



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Шифр работы ЕН 15-04
(не заполнять)

Вариант № 1

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)												
№ задания		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Полученный балл		5	4	1	2	0	3	0	0	0	0	15
I проверка	Подпись проверяющего				Σ баллов прописью	три						
	Подпись проверяющего				Σ баллов прописью	двенадцать						
II проверка	Подпись проверяющего				Σ баллов прописью	двенадцать						
	Подпись проверяющего				Σ баллов прописью	три						



Вариант № 1

Задача 1.

$$0, (18) = \frac{18}{99} ; 0, (52) = \frac{52}{99} ; 0, (13) = \frac{13}{99} ; 0, (2) = \frac{2}{9}$$

$$\frac{\frac{18}{99} + \frac{52}{99}}{\frac{13}{99} + \frac{2}{9}} \cdot x = 4$$

$$\frac{\frac{40}{99}}{\frac{13}{99} + \frac{2}{9}} \cdot x = 4$$

$$\frac{13}{99} + \frac{2}{9} = \frac{13+22}{99} = \frac{35}{99}$$

$$\frac{40}{99} \cdot \frac{35}{99} \cdot x = 4$$

$$\frac{40 \cdot 35}{99 \cdot 99} \cdot x = 4$$

$$2x = 4$$

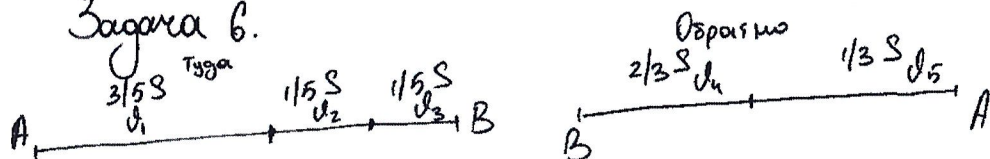
$$\Rightarrow x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

58

Ответ: 2

Задача 6.



$$1 \text{ км/мин} = \frac{1 \cdot 1000 \text{ м}}{60 \text{ с}}$$

Пусть S - путь от A до B

$$v_1 = 0,9 \text{ км/мин} = \frac{900 \text{ м}}{60 \text{ с}} = 15 \text{ м/с} +$$

$$v_2 = 1 \text{ км/мин} = \frac{1000 \text{ м}}{60 \text{ с}} = 16 \frac{2}{3} \text{ м/с} +$$

$$v_3 = 0,45 \text{ км/мин} = \frac{450 \text{ м}}{60 \text{ с}} = 7,5 \text{ м/с} +$$

$$v_4 = 0,6 \text{ км/мин} = \frac{600 \text{ м}}{60 \text{ с}} = 10 \text{ м/с} +$$

$$v_5 = 0,96 \text{ км/мин} = \frac{960 \text{ м}}{60 \text{ с}} = 16 \text{ м/с} +$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}}$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot S}{\frac{3}{5} \cdot S \cdot v_1 + \frac{1}{5} \cdot S \cdot v_2 + \frac{1}{5} \cdot S \cdot v_3 + \frac{2}{3} \cdot S \cdot v_4 + \frac{1}{3} \cdot S \cdot v_5} = \frac{2 \cdot S}{\frac{3v_1}{5} S + \frac{v_2}{5} S + \frac{v_3}{5} S + \frac{2v_4}{3} S + \frac{v_5}{3} S}$$

$$t = \frac{S}{v}$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot S}{\frac{3v_1 + v_2 + v_3}{5} S + \frac{2v_4 + v_5}{3} S} = \frac{2 \cdot S}{\frac{3(3v_1 + v_2 + v_3) + 5(2v_4 + v_5)}{15} S}$$



Вариант № 1

$$v_{cp} = 2S : \frac{S(9v_1 + 3v_2 + 3v_3 + 5v_4 + 10v_5)}{15}$$

$$2S \cdot \frac{15}{S(9v_1 + 3v_2 + 3v_3 + 10v_4 + 5v_5)} = \frac{30}{9v_1 + 3v_2 + 3v_3 + 10v_4 + 5v_5}$$

$$9 \cdot v_1 = 9 \cdot 15 \frac{м}{с} = 135 \frac{м}{с}$$

$$3 \cdot v_2 = 3 \cdot 16 \frac{2}{3} \frac{м}{с} = 3 \cdot \frac{10}{3} = 10 \frac{м}{с}$$

$$3 \cdot v_3 = 3 \cdot 12,5 \frac{м}{с} = 37,5 \frac{м}{с}$$

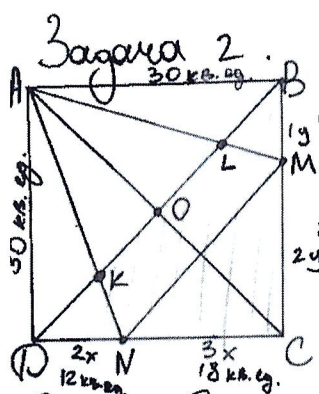
$$10 \cdot v_4 = 10 \cdot 10 \frac{м}{с} = 100 \frac{м}{с}$$

$$5 \cdot v_5 = 5 \cdot 16 \frac{м}{с} = 80 \frac{м}{с}$$

$$v_{cp} = \frac{30}{135 + 10 + 37,5 + 100 + 80} = \frac{30}{230 + 135 + 37,5} = \frac{30}{402,5}$$

$$30 : 402 \frac{5}{10} = 30 : \frac{4025}{10} = \frac{30 \cdot 10}{4025} = \frac{300}{4025} \approx 0,04$$

Ответ: ≈ 0,04



ABCD-квадрат
 $S_{ABCD} = 900 \text{ кв. ед.}$
 $S_{SKLMCN} = ?$

$DN : NC = 2 : 3$

$$\Rightarrow DN = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12 ; NC = \frac{3}{5} \cdot 30 = 18$$

$$S_{\triangle AKB} = S_{\triangle BLC} = S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOC} \quad (AC \text{ и } BD \text{ диагонали } \square \text{ квадрата}) = \frac{1}{2} \cdot 900 = 450 \text{ кв. ед.}$$

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4} \cdot 900 = 225 \text{ кв. ед.}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 30 = 150 \text{ кв. ед.}$$

$$S_{\triangle AON} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 12 = 180 \text{ кв. ед.}$$



Вариант № 1

$$S_{\Delta NMC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 900 = \frac{1}{5} \cdot 900 = 180 \text{ кв. ед.}$$

Но мы также нашли $S_{\Delta AON}$, которая тоже равна 180 кв. ед.

$$\Rightarrow S_{\Delta NMC} = S_{\Delta AON}$$

т.к. $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta OBC}$, то и $S_{\Delta NMC} = S_{\Delta AON}$, то

$S_{\Delta OBM} = S_{\Delta ACN}$, тогда

$$S_{KLMCN} = S_{\Delta AON} + S_{\Delta ACN} - S_{\Delta OBM} - S_{\Delta OKN} =$$

$$= 450 - S_{\Delta OBM} - S_{\Delta OKN}$$

~~Сделаем~~

$$S_{\Delta OKN} : S_{\Delta OKA} = 12 : 30 = 2 : 5$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OKN} = \frac{2}{5} \cdot S_{\Delta AON} = \frac{2}{5} \cdot 180 = 72 \text{ кв. ед.}$$

$$\text{Аналогично } S_{\Delta OLM} : S_{\Delta OAL} = 10 : 30 = 1 : 3$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OLM} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta AOM} = \frac{150}{3} = 50 \text{ кв. ед.}$$

$$S_{KLMCN} = S_{\Delta OBC} - S_{\Delta OKN} - S_{\Delta OLM} = 450 - 72 - 50 = 328 \text{ кв. ед.}$$

Ответ: 328 кв. ед.

Задача 5.

Рассмотрим 4 случая:

$$1) x \geq 0, y \geq 0 \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$$

$$2) x < 0, y < 0 \quad \cancel{4 \leq x^2 + y^2 \leq -2x - 2y} \text{ т.к. } x^2 \text{ и } y^2 \geq 0, \text{ а } -x \text{ и } -y < 0$$

$$3) x \geq 0, y < 0 \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 2x - 2y, \text{ где } x \geq 0 \text{ и } y < 0$$

$$4) x < 0, y \geq 0 \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 2y - 2x, \text{ где } y \geq 0 \text{ и } x < 0$$

$$\Rightarrow x \geq 0, 0 < x \leq 1, \text{ но } x^2 + y^2 \geq 4$$

$\Rightarrow$ Такой фигуры нет

Ответ: невозможно



Вариант № 1

Задача 3.

Пусть k_1, k_2 и k_3 - процентное содержание ареонов соответственно в 1, 2 и 3 образцах

т.к. формулы геом. прогр.::

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$\dots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ где } a_n - n\text{-ый член геом. прогр.}$$

q - шаг прогрессии

В т.к. k_1, k_2 и k_3 образуют геом. прогр., то:

$$k_1$$

$$k_2 = k_1 \cdot q$$

$$k_3 = k_1 \cdot q^2$$

~~$k_1 + k_2 + k_3 = 32$~~ , тогда

$$\begin{cases} 2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_1 \cdot q + 4 \cdot k_1 \cdot q^2 = 32\% \\ 3 \cdot k_1 + 2 \cdot k_1 \cdot q + 1 \cdot k_1 \cdot q^2 = 22\% \end{cases}$$

$$\text{из (2): } k_1 = \frac{22}{3 + 2q + q^2}$$

$$(2) \rightarrow (1): \frac{22}{q^2 + 2q + 3} \cdot (4q^2 + 3q + 2) = 32$$

$$\frac{88q^2 + 66q + 44}{q^2 + 2q + 3} = 32$$

$$88q^2 + 66q + 44 = 32q^2 + 64q + 96$$

$$56q^2 + 2q - 52 = 0 \quad | :2$$

$$28q^2 + q - 26 = 0, D = 1 + 2912 = 2913, > 0$$

а где кол-во?

$$\begin{cases} k_1 (2 + 3q + 4q^2) = 32 & (1) \\ k_1 (3 + 2q + q^2) = 22 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 (2 + 3q + 4q^2) = 32 & (1) \\ k_1 (3 + 2q + q^2) = 22 & (2) \end{cases}$$



Вариант № 1

$$q_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{2913}}{2 \cdot 28}$$

c_4 не подходит $\Rightarrow q =$

$$q = \frac{4 + \sqrt{2913}}{2 \cdot 28} = \frac{4 + \sqrt{2913}}{56}$$

$$\Rightarrow k_1 \cdot (2 + 3 - \cancel{4 + \sqrt{2913}})$$

$$k_1 \cdot (3 + 2 \cdot \frac{4 + \sqrt{2913}}{56} + (\frac{4 + \sqrt{2913}}{56})^2) = 22$$

$$k_1 \cdot (\frac{168 + 8 + 2\sqrt{2913}}{56} + \frac{16 + 8\sqrt{2913} + 2913}{56^2}) = 22$$

$$k_1 \cdot (\cancel{168} + \frac{89 + \sqrt{2913}}{28} + \frac{2929 + 8\sqrt{2913}}{56^2}) = 22$$

$$k_1 = 22 : \left(\frac{56^2 \cdot 89 + 56^2 \cdot \sqrt{2913} + 2929 \cdot 28 + 8 \cdot 28 \cdot \sqrt{2913}}{28 \cdot 56^2} \right)$$

$$k_1 = 22 \cdot \frac{28 \cdot 56 \cdot 56}{56^2 \cdot 89 + 56^2 \cdot \sqrt{2913} + 2929 \cdot 28 + 8 \cdot 28 \cdot \sqrt{2913}}$$

$$k_1 = \frac{22 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 56}{56^2 \cdot 89 + 56^2 \cdot \sqrt{2913} + 2929 \cdot 28 + 8 \cdot 28 \cdot \sqrt{2913}}$$

$$k_1 = \frac{22 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 56}{2 \cdot 56 \cdot 56 (89 + \sqrt{2913}) + 28 \cdot (2929 + 8\sqrt{2913})}$$

$$k_1 = \frac{22 \cdot 56 \cdot 56}{2 \cdot 56 \cdot (89 + \sqrt{2913}) + 2929 + 8\sqrt{2913}}$$

$$k_1 = \frac{22 \cdot 56 \cdot 56}{2 \cdot 56 \cdot 89 + 2 \cdot 56 \cdot \sqrt{2913} + 2929 + 8\sqrt{2913}} = \frac{22 \cdot 56 \cdot 56}{\sqrt{2913} \cdot 120 + 2 \cdot 56 \cdot 89 + 2929}$$

$$k_1 = 2222$$

$$\text{Ответ: } k_1 = \frac{22 \cdot 56 \cdot 56}{\sqrt{2913} \cdot 120 + 2 \cdot 56 \cdot 89 + 2929}$$

18



Вариант № 1

Задача 4.

ОДЗ:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26} \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 14y + 65} \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 14y + 65 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 14y + 65 \geq 0 \end{cases} \quad \text{2x+10y+26+8x+14y-65 \geq 0}$$

$$y = \frac{11-12x}{5}$$

Заметим:

$$\begin{aligned} x+1 &= a \\ y+5 &= b \end{aligned} \quad \text{Заметим, что}$$

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y+5)^2 &= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 10y + 25 = x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 16 = x^2 + y^2 - 8x - 14y + 32 \end{aligned}$$

Тогда перенесем:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = 13, \\ 12x + 5y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y+5)^2 &= 169 - 26 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} + (x-4)^2 + (y-4)^2 \\ 26 \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} &= 169 + (x-4)^2 + (y-4)^2 - (x+1)^2 - (y+5)^2 \\ 26 \cdot 26 \cdot ((x-4)^2 + (y-4)^2)^2 &= (169 + (x-4)^2 + (y-4)^2 - (x+1)^2 - (y+5)^2)^2 \end{aligned}$$

28