

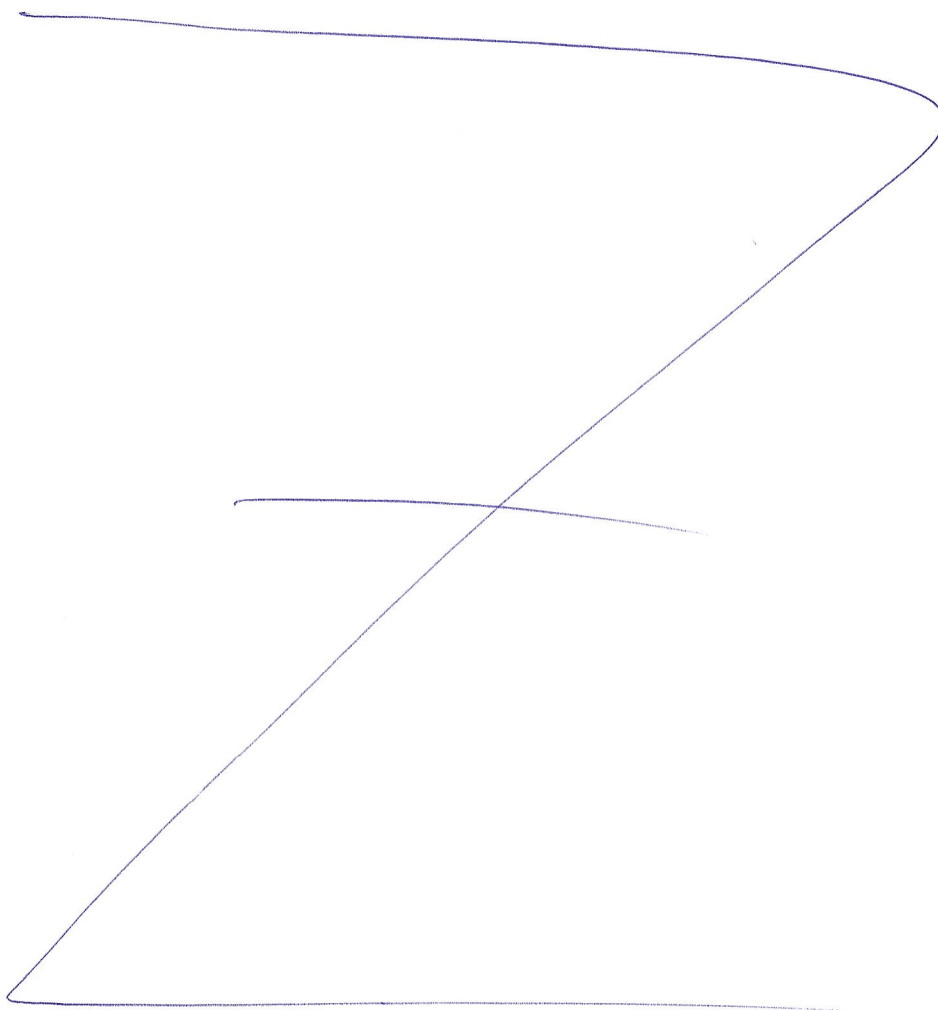


Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Шифр работы ЕН23-002
(не заполнять)

Вариант № 4

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)												
№ задания		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Полученный балл		5	0	8	1	—	5	1	4	1	0	25
I проверка	Подпись проверяющего				Σ баллов прописью	четырнадцать						
	Подпись проверяющего				Σ баллов прописью	одиннадцать						
II проверка	Подпись проверяющего				Σ баллов прописью	четырнадцать						
	Подпись проверяющего				Σ баллов прописью	одиннадцать						





Вариант № 4

№1

$$f(x) = \frac{9^x}{9^x - 3}$$

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2022}\right) + \dots + f\left(\frac{2021}{2022}\right) + f(1)$$

$$f(0) = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{9}{9-3} = \frac{3}{2}$$

$$f(0) + f(1) = 1$$

Разделим все слагаемые на пары таким образом:

$$\left(f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right)\right) + \left(f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{2020}{2022}\right)\right) + \dots = S$$

$$\text{Рассмотрим: } f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right) = \frac{\frac{9^{\frac{1}{2022}}}{9^{\frac{1}{2022}} - 3}}{\frac{9^{\frac{1}{2022}}}{9^{\frac{1}{2022}} - 3} - 3} + \frac{\frac{9^{\frac{2021}{2022}}}{9^{\frac{2021}{2022}} - 3}}{\frac{9^{\frac{2021}{2022}}}{9^{\frac{2021}{2022}} - 3} - 3} =$$

$$= \frac{9^{\frac{1}{2022}}}{9^{\frac{1}{2022}} - 3} + \frac{9}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{1}{2022}}} = \frac{9 - 3 \cdot 9^{\frac{1}{2022}}}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{1}{2022}}} + \frac{9}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{1}{2022}}} = \frac{9 - 3 \cdot 9^{\frac{1}{2022}}}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{1}{2022}}} = 1$$

Аналогично для других пар. Сумма такой пары = 1, т.е.

Пусть числитель x равен y , то есть $f(x) = f\left(\frac{2}{2022}\right) = f\left(\frac{y}{2022}\right)$, тогда

$$\text{в паре: } f\left(\frac{y}{2022}\right) + f\left(\frac{2022-y}{2022}\right) = \frac{\frac{9^{\frac{y}{2022}}}{9^{\frac{y}{2022}} - 3}}{\frac{9^{\frac{y}{2022}}}{9^{\frac{y}{2022}} - 3} - 3} + \frac{\frac{9^{\frac{2022-y}{2022}}}{9^{\frac{2022-y}{2022}} - 3}}{\frac{9^{\frac{2022-y}{2022}}}{9^{\frac{2022-y}{2022}} - 3} - 3}, \text{ допустив}$$

$$\text{второе слагаемое на } 9^{\frac{y}{2022}} \text{ получим: } \frac{9^{\frac{y}{2022}}}{9^{\frac{y}{2022}} - 3} + \frac{9}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{y}{2022}}} = \frac{9 - 3 \cdot 9^{\frac{y}{2022}}}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{y}{2022}}} + \frac{9}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{y}{2022}}} = \frac{9 - 3 \cdot 9^{\frac{y}{2022}}}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{y}{2022}}} + \frac{9}{9 - 3 \cdot 9^{\frac{y}{2022}}} = 1.$$

Мы доказали, что сумма любой пары равна 1, а таких пар 1010 и одно оставшееся число $f\left(\frac{1011}{2022}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9} - 3}$, при котором возникает математическая неопределённость.

Таких образы, если не брать $\pm(\frac{1011}{2022})$, получаем

Ответ: 1011

+5

№2

Рассмотрим случай, в котором приехал на лит-стоп первый автомобиль А. Тогда вероятность его приезда в любую минуту $\frac{1}{60}$. Если рассмотрим два крайних случая:

1) Если автомобиль А приехал в 10:30, тогда автомобиль Б должен приехать в 10:41 и позже. Вероятность этого $\frac{1}{60} \cdot \frac{40}{50}$. Т.к. автомобилю А подходит 1 из 50, а автомобилю Б 40 из 50 (по условию),

2) Если автомобиль А приехал в 11:09, тогда автомобиль Б должен прибыть в 11:20. Вероятность этого $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{50}$.
Так же понятно, что нам подходит случай, находящийся между этими случаями, т.е. $\frac{1}{60} \cdot \frac{39}{50}, \frac{1}{60} \cdot \frac{38}{50}, \dots, \frac{1}{60} \cdot \frac{2}{50}$. Обозначим, что автомобиль не встретится при условии, что ~~Б~~ приехал первый автомобиль А = $\frac{1}{60} \cdot \frac{40}{50} + \frac{1}{60} \cdot \frac{39}{50} + \dots + \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{50}$
 $= \frac{1}{60} \left(\frac{40}{50} + \frac{1}{50} \cdot 40 \right) = \frac{1}{60} \cdot \frac{41 \cdot 40}{100} = \frac{82}{5 \cdot 60} = \frac{41}{150}$

Если первый приехал автомобиль Б, то рассмотрим аналогично два крайних случая.

1) Автомобиль Б приехал в 10:30. Нам подходит, если автомобиль А приедет в 10:51 и позже. Вероятность: $\frac{1}{50} \cdot \frac{40}{60}$
2) Автомобиль Б приехал в 11:19. $\frac{1}{50} \cdot \frac{1}{60}$, т.к. автомобиль А должен приехать только в 11:30.

Вероятность, что автомобили не встретятся при условии, что автомобиль Б приехал первым = $\frac{1}{50} \cdot \frac{40}{60} + \dots + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{50} \cdot \left(\frac{40}{60} + \frac{1}{60} \right) \cdot 40$
 $= \frac{41 \cdot 40}{120 \cdot 50} = \frac{128}{200}$
(стр 3/9)



Вариант № 4

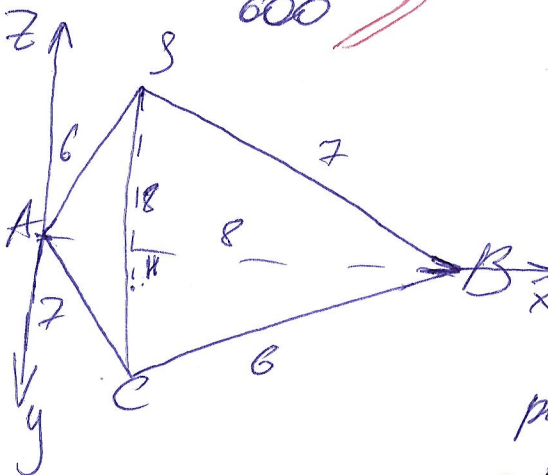
Тогда вероятность, что автомобили не встретятся

$$= \frac{123}{200} + \frac{41}{150} = \frac{369}{600} + \frac{164}{600} = \frac{533}{600}$$

— 05

Ответ: $\frac{533}{600}$

600



№3

Пусть $AB=8$, $AC=7$, тогда $BC=6$,

$SB=7$, $SC=8$, $AS=6$, если $SB=6$ или 7 , то

будет противоречие по условию задачи.
При выборе AB и AC , это единственное

расположение дмн.

Найти: V ?

Решение

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta} \cdot h$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin \angle C$$

теорема косинусов для ΔACB :

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos \angle C$$

$$64 = 49 + 36 - 2 \cdot 42 \cos \angle C$$

$$-21 = -2 \cdot 42 \cos \angle C$$

$$\cos \angle C = \frac{21}{4 \cdot 21} = \frac{1}{4}, \quad \sin^2 \angle C + \cos^2 \angle C = 1$$

$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

$$h = 84$$

Введем систему координат как показано на рисунке.

$$A(0;0;0)$$

$$B(8;0;0)$$

$$C(7 \cos \angle A; 7 \sin \angle A; 0)$$

$$C\left(\frac{77}{16}; \frac{7\sqrt{135}}{16}; 0\right)$$

Т. Косинусов для $\triangle ABC$

$$36 = 64 + 49 - 2 \cdot 56 \cos \angle A$$

$$77 = 2 \cdot 56 \cos \angle A$$

$$\cos \angle A = \frac{11}{16}$$

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}$$

$$\vec{AC} \left\{ \frac{77}{16}; \frac{7\sqrt{135}}{16}; 0 \right\}$$

$$\vec{BC} \left\{ -\frac{51}{16}; \frac{7\sqrt{135}}{16}; 0 \right\}$$

Нормаль к (ABC)

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{77}{16} & \frac{7\sqrt{135}}{16} & 0 \\ -\frac{51}{16} & \frac{7\sqrt{135}}{16} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}\left(\frac{77}{16} \cdot \frac{7\sqrt{135}}{16} - \left(-\frac{51}{16} \cdot \frac{7\sqrt{135}}{16}\right)\right) =$$

$$= \vec{k} \left(\frac{77 \cdot 7\sqrt{135}}{16^2} + \frac{3 \cdot 17 \cdot 7\sqrt{135}}{16^2} \right) = \frac{7\sqrt{135} \cdot 128}{16^2} = \frac{7\sqrt{135}}{2} \vec{k}$$

$$\vec{n} \left\{ 0; 0; \frac{7\sqrt{135}}{2} \right\}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{21\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{7\sqrt{135}}{2} = \frac{21 \cdot 7 \cdot 15}{8} = \frac{2205}{8}$$

Ответ: $\frac{2205}{8}$

± 85

14

стр 5/9

Количество правильных маршрутов не изменится, т.к. при передвижении зеленого дракона на место синего, а синего на место зеленого, то для новой точки не изменится количество маршрутов. Иначе, допустим, если мы соединим вершину с другими вершинами того же цвета, то ~~можно~~ можно будет убрать те пути, которые считаются правильными, в итоге:



Вариант № 4

№4

Остается некоторое четное количество путей этого цвета, аналогично для другого цвета. И, ~~заметь~~ поменяв вершины местами, ничего не изменится, т.к. при такой перестановке количество путей каждого цвета не изменится или поменяется на единицу, но тогда и другой цвет изменится на единицу, т.е.

№6

715

Дано:

$$d = \frac{L}{P} = \frac{1 \text{ мм}}{500}$$

$$\lambda_1 = 500 \text{ нм}$$

$$\lambda_2 = 600 \text{ нм}$$

$$\lambda_3 = 650 \text{ нм}$$

$K_{\text{max}} = ?$

$$d \sin \varphi = L_{\text{max}} \lambda \quad \varphi = 90^\circ \Rightarrow \sin \varphi = 1$$

$$d = L_{\text{max}} \lambda$$

$$K_{\text{max}_1} = \frac{d}{\lambda_1} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 500 \cdot 10^{-9}} = \frac{10^6}{25 \cdot 10^4} = 4$$

$$K_{\text{max}_2} = \frac{d}{\lambda_2} = \frac{10^{-3}}{5 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = \frac{100}{30} = 3 \frac{1}{3} \Rightarrow K_{\text{max}_2} = 3$$

$$K_{\text{max}_3} = \frac{d}{\lambda_3} = \frac{10^{-3}}{5 \cdot 65 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^3}{5 \cdot 65} = \frac{2 \cdot 100}{65} = \frac{2 \cdot 20}{13} = \frac{40}{13} = 3 \frac{1}{13} \Rightarrow K_{\text{max}_3} = 3$$

Следовательно на картинке 21 полюса. Если поставим спектрофотометр, то останется только свет с $\lambda = 500 \text{ нм}$, а период диф. решетки: $\frac{d}{2}$, то получим: $\frac{d}{2} = K_{\text{max}_4} \lambda_1$

$$K_{\text{max}_4} = \frac{d}{2 \lambda_1} = \frac{10^{-3}}{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \cdot 500} = \frac{10^6}{50 \cdot 10^4} = 2, \text{ тогда}$$

полос будет 5.

Была 21 полюс, а стало 5 полюс $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: уменьшится на 16

Dano:
 $p = 10^5 \text{ Pa}$
 $M = 302$
 $V_2 = \frac{1}{3} V_1$
 $T_2 = 273 \text{ K}$
 $R = 0,074$
 $\mu = 0,1$
 $T_0 = 300 \text{ K}$
 $F_{mp} = ?$



$N7$
 $p_A + \frac{mg}{S} = p_0 + \frac{F_{mp}}{S}$
 $S = \pi R^2$
 $p_0 V = \nu R T_0$
 $p_0 V = \frac{\nu R T_0}{V}$



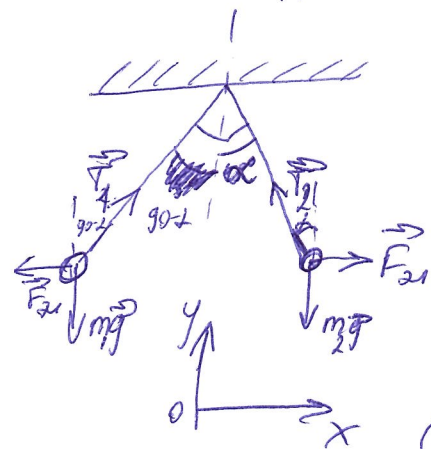
$p_2 V_2 = \nu_2 R T_2$
 $p_2 = p_A + \frac{mg}{S} = p_0$
 $p_2 = p_0$
 $p_0 V_2 = \frac{\nu_2 R T_2}{V_2}$

$F_{mp} = p_A S + mg - p_0 S$

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2 T_2}{V_1 T_0} = \frac{1}{3} \frac{273}{300} = \frac{91}{300}$

$V_1 = S h = \pi R^2 h$
 $V_2 = \pi R^2 (h - x)$

$\frac{h}{h-x} = \frac{300}{91} \Rightarrow 300x = (300-91)h$
 $x = \frac{209h}{300}$



N8

$x = l(\sin \alpha + \cos \alpha) - ?$

Dano: $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $l = 2,5 \text{ m}$
 Naizumi: $x = ?$

Решение

23-й закон Ньютона: m_2 ; $T_2 \cos \alpha = m_2 g$ (на OY)
 23-й закон Ньютона: m_1 ; $T_1 \sin \alpha = m_1 g$ (на OX)

$\frac{T_2 \cos \alpha}{T_1 \sin \alpha} = \frac{m_2}{m_1} = 2$

$T_2 \cos \alpha = 2 T_1 \sin \alpha$

23-й закон Ньютона: m_2 на OX: $T_2 \sin \alpha = \frac{K q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow$
 где m_1 : $T_1 \cos \alpha = \frac{K q_1 q_2}{r^2}$

$\Rightarrow T_2 \sin \alpha = T_1 \cos \alpha$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_2}{T_1} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ T_2 \cos \alpha = 2 T_1 \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha}$

(стр 7/5)



Вариант № 4

$$\cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

N8

$$\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha \quad (\text{т.к. } \alpha \in [0; 90])$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$3 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$X = 2,5 \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{2,5 + 5\sqrt{3}}{3} = \frac{25 + 50\sqrt{3}}{30} = \frac{5 + 10\sqrt{3}}{6}$$

Ответ: $\frac{5 + 10\sqrt{3}}{6}$

N9

цифра 0 в длину 6 пачек отрезков = $0,3 \cdot 6 = 1,8$ м

цифра 2: 3 отрезка и диагональ = $0,3 \cdot 3 + 0,3 \cdot \sqrt{2} = 0,9 + 0,3\sqrt{2}$ м

цифра 3: 5 отрезков = $5 \cdot 0,3 = 1,5$ м. Расход 2 отрезков

$$L_{\text{п}} = 1,8 + 1,5 + 1,8 + 0,6\sqrt{2} + 0,6 = 3,6 + 1,5 + 0,6\sqrt{2} = 5,1 + 0,6\sqrt{2} \text{ м}$$

$$R = \frac{S L}{S} = \frac{1,15 \cdot 10^{-6} (5,1 + 0,6\sqrt{2})}{9,1 \cdot 10^{-3}} = 1,15 \cdot 10^{-2} (5,1 + 0,6\sqrt{2}) = (6,9 + 0,69\sqrt{2}) \cdot 10^{-2}$$

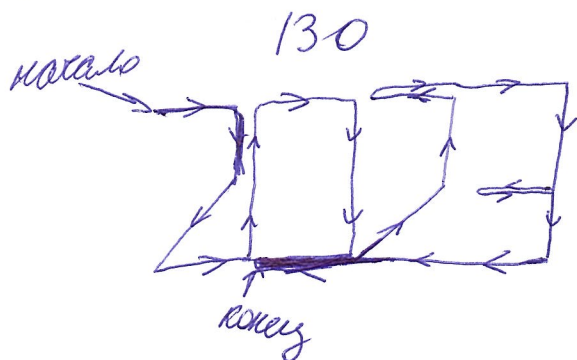
$$= 6,9 + 0,9\sqrt{2} \text{ мкОм}$$

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow \frac{220^2}{6,9 + 0,9\sqrt{2}} \quad P = \frac{U^2}{R} \quad U = \sqrt{R P} = \sqrt{(6,9 + 0,9\sqrt{2}) \cdot 40,13} =$$

$$= \frac{2}{10} \sqrt{6,9 + 0,9\sqrt{2}} \approx 1,7 \text{ В, а напряжение } 220 \text{ В} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Розоруживает трансформацию 130

65,55
 Ответ: ~~65,55~~ + 6,952 м/с



N10

Если он попадал в центры сторон ~~то~~ ³ ~~несколько~~ раз, то после 1 ~~го~~ попадания куб сделал 1 поворот, так что грани лежащие местами, во второй раз тоже, но за меньшее время

Поворот на угол 90° , т.е. $\frac{\pi}{2}$. ~~В~~ $\frac{\pi}{2} = \frac{a_{\omega} t^2}{2}$

0

$$\pi = a_{\omega} t^2$$

$$E_n = mgh_n \text{ (в начальном моменте времени)}$$

$$\omega = a_{\omega} t$$

$$\frac{m v_1^2}{2} = mgh_1$$

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$E_1 = mgh_2, \text{ где } h_2 = \frac{v_{k2}^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_{k2}^2}{2g}, \quad v_{k2} = n v_1, \quad v_1 = gt = \sqrt{\frac{\pi}{a_{\omega}}}$$

$$E_2 = mgh_3, \quad h_3 = \frac{v_{k3}^2}{2g}, \quad v_{k3} = n v_{k2}, \quad v_{k3} = n^2 v_1$$

$$\frac{E_n}{E_1} = \frac{h_1}{h_2} =$$