



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Шифр работы ЕН32-04
(не заполнять)

Вариант № 1

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)											
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Полученный балл	5	3	105	105	5	0	2	2	0	0	34
I проверка	Подпись проверяющего			Σ баллов прописью							
	Подпись проверяющего			Σ баллов прописью		два сорока тридцать три					
II проверка	Подпись проверяющего			Σ баллов прописью		тридцать три					
	Подпись проверяющего			Σ баллов прописью		сорок					

Large handwritten mark, possibly a stylized 'Z' or '7'.



Вариант № 1

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}; \quad f(x) + f(y) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^y}{4^y + 2} = \frac{2 \cdot 4^{x+y} + 2 \cdot (4^x + 4^y)}{4^{x+y} + 2 \cdot (4^x + 4^y) + 4}, \text{ если } x+y=1, \Rightarrow f(x) + f(y) = \frac{2 \cdot 4^1 + 2 \cdot (4^x + 4^y)}{4^1 + 2 \cdot (4^x + 4^y) + 4} = 1$$

$$S = f(0) + f(1) + \left(f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2022}{2023}\right) \right) + \left(f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right) \right) + \left(f\left(\frac{3}{2023}\right) + f\left(\frac{2020}{2023}\right) \right) + \dots + \left(f\left(\frac{1011}{2023}\right) + f\left(\frac{1012}{2023}\right) \right) = f(0) + f(1) + 1011 = \frac{4^0}{4^0 + 2} + \frac{4^1}{4^1 + 2} + 1011 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1011 = 1012,$$

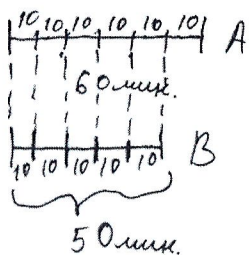
так как в каждой скобке было $(f(x) + f(1-x))$, а скобок было 1011.

Ответ: $S = 1012$.

55

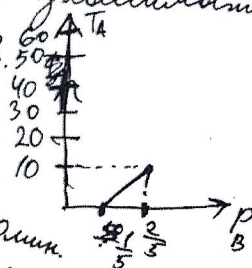
№2.

Промежуток времени, когда поезд А мог приехать, длился час, а промежуток, когда В мог приехать, длился 50 минут.



Но каждый из них приходится на перелом по 10 минут, значит, время, в которое мог поезд А приходится на переломе, равно $60 + 10 = 70$ минут, а поезд В — $50 + 10 = 60$ минут.

Если поезд А приехал в первые 10 минут, то вероятность того, что поезд В его встретит можно найти по графику зависимости времени приезда А от вероятности встречи с В. Если А приехал ровно в 8:30, то В его встретит с вероятностью $\frac{10}{50}$, так как А стоит 10 минут на переломе, а В может приехать в промежуток длиной 50 минут. Если же А приедет в 8:40, то вероятность станет $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, так как поезд В сможет встретить А, если приедет в промежуток с 8:30 до 8:50 (длина 20 минут).



Вероятность будет возрастать линейно с увеличением времени приезда поезда А, значит, вероятность того, что поезд А приедет с 8:30 до 8:40 и встретит В равна $\frac{10}{60} \cdot \frac{(\frac{1}{5} + \frac{2}{5})}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{20} = \frac{1}{40}$



Вариант № 1

В выражение я подставил $\frac{10}{60}$, так как А может приехать в течение 10 минут, но я взял из кнх лишь промежуток в 10 минут.

Если А приедет в промежуток с 8:40 до 8:50, то вероятность будет $\frac{2}{5}$, чтобы ~~всегда~~ встретить В (считается аналогично, как и для времени приезда А равном 8:40, для которого было показано выше, что вероятность встретить В равна $\frac{2}{5}$).

Тогда вероятность, что А приедет с 8:40 до 9:10 и встретит В, равна $\frac{30}{60} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$, так как этот промежуток длится 30 минут.

Вероятность того, что, если А приедет в ~~предпоследние~~ последние 10 минут (с 9:00 до 9:20) считается аналогично ~~к~~ вероятности для приезда А в первые 10 минут, так как для В эти 10 минут являются последними.

Значит, она равна тоже $\frac{1}{10}$.

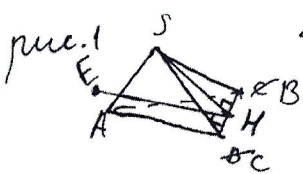
Если же А приедет в последние 10 минут, то вероятность встречи с В будет считаться аналогично вероятности, если А приехал бы в первые 10 минут, но теперь вероятность будет считаться с $\frac{1}{5}$ до 0, значит она будет равна $\frac{10}{60} \cdot \frac{(0+\frac{1}{5})}{2} = \frac{1}{60}$

Теперь сложил все вероятности для получения вероятности встречи

$$P = \frac{1}{40} + \frac{1}{5} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{12+3+1}{60} = \frac{4}{15}$$

35

Ответ: $\frac{4}{15}$.



№3.
Пусть $BC=4$; $AB=6$; $AC=5$; тогда $SB=5$; $SA=4$; $SC=6$, чтобы условие выполнялось.

$$P_{ABC} = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{6+4+5}{2} = \frac{15}{2}$$

Страница 3 из 7

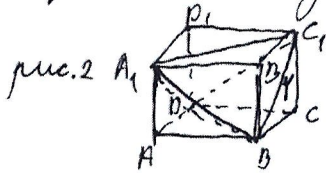
$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} - 4\right) \left(\frac{15}{2} - 5\right) \left(\frac{15}{2} - 6\right)} = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{15}{4} \sqrt{7} \text{ по формуле Герона.}$$

Отсюда высота h в $\triangle ABC = \frac{S_{ABC} \cdot 2}{BC} = \frac{15\sqrt{7}}{8}$, если h опущена на ~~на~~ BC.



Вариант № 1

Но $\triangle SBC = \triangle ABC$ по 3 сторонам, $\Rightarrow SH$ - высота из S на BC , $\Rightarrow SH = h = \frac{15\sqrt{7}}{8}$, тогда пусть EH - перпендикуляр в т. H на BC , лежащий в (ABC) (плоскости ABC).
Можно заметить, что противоположные рёбра тетраэдра равны, значит, его можно вписать в параллелепипед так, чтобы противоположные рёбра были диагоналями ~~и~~ сторон параллелепипеда



Пусть A, C в пар-де равна SA в тетраэдре
Пусть C_1 на рис. 2 - это S на рис. 1;
 A_1 на рис. 2 - это A на рис. 1; B на рис. 2 - это B на рис. 1;

O на рис. 2 - это C на рис. 1. Пусть $A, B = a$; $B, C = b$; $AB = c$;

Тогда по т. Пифагора $a^2 + b^2 = A_1B^2 = AB^2 = 36$
 $b^2 + c^2 = B_1C^2 = BC^2 = 25$
 $a^2 + c^2 = A_1C^2 = AS^2 = 16$

$a^2 = 36 - b^2, \Rightarrow$

$3a^2 + c^2 = 36 - b^2 + c^2 = 16, \Rightarrow b^2 - c^2 = 20, \Rightarrow c^2 = b^2 - 20, \Rightarrow b^2 + c^2 = 2b^2 - 20 = 25, \Rightarrow$
 $b = \sqrt{\frac{45}{2}}; a^2 = 36 - \frac{45}{2} = \frac{27}{2}; a = \sqrt{\frac{27}{2}} = 3\sqrt{\frac{3}{2}}; b = 3\sqrt{\frac{5}{2}}; c^2 = \frac{45}{2} - 20 = \frac{5}{2}; c = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$V_{ABC...D_1} = a \cdot b \cdot c$, но $V_{SABC} = V_{C_1BA_1D} = V_{ABC...D_1} - V_{BB_1CA} - V_{A_1B_1CD} - V_{A_1ABD} - V_{C_1CBD} =$
 $= \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot c - 4 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot abc \right) = abc - \frac{2}{3} abc = \frac{1}{3} abc$

$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15\sqrt{6}}{4}$

Ответ: $\frac{15\sqrt{6}}{4}$.

105

N=4

Рассмотрим какие вообще могут быть равнобедренные треугольники.
Поскольку 2023 - нечётное число, то если вписать окружность около правильного 2023-угольника, получим, что, если провести диаметр через любую точку вершины многоугольника, то оставшиеся 2022 вершины будут симметричны относительно него.



Вариант № 1

Тогда для каждой вершины многоугольника найдётся $\frac{2022}{2} = 1011$ равнобедренных треугольников, для которых эта вершина многоугольника будет являться вершиной равнобедренного треугольника.

Заметим, что $1011 + 1 = 1012$ (на столько отрезков разделят вершины многоугольника ~~одну~~ ~~полюсность~~), следовательно ~~длина отрезка~~ ~~а, значит,~~ не будет равнобедренных треугольников.

Тогда если среди 2023 чисел m m серебряных, то $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ —

— количество равнобедренных треугольников, где одна из двух из двух вершин точно серебряные. Если же m —

Тогда всего одноцветных треугольников будет

$$(2023-m) \cdot (1011-m) + C_m^2 = (2023-m) \cdot (1011-m) + \frac{m(m-1)}{2}, \text{ где } (2023-m) - \text{количество}$$

золотых чисел; $1011-m$ — количество золотых одноцветных треугольников для каждой золотой чисел, а $\frac{m(m-1)}{2}$ —

— количество серебряных одноцветных чисел и, прибавив к ним количество ~~од~~ равнобедренных треугольников, где 2 вершины серебряные, а третья золотая (их прибавляю, так как в первом случае я вычел их 2 раза), ведь $1011-m$ — это количество треугольников, где все 3 вершины точно золотые, при этом это количество посчитано для одной вершины многоугольника, которая является вершиной этого треугольника, но при вычитании m ~~случаев~~, где 2 вершины серебряные, а третья золотая, вычитается дважды, поэтому я и прибавляю в конце C_m^2 .

Можно заметить, что это число не зависит ни от чего, кроме числа m , а, значит, утверждение прав.

Ответ: он прав. Количество равно $(2023-m) \cdot (1011-m) + \frac{m(m-1)}{2}$.



Вариант № 1

№5

$$|x + \cos^2 4a - 2 \sin a \cdot \cos^4 a| + |x - \sin^2 a| = b \left(a + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Если $x \geq \sin^2 a$, то пусть $x = \sin^2 a + c$, где $c \geq 0$

$$x + \cos^2 4a - 2 \sin a \cdot \cos^4 a = c + \sin^2 a + \cos^2 4a - 2 \sin a \cdot \cos^4 a =$$

$$= c + (\sin a - \cos^4 a)^2 + \cos^2 4a - \cos^8 a \geq 0, \text{ т.к. } c \geq 0$$

$$\begin{cases} (\sin a - \cos^4 a)^2 \geq 0 \\ \cos^2 4a \geq \cos^8 4a, \text{ т.к. } 1 \geq \cos^6 4a \end{cases} \Rightarrow$$

$$x + \cos^2 4a - 2 \sin a \cdot \cos^4 a + x - \sin^2 a = b \left(a + \frac{3\pi}{2}\right) - \text{линейное уравнение, имеет 1 корень.}$$

Если же $x \leq 2 \sin a \cdot \cos^4 a - \cos^2 4a$, $\Rightarrow x \leq \sin^2 a$, как следовало из выше описанного, $\Rightarrow x - \sin^2 a \leq 0$, $\Rightarrow$

$$-(x + \cos^2 4a - 2 \sin a \cdot \cos^4 a + x - \sin^2 a) = -(2x + \cos^2 4a - 2 \sin a \cdot \cos^4 a - \sin^2 a) = b \left(a + \frac{3\pi}{2}\right), \text{ но}$$

выражение слева $b \left(a + \frac{3\pi}{2}\right)$ не может быть сразу и положительным, и отрицательным, значит, либо $b \left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$, а значит оба выражения имеют одинаковый корень. В противном случае нужно сделать так, чтобы у системы не было корней. Значит $b \left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$, иначе будет 2 корня.

Ответ: $b=0$; $a = -\frac{3\pi}{2}$; если $b=0$, то a - любое; если $a = -\frac{3\pi}{2}$, то b - любое.

$$V_1 = V_2 = V = \text{const}$$

$$m_k = 65 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$R = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1$$

$$T_2 = 0^\circ \text{C} = 273 \text{ К}$$

$$T_1 = 300 \text{ К}$$

$$\mu = 0,1$$

$$p_1 = p_0 = 10^5 \text{ Па}$$

$$F = ?$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_1 V}{T_1} = \nu_1 R = \frac{4}{2} \nu_2 R = 2 \cdot \frac{p_2 V}{T_2}$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = 0,91 p_1 = 0,91 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$|F_2| = |p_2 \cdot S - p_0 \cdot S| = |p_2 \cdot S - p_1 \cdot S| = 0,09 \cdot p_1 \cdot S$$

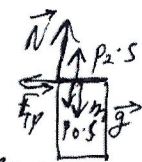
$$F = F_{\text{тр}} = \mu \cdot N; S = \pi \cdot R^2$$

$$N = F_2 + mg = 0,09 \cdot p_1 \cdot S + mg = 0,9 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 65 \cdot 10^{-2} =$$

$$= 225 \cdot 10^{-1} + 0,65 = 22,5 + 0,65 = 23,15 \text{ Н}$$

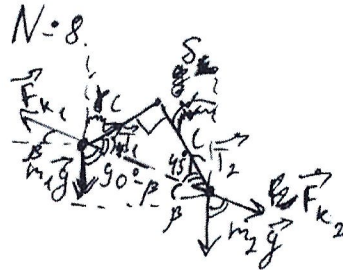
$$F = F_{\text{тр}} = \mu N = 0,1 \cdot 23,15 = 2,315 \text{ Н.}$$

Ответ: 2,315 Н.





Вариант № 1



Нет мотива
решения!

$q_1 \cdot q_2 \geq 0$
 $l = 1 \text{ м}$
 $d = 90^\circ$
 $m_1 = 1 \text{ кг}$
 $m_2 = 3 \text{ кг}$
 $h = ?$

$F_{k1} = F_{k2} = F_k$
 $F_k = \frac{k \cdot |q_1| \cdot |q_2|}{r^2} = \frac{k q_1 q_2}{2l^2}$

$r^2 = 2l^2$ по Т. Пифагора

$T_1 \cdot \cos(45^\circ + \beta) = \cos \beta \cdot \cos 45^\circ - \sin \beta \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \beta - \sin \beta)$

$T_1 \cdot \cos(45^\circ + \beta) = m_1 g - F_k \cdot \sin \beta$

$T_1 \cdot \sin(45^\circ + \beta) = F_k \cdot \cos \beta$

$\sin(45^\circ + \beta) = \sin \beta \cdot \cos 45^\circ + \cos \beta \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \beta + \cos \beta)$

$\delta = 90^\circ - 45^\circ - \beta = 45^\circ - \beta$

$T_2 \cdot \cos(45^\circ - \beta) = F_k \cdot (\cos 90^\circ - \beta) + m_2 g = F_k \cdot \sin \beta + m_2 g$

$T_1 \cdot \cos(45^\circ + \beta) = F_k \cdot \frac{\cos \beta (\cos \beta - \sin \beta)}{\cos \beta + \sin \beta} = m_1 g - F_k \cdot \sin \beta$

$F_k \cdot \frac{\cos^2 \beta - \sin \beta \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \beta + \sin^2 \beta}{\cos \beta + \sin \beta} = F_k \cdot \frac{1}{\cos \beta + \sin \beta} = m_1 g = 10 \text{ Н}$

$\cos(45^\circ - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \beta + \sin \beta)$

$\sin(45^\circ - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \beta - \cos \beta)$

$T_2 \cdot \sin(45^\circ - \beta) = F_k \cdot \cos \beta$

$T_2 \cdot \cos(45^\circ - \beta) = F_k \cdot \frac{(\cos \beta + \sin \beta) \cdot \cos \beta}{\sin \beta - \cos \beta} = m_2 g + F_k \cdot \sin \beta$

$F_k \cdot \frac{1}{\sin \beta - \cos \beta} = m_2 g = 30 \text{ Н}$

$\frac{\sin \beta - \cos \beta}{\cos \beta + \sin \beta} = 3$

$\sin \beta - \cos \beta = 3 \cos \beta + 3 \sin \beta$
 $2 \sin \beta = -4 \cos \beta$
 $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -2$

$F_k \cdot \frac{\cos^2 \beta + \sin \beta \cdot \cos \beta - \sin^2 \beta + \cos \beta \cdot \sin \beta}{\sin \beta - \cos \beta} = m_2 g = 30 \text{ Н}$
 $\frac{(\cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta - \sin^2 \beta)(\cos \beta + \sin \beta)}{\sin \beta - \cos \beta} = 3$

$\cos^3 \beta + 2 \sin \beta \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta \cdot \sin \beta + 2 \sin^2 \beta \cdot \cos \beta - \sin^3 \beta = 3 \sin \beta - 3 \cos \beta$

$\cos^3 \beta + 3 \sin \beta \cdot \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos \beta - \sin^3 \beta = 3 \sin \beta - 3 \cos \beta$

Отсюда ответом будет $h = \sqrt{2} \cdot \sin \beta$, где β находится из
верхнего выражения, а $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Нет ответа!