника в ломаную линию. Тогда периметр будет не меньше отрезка, соединяющего концы этой ломаной. А наименьший периметр будет соответствовать случаю, когда стороны ломаной лежат на одной прямой.

Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC

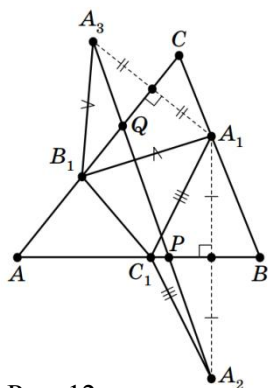


Рис. 12

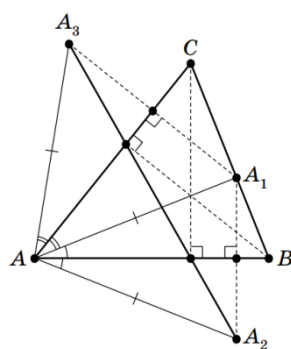


Рис. 13

(A_1 — на стороне BC и т. д. (рис. 12)). Отразим точку A_1 симметрично относительно сторон AB и AC , получив точки A_2 и A_3 соответственно.

Длина трёхзвенной ломаной $A_3B_1C_1A_2$ равна периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Для того, чтобы периметр был наименьшим (равным отрезку A_2A_3), $ABCA_1A_2A_3$ нужно, чтобы вершины B_1 и C_1 лежали в точках пересечения отрезка A_2A_3 со сторонами треугольника AB и AC . Осталось понять, как выбрать точку A_1 на стороне BC таким образом, чтобы длина отрезка A_2A_3 была наименьшей. Для этого заметим, что треугольник A_2AA_3 — равнобедренный ($A_3A = A_2A = A_1A$), а угол при его вершине A равен $2 \angle BAC$ и потому не зависит от выбора точки A_1 .

Итак, при движении точки A_1 по стороне BC углы треугольника A_2AA_3 не меняются. А его линейные размеры будут наименьшими, когда наименьшей будет сторона A_2A , которая равна A_1A . Значит, A_1A — высота, опущенная на сторону BC . Далее видим, что существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра, его вершина A_1 — основание высоты (рис. 13).

Если провести те же рассуждения с вершинами B_1 и C_1 , получим, что они также являются основаниями высот (поскольку треугольник минимального периметра — единственный).

ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ И СКЛАДЫВАНИЕ

Довольно часто среди олимпиадных задач встречаются задачи на разрезание или складывание листа бумаги. Некоторые из них широко известны и не требуют больших знаний по геометрии, другие же, напротив, предполагают отлично натренированный ум и глубокие познания.

Задача 56. Разрезать прямоугольник размером 4 на 9 на две равные части, из которых можно составить квадрат. Найти площадь этого квадрата.

Решение.

На рисунке 14 показан требуемый разрез, что же касается площади, то от перекраивания она измениться не может $S = 4 \cdot 9 = 36$. В частности, отсюда сразу следует, что сторона требуемого квадрата равна 6.

Задача 57 (Лайонса). Разрезать изображённую на рисунке 15 фигуру на четыре равных шестиугольника и найти их площади.

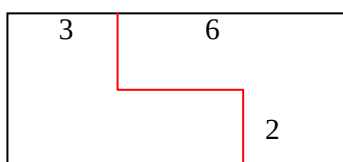


Рис. 14

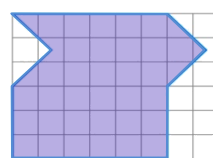


Рис. 15

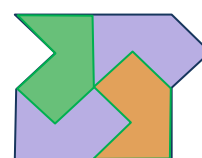


Рис. 16

Решение. Площадь данной фигуры, очевидно, равна площади квадрата со стороной 6 (рис. 15). При перекраивании фигуры площадь не изменится, следовательно, площадь каждого из требуемых шестиугольников равна $36 : 4 = 9$. Требуемое разбиение фигуры показано на рисунке 16.

Ответ. 9

Задача 58. Лист бумаги разрезали на 5 частей, затем одну из получившихся частей снова разрезали на 5 частей и повторили эту операцию несколько раз. Могло ли в результате получиться 2020 частей?

Решение. При каждом разрезании одного кусочка на пять частей общее число кусочков увеличивается на четыре, следовательно, после n разрезов число кусочков станет равным $1 + 4n$. Осталось заметить, что число 2020 нельзя представить в таком виде, так как остаток от его деления на 4 равен 0.

Задача 59. Клетчатый квадрат 100×100 сложили несколько раз по линиям сетки и сделали два прямолинейных разреза, также идущих по линиям сетки. Найти наибольшее количество частей, на которые мог быть разрезан данный квадрат.

Решение. Одно разрезание сложённого квадрата соответствует разрезанию исходного квадрата по нескольким параллельным линиям, причем расстояние между разрезами не меньше 2 (так как между ними должна быть линия сгиба). Таких линий не больше 50, и они делят квадрат на не более, чем 51 прямоугольник. При втором таком разрезании каждый из полученных прямоугольников разрезается на не более чем 51 часть, так что наибольшее количество прямоугольников $51^2 = 2601$. Это число реализуется, если сложить и разрезать исходный квадрат, как показано на рисунке 17 (там, конечно, нарисован квадрат поменьше).

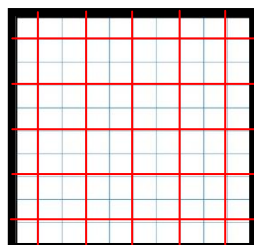


Рис. 17

Ответ. 2601.

Задача 60. Найти кратчайшее расстояние по поверхности представленной на чертеже фигуры от вершины X до вершины Y .

Решение. «Отрежем» от фигуры закрашенные грани и развернем их, получив прямоугольник со сторонами 3 и 2 (рис. 19).

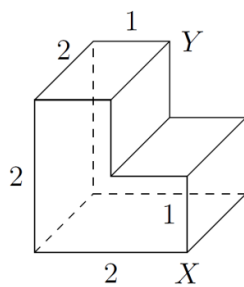


Рис. 18

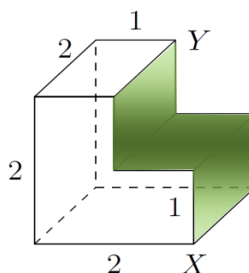


Рис. 19

Кратчайшим путем, очевидно, будет диагональ этого прямоугольника. Ее длина равна $XY = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Ответ. $\sqrt{13}$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Задача 61. Существует ли тетраэдр, все грани которого — равнобедренные треугольники, причём никакие два из них не равны?

Решение. Допустим, такой тетраэдр $ABCD$ существует (рис. 20).

Докажем сначала, что из одной вершины не может выходить три равных ребра. Действительно, если $AB = AC = AD$, то, так как среди отрезков BC , BD и CD есть два равных, то среди треугольников ABC , ABD , ACD есть хотя бы два равных.

Далее заметим, что две соседние грани — равнобедренные треугольники, не могут иметь общее основание. Действительно, если $AB = AC$ и $DB = DC$, то треугольники ADB и ADC равны. Теперь заметим, что ни один из треугольников не может быть равносторонним. Действительно, если $AB = BC = AC$, то хотя бы одно из ребер AB , BC , AC является основанием в обоих содержащих его треугольниках. Далее, без ограничения общности можно считать, что $AB = AC$, $BC = BD$. Тогда, так как $AD \neq AB$, то $AD = BD$. Аналогично, $DC = AB$. Следовательно, треугольники ABC и ACD равны. Следовательно, такого тетраэдра не существует.

Ответ. Такой тетраэдр не существует.

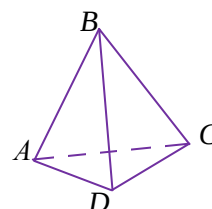


Рис. 20

Задача 62. Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 21) одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и движется только по ребрам призмы, другая – только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

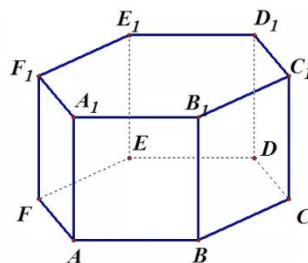


Рис. 21

Решение. Пусть первая муха прошла до встречи m сторон основания и n боковых ребер, а вторая муха – i меньших диагоналей основания (длины $10\sqrt{3}$), j больших диагоналей основания (длины 20) и k диагоналей боковых граней (длины $5\sqrt{7}$). Поскольку мухи движутся с одной скоростью, то пройденные ими пути равны:

$$10m + 5\sqrt{3}n = 10\sqrt{3}i + 20j + 5\sqrt{7}k,$$

откуда находим $m = 2j$, $n = 2i$, $k = 0$. Таким образом, первая муха прошла четное число ($n = 2i$) боковых ребер, поэтому встреча произошла на исходном основании; и прошла четное число ($m = 2j$) сторон основания, поэтому встреча произошла на одной из трех вершин.

Ответ. В вершинах A, C, E .

Задача 63. На какое наименьшее число неперекрывающихся тетраэдров можно разбить куб?

Решение. Легко видеть, что куб можно разбить на 5 тетраэдров. На рисунке 22 это тетраэдры $AA'B'D'$, $AB'BC$, $ACDD'$, $B'C'D'C$ и $ACD'B'$.

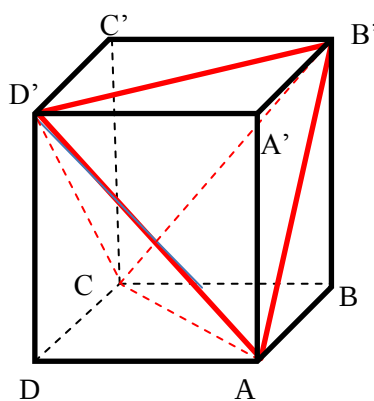


Рис.22

Докажем теперь, что на меньшее число тетраэдров разбить куб нельзя. Пусть куб с ребром a разбит на несколько тетраэдров. Имеются, по крайней мере, два из них, основания которых лежат на грани $ABCD$ куба. Точно так же имеются по крайней мере 2 тетраэдра с основаниями на грани $A'B'C'D'$.

Эти тетраэдры заведомо отличны от первых двух, так как у тетраэдра не может быть двух параллельных граней. Итак, у нас уже есть 4 тетраэдра. Их общий объем не больше чем $2a^3/3$, то есть меньше объема куба. Таким образом, на 4 тетраэдра куб разбить нельзя.

Ответ. 5.

Задача 64. Пирит, или зеркало инков, образует кристаллы кубической формы. Обнаружены два кристалла-двойника пирита, вросшие друг в друга так, что диагональ куба у них общая, и один из двойников переходит в другой при повороте вокруг этой диагонали на 60° . Определить, какую форму имеет общая часть этих кристаллов, и найти ее объем, если длина ребра каждого куба равна 5 см.

Замечание. Кубические кристаллы также образуют флюорит, галит (каменная соль), редко – алмаз.

Решение. Выясним, какая фигура является общей частью куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и куба, полученного из него поворотом вокруг прямой BD_1 на угол 60° (рис. 23).

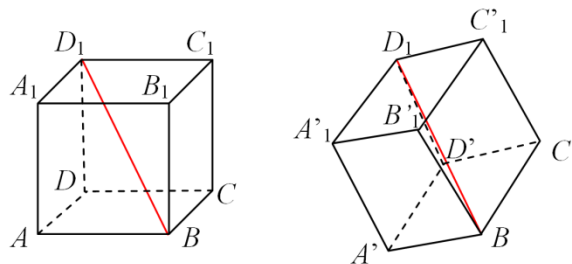


Рис. 23

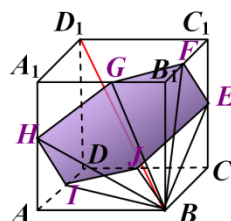


Рис. 24

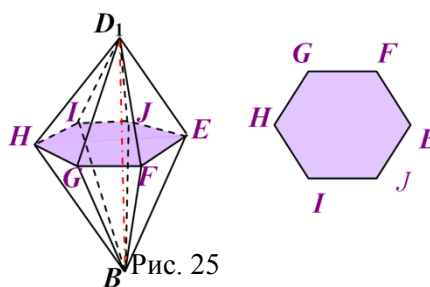


Рис. 25

Рассечем куб плоскостью, проходящей через середины сторон AD , DC , CC_1 , C_1B_1 , A_1B_1 , AA_1 . Обозначим эти середины E , F , G , H , I , J , соответственно (рис. 24). Поскольку шестиугольник $EFGHIJ$ является правильным, при повороте на 60° градусов он переходит сам в себя. Причём, треугольник BFG переходит в треугольник BGH . Следовательно, в искомой общей части не будет содержаться тетраэдр B_1BFG . Аналогично, в общей части не будут содержаться тетраэдры BA_1GH , $BAIH$, $BCEJ$ и остальные угловые тетраэдры. Таким образом, общей частью будет фигура, составленная из двух правильных шестиугольных пирамид с вершинами B и D_1 , общим основанием которых является правильный шестиугольник $EFGHIJ$ (рис. 25).

Сторона основания $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (рис. 26), $S_{осн} = 6 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$.

Высота равна половине диагонали куба, то есть $\frac{5}{2}\sqrt{3} \text{ см}$,

$$V_{\text{пирам}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{75\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{375}{8} \text{ см}^3.$$

Искомый объем равен: $V = 2V_{\text{пирам}} = \frac{375}{4} \text{ см}^3$.

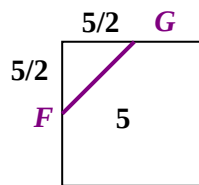


Рис. 26

Ответ. $\frac{375}{4} \text{ см}^3$.

Задача 65. Требуется раскрасить шесть граней куба в шесть разных цветов. Сколькими различными способами можно это сделать? (Различными считаются те раскраски, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.)

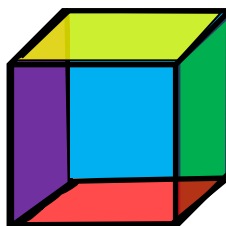


Рис.27

Решение. Куб можно повернуть так, чтобы грань, окрашенная первым цветом, заняла заданное положение. Для окраски противоположной ей грани есть пять различных вариантов; разные раскраски противоположной грани дают различные раскраски куба (рис. 27).

Среди оставшихся четырёх граней можно выбрать грань, окрашенную данным цветом, и перевести её в данное положение (не меняя при этом положение первых двух граней).

Разные раскраски трёх оставшихся граней дают различные раскраски куба. Одну из этих граней можно окрасить тремя способами, одну из оставшихся – двумя. Всего получим $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ различных раскрасок.

Ответ. 30 способами.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. «Ленинградские математические кружки», Киров, изд. АССА, 1994. – 272с.
2. Федоров Р. М. и др. «Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. » / Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.
3. Прасолов В.В. «Московские математические олимпиады. 1958 – 1967 гг.» . – М.: МЦНМО, 2013 – 328с.
4. Протасов В. Ю. «Максимумы и минимумы в геометрии», М.: МЦНМО, 2005. – 56 с.

Составитель: доцент *О.В.Сильванович*

Научный редактор профессор *А.П. Господариков*