



Вариант № 2

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)											
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Полученный балл	5	0	0	7	0	—	1	1	1	—	15
I проверка	Подпись проверяющего			Σ баллов прописью	двенадцать						
	Подпись проверяющего			Σ баллов прописью	три						
II проверка	Подпись проверяющего			Σ баллов прописью	двенадцать						
	Подпись проверяющего			Σ баллов прописью	три						

№1:

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x - 2}$$

рассмотрим сумму $f(a) + f(b)$, где $a+b=1$

$$\begin{aligned} \frac{4^a}{4^a - 2} + \frac{4^b}{4^b - 2} &= \frac{4^a(4^b - 2) + 4^b(4^a - 2)}{(4^a - 2)(4^b - 2)} \\ &= \frac{4^{a+b} - 2 \cdot 4^a + 4^{a+b} - 2 \cdot 4^b}{4^{a+b} - 2 \cdot 4^a - 2 \cdot 4^b + 4} \quad ; \text{ подставим } a+b=1 \\ &= \frac{4 - 2 \cdot 4^a + 4 - 2 \cdot 4^b}{4 - 2 \cdot 4^a - 2 \cdot 4^b + 4} = \frac{8 - 2(4^a + 4^b)}{8 - 2(4^a + 4^b)} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) = 1, \text{ при } a+b=1$$

$$\text{тогда } f(0) + f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right) + f(1)$$

сгруппируем попарно, всего чисел 2023 $\Rightarrow$ будет 1011 пар и $f\left(\frac{1011}{2022}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}} - 2} = \frac{2}{0}, \text{ что не может быть, } f(x) \text{ не определена в } x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{сумма} = 1011$$

Ответ: 1011

+ 55

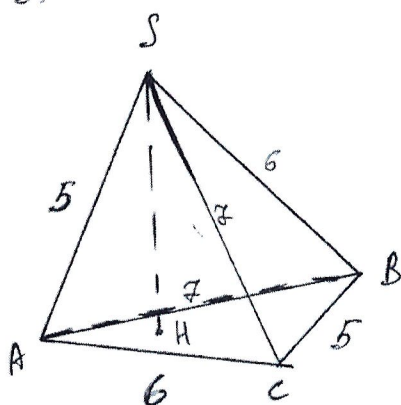


Вариант № 2

- №2: автомобиль А: с 9:30 до 10:30 ч 10 мин лит. стоп $\Rightarrow$ значит он может находиться там с 9:30 до 10:40 $\Rightarrow$ промежуток 70 минут
автомобиль В: с 9:30 до 10:20 ч 20 мин лит. стоп $\Rightarrow$ значит он может находиться там с 9:30 до 10:40 $\Rightarrow$ промежуток 70 минут
замечим, что время (с 9:30 до 10:40) у них совпадает:
тогда вероятность: $\frac{10}{70} \cdot \frac{20}{70} = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{49}$

Ответ: $\frac{2}{49}$

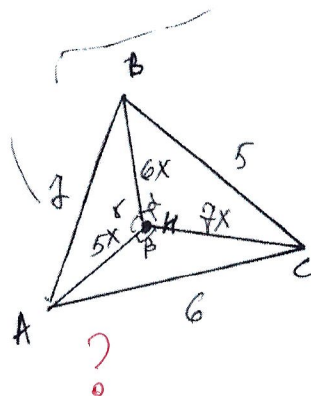
№3:



~~забываю, что стороны BAC есть.~~

в $\triangle SBA$: стороны SB и SA равны 6 и 5 в каком-то порядке, если SA=6, то в $\triangle SAC$ есть 2 стороны по 6, так не может быть $\Rightarrow SA=5$
 $\Rightarrow SB=6 \Rightarrow SC=7$

замечим, что и будет такой случай что:



по Т. Косинусов

$$\triangle KBC: 25 = 36x^2 + 49x^2 - 84x^2 \cos \alpha$$

$$\triangle KCA: 36 = 49x^2 + 25x^2 - 70x^2 \cos \beta$$

$$\triangle AKB: 49 = 36x^2 + 25x^2 - 60x^2 \cos \gamma$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{25 - 85x^2}{-84x^2}; \cos \beta = \frac{36 - 64x^2}{-70x^2}$$

$$\cos \gamma = \frac{49 - 61x^2}{-60x^2}$$



Вариант № 2

№4

рассмотрим правильный 12-угольник;



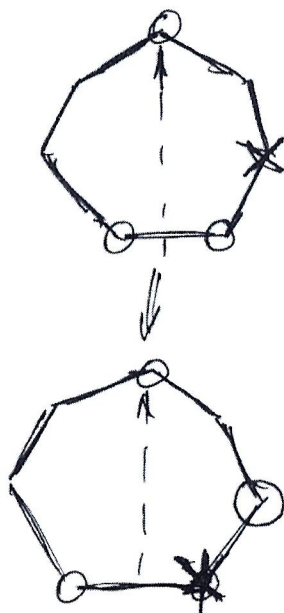
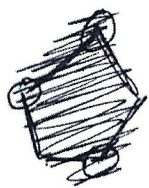
~~нужно~~ раскрасить обычные вершины белым, а дефектные чёрным, тогда ~~на~~ одинаковым треугольником будет называться тот треугольник у которого все вершины одного цвета.

для того чтобы построить ^{равнобедр} треугольник в 12-угольнике необходимо выбрать диагональ (пусть для однозначности ^{выбранная диагональ имеет направление})

которая проходит через центр описанной окружности и одну вершину, тогда та точка куда направлена диагональ будет вершиной, другие ~~две~~ ^{две вершины будут} симметричные относительно диагонали ^{вершины}

пусть ~~какие~~ вершины как-то раскрашены, не угадывая общности выберем какие-то одноцветные вершины (обозначим их 0) (для простоты будем изобразить на ~~7~~ ⁷-ми 12-угольнике)

и 1 вершину другого цвета (обозначим X)



~~для 1 выбранной вершины~~ затем поменяем местами 2 вершины разных цветов теперь ~~если не~~ для выбранной ~~какой-то~~ четверки и диагонали стало на 1 меньше ~~преж~~ но тогда проверим ~~на какой-то~~ диагональ и из ~~этой~~ той же четверки получаем 1 треугольник

⇒ если при фиксированном n как-то переставить вершины, то кол-во треугольников не изменится ⇒ при n кол-во ^{пред} фиксировано

т.т.д

± 75



Вариант № 2

№5

a, b : решение:

$$|x + \cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a| + |x - \sin^2 a| = b(a - \frac{5\pi}{2})$$

заметим, что если x_0 — корень

то: $-x_0 - \cos^2 2a + 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a$, тоже корень

м.к:

$$\begin{aligned} & | -x_0 - \cos^2 2a + 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a | + | x_0 + \cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a | \\ & + | -x_0 - \cos^2 2a + 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a | + | x_0 + \cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a | \\ & = | -x_0 + \sin^2 a | + | -x_0 - \cos^2 2a + 2\sin a \cos^4 2a | = \\ & = | x_0 + \sin^2 a | + | x_0 + \cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a | \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ чтобы было решение необходимо:

$$x_0 = -x_0 - \cos^2 2a + 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a$$

$$x_0 = \frac{1}{2} (-\cos^2 2a + 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a)$$

$$\text{подставим } x_0: \left| \frac{1}{2} (\cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a) \right| + \left| \frac{1}{2} (-\cos^2 2a + 2\sin a \cos^4 2a - \sin^2 a) \right| = b(a - \frac{5\pi}{2})$$

$$= |\cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a| = b(a - \frac{5\pi}{2})$$

$$|\cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a| \geq |\cos^8 2a - 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a| = (\cos^4 2a - \sin a)^2$$

$$\cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a \geq 0$$

$$\Rightarrow (\cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a) = b(a - \frac{5\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{(\cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a)}{a - \frac{5\pi}{2}} \Rightarrow$$

② -05

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (a; b) = \left(a; \frac{(\cos^2 2a - 2\sin a \cos^4 2a + \sin^2 a)}{a - \frac{5\pi}{2}} \right)$$

При некотором a , b может быть любым



Вариант № 2

№8.

Дано:

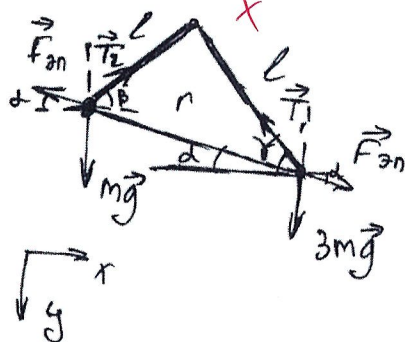
$$l = 2 \text{ м}$$

$$m_1 = 3m_2 = 3m$$

Найти:

$$r' = ?$$

Решение:



$$r' = r \cos \alpha, \text{ и } 3m: \vec{m}\vec{g} + \vec{F}_{\text{ан}} + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Введём оси и найдем проекции сил на оси

$$x: -F_{\text{ан}} \cos \alpha + T_2 \cos \beta = 0$$

$$y: mg - T_2 \sin \beta = 0 \Rightarrow$$

$$x: F_{\text{ан}} \cos \alpha = T_1 \cos \gamma = 0$$

$$y: 3mg - T_1 \sin \gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\text{ан}} = \frac{T_2 \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{T_1 \cos \gamma}{\cos \alpha}$$

$$\begin{cases} mg = T_2 \sin \beta \\ 3mg = T_1 \sin \gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{T_2 \sin \beta}{T_1 \sin \gamma} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sin \gamma}{3 \sin \beta}$$

$$\text{из } F_{\text{ан}}: T_2 \cos \beta = T_1 \cos \gamma \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \Rightarrow \tan \gamma = 3 \tan \beta$$

замечим, что треугольник равнобедренный $\rightarrow$

$$\Rightarrow \beta + \alpha = 45^\circ$$

$$\gamma - \alpha = 45^\circ \Rightarrow \gamma = 45^\circ + \alpha$$

$$\Rightarrow \tan(45^\circ + \alpha) = 3 \tan(45^\circ - \alpha)$$

$$\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 45^\circ \tan \alpha} = \frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$\tan(45^\circ - \alpha) = \frac{\tan 45^\circ - \tan \alpha}{1 + \tan 45^\circ \tan \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$\text{пусть } \tan \alpha = x \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = \frac{3(1-x)}{1+x} \Rightarrow (1+x)^2 = 3(1-x)^2$$

$$1 + 2x + x^2 = 3 - 6x + 3x^2$$

$$2x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{Страница } 5 \text{ из } 8$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \tan \alpha = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\alpha > 45^\circ \Rightarrow \tan \alpha = 2 + \sqrt{3}$$

$$\alpha < 45^\circ \Rightarrow \tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$$



Вариант № 2

№8 (продолжение):

$$\cancel{\text{tg} \alpha = 2 + \sqrt{3}}$$

$$\cancel{\text{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^2 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$$

$$\text{пусть } \cos^2 \alpha = k$$

$$\cancel{(2 + \sqrt{3})^2 = \frac{1 - k}{k}}$$

$$\cancel{(2 + \sqrt{3})^2 k = 1 - k}$$

$$\cancel{(2 + \sqrt{3})^2 k + k = 1; (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}}$$

$$\cancel{k(8 + 4\sqrt{3}) = 1}$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos^2 \alpha = \frac{1}{8 + 4\sqrt{3}}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \cancel{r' = r \cos \alpha; r = \sqrt{2} \ell \text{ (по т. Пифагора)}}$$

$$\Rightarrow \cancel{r' = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}}$$

$$\text{Ответ: } \cancel{r' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}}$$

$$\text{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{пусть } k = \cos^2 \alpha \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{1 - k}{k}$$

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow (7 - 4\sqrt{3})k = 1 - k$$

$$(8 - 4\sqrt{3})k = 1$$

$$k = \frac{1}{8 - 4\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}$$

$$r' = r \cos \alpha; r = \sqrt{2} \ell \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$\Rightarrow r' = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}$$

$$\text{Ответ: } r' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}$$



Вариант № 2

№

заменим, что есть 6 ~~точек~~ ^{точек} которыми подключена кеттисе
коп-во перемычек $\Rightarrow$ если нажать и закончить в ~~одн~~ 2 из 6 ~~точках~~ ^{точках}
и через другие 2 ^{пары} пройти поочерёдно, то количество перемычек
из провода ~~из~~ ^{будет} не менее коп-во перемычек ^{на рисунке} + 2
т.к. если ~~зайти~~ ^{выйти} ~~проводом~~ в одну из таких перемычек 1 раз,
то останется 1 не проведённая перемычка из провода, тогда
когда мы проведём её будет необходимо из неё выйти $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ в паре точек будет +1 перемычка



т.к. ^{общ. 2 пары} перемычек $(4+6+4+5) = 19$, то проводом будет проведено

$19+2$ перемычек $= 21 \Rightarrow$ длина провода $l = 21 \cdot 0,35 \text{ м}$

Дано:

$$l = 0,35 \cdot 23 \text{ м}$$

$$\rho = 5 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$r = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{2} \text{ м}$$

Найти:

$$R = ?$$

$$N = ?$$

Решение

$$R = \frac{l \cdot \rho}{S}; \quad S = \pi r^2 \Rightarrow R = \frac{l \cdot \rho}{\pi r^2} = \frac{21 \cdot 0,35 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-10}}$$

$$R = \frac{21 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 4}{3,14 \cdot 25} = \frac{21 \cdot 7 \cdot 4}{3,14} = \frac{588}{3,14} = 18,7 \text{ Ом}$$

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow U^2 = PR \Rightarrow U = \sqrt{PR}; \quad P = 50 \text{ Вт}$$

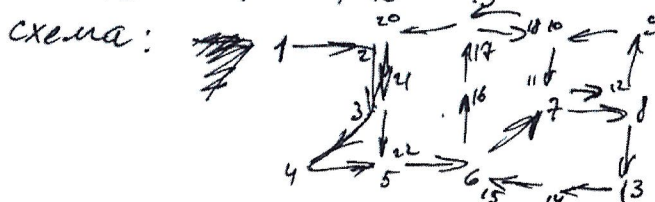
$$N = \frac{U}{U'}; \quad U' = 220 \text{ В}$$

$$N = \frac{50 \cdot 18,7}{220} = \frac{935}{220} = \frac{9,5}{2,2} = 0,43$$

$$N = \frac{50 \cdot 18,7}{220} = \frac{935}{220} = 4,25$$

$$\text{Ответ: } R = 18,7 \text{ Ом}$$

$$N = 0,43$$





Вариант № 2

№7

Дано:

$$M = 0,1 \text{ кг}$$

$$r = 0,06 \text{ м}$$

$$T_n = 273 \text{ К}$$

$$F = 51,5 \text{ Н}$$

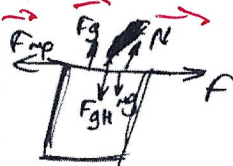
$$\mu = 0,1$$

$$p_0 = 10^5 \text{ Па}$$

Найти:

$$T_n = ?$$

Решение:



$$F \geq F_{fr} \Rightarrow F = F_{fr} = \mu N \Rightarrow N = \frac{F}{\mu}$$

$$F_g + N - F_{gn} - Mg = 0$$

$$N = F_{gn} + Mg - F_g$$

$$N = p_0 S + Mg - p_k S \Rightarrow p_k = p_0 + \frac{Mg}{S} - \frac{N}{S} \quad (*)$$

$$F_{fr} = \mu N$$

$$p_k: pV = \nu RT \Rightarrow$$

$$\int p_0 V = \nu RT_n$$

$$\Rightarrow \int p_k V = \frac{\nu}{2} RT_k \Rightarrow \frac{p_k}{p_0} = \frac{1}{2} \frac{T_k}{T_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{T_k p_0}{2 p_k}$$

$$S = \pi r^2 = 3,14 \cdot 36 \cdot 10^{-4} = 113,04 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$(*) \Rightarrow p_k = p_0 + \frac{Mg}{S} - \frac{F}{\mu S} = 10^5 + \frac{0,1 \cdot 10}{113,04 \cdot 10^{-4}} - \frac{51,5}{113,04 \cdot 10^{-5}}$$
$$= 10^5 + \frac{1}{113,04} \cdot 10^5 - \frac{51,5}{113,04} \cdot 10^5 =$$

$$= 10^5 (1 + 0,0088 - 0,456) = 0,55 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$T_n = \frac{273 \cdot 10^5}{2 \cdot 0,55 \cdot 10^5} = \frac{273}{0,9} = \frac{2730}{9} = 303,1 \text{ К}$$

$$\text{Ответ: } T_n = 303 \text{ К}$$