



Вариант № 1

Оценка выполнения олимпиадной работы
(заполняется проверяющим)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Полученный балл	5	-	2	-	15	5	3	-	4	-	39
Подпись проверяющего				Σ баллов	двенадцать						
Подпись проверяющего				Σ баллов	двенадцать						
Подпись проверяющего				Σ баллов	двадцать два						
Подпись проверяющего				Σ баллов	двенадцать						



Вариант № 1

N1.

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$$

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f(1)$$

$$S = \sum_{i=0}^{2023} f\left(\frac{i}{2023}\right)$$

рассмотрим пару слагаемых вида $f\left(\frac{n}{2023}\right)$ и $f\left(\frac{2023-n}{2023}\right)$
где $n \in \mathbb{Z}$
 $n \in [0; 2023]$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{2023}\right) + f\left(\frac{2023-n}{2023}\right) &= \frac{4^{\frac{n}{2023}}}{4^{\frac{n}{2023}} + 2} + \frac{4^{1-\frac{n}{2023}}}{4^{1-\frac{n}{2023}} + 2} = \frac{4^{\frac{n}{2023}} + 4^{1-\frac{n}{2023}}}{4^{\frac{n}{2023}} + 2 + 2 \cdot 4^{\frac{n}{2023}} + 2 \cdot 4^{1-\frac{n}{2023}}} = \\ &= \frac{4^{\frac{n}{2023}} + 4^{1-\frac{n}{2023}}}{4 + 2 \cdot 4^{\frac{n}{2023}} + 2 \cdot 4^{1-\frac{n}{2023}}} = 1 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{n}{2023}\right) + f\left(\frac{2023-n}{2023}\right) = 1$$

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + f(1) =$$

$$= f(0) + f(1) + f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2022}{2023}\right) + \dots = \sum_{i=0}^{2022} (f\left(\frac{i}{2023}\right) + f\left(\frac{2022-i}{2023}\right)) =$$

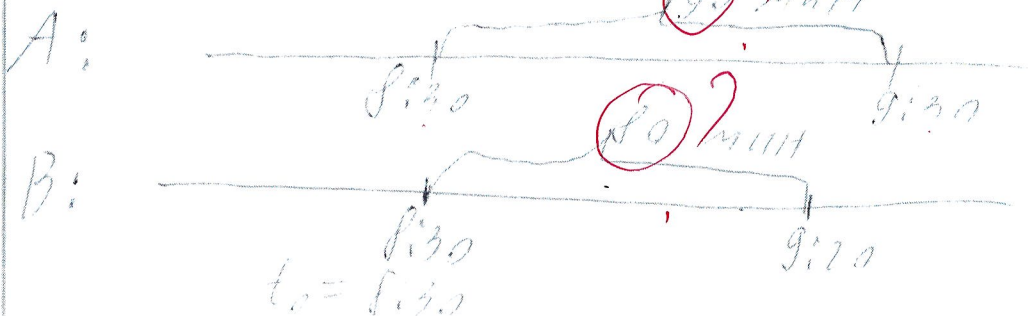
$$= \sum_{i=0}^{2022} (1) = 2023$$

55

Ответ: 2023

N2.

рассмотрим интервалы времени, в которые происходят поездки на 9.0 мин 9.0 мин

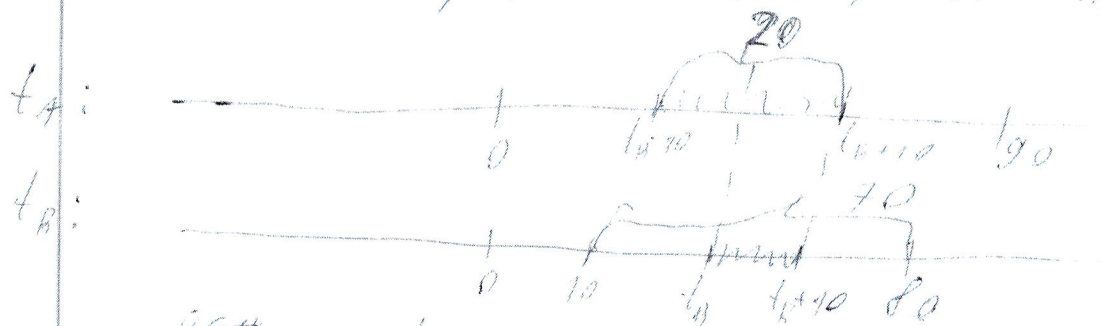




Вариант № 1

пусть t_A - время прибытия поезда А
 t_B - время прибытия поезда В

t_A и t_B считаются в м.с.
(если прибыл в 8.40, то $t_A = 10$ мин)



~~если~~ $t_A \in [t_B - 10; t_B + 10]$, при $t_B \geq 10$

$t_A \in [0; t_B + 10]$, при $t_B < 10$

событие X: $t_B \geq 10$ и $t_A \in [t_B - 10; t_B + 10]$
 $P(X) = \frac{20}{90} \cdot \frac{20}{90} = \frac{4}{81}$

событие Y: $t_B < 10$ и $t_A \in [0; t_B + 10]$
 $P(Y) = \frac{10}{90} \cdot \frac{10}{90} = \frac{1}{81}$

$P(Y) = \frac{10}{90} \cdot \frac{10}{90} = \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{486}$

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) = \frac{4}{81} + \frac{1}{486} = \frac{35}{486} = \frac{35}{144} \approx 0,243$

Ответ: 21%

05

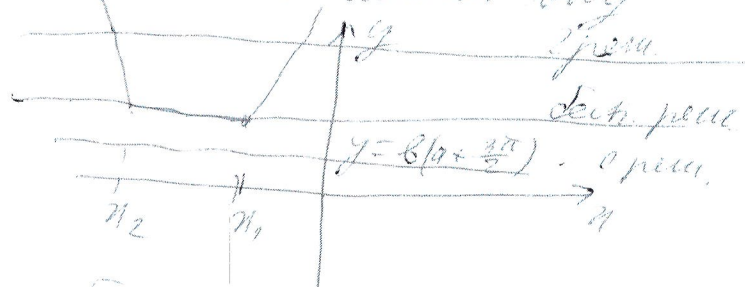


Вариант № 1

N5

$$\left| x + \cos^2 4\alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos^4 4\alpha \right| + \left| x - \sin^2 \alpha \right| = 8 \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right)$$

график левой части имеет вид



1) решение будет много тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2$

$$-\cos^2 4\alpha + 2 \sin \alpha \cos^4 4\alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 4\alpha = (2 \cos^2 2\alpha - 1)^2 = \sqrt{2(1 - 2t^4)^2 - 1}^2$$

$t = \sin \alpha, t \in [-1; 1]$

$$= (2(1 - 4t^2 + 4t^4) - 1)^2 = (8t^4 - 8t^2 + 1)^2$$

$$y = (8t^4 - 8t^2 + 1)^2$$

$$y = \cos^2 4\alpha$$

$$-y + 2t^2 y^2 = t^2$$

$$t^2 - 2ty^2 + y = 0$$

$$D = 4y^4 - 4y = 4(y^4 - y)$$

$$t_{1,2} = \frac{2y^2 \pm \sqrt{y^4 - y}}{2} = y^2 \pm \sqrt{y^4 - y}$$

исходя из ф-лы $t = y^2 \pm \sqrt{y^4 - y}$

$$\begin{cases} t_1 = y^2 + \sqrt{y^4 - y} \\ t_2 = y^2 - \sqrt{y^4 - y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y^4 - y &\geq 0 \\ y(y^3 - 1) &\geq 0 \\ y &\in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \end{aligned}$$



Вариант № 1

Исследовать y :

$$y' = 2(st^4 - st^2 + 1)(32t^3 - 16t)$$

$$y' = 0$$

$$t(st^4 - st^2 + 1)(2t^2 - 1) = 0$$

$$9 - 64 - 2 = 2$$

$$t^2 = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{16} = \frac{9}{16} \pm \frac{\sqrt{5}}{16}$$

$$t =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} > 0$$

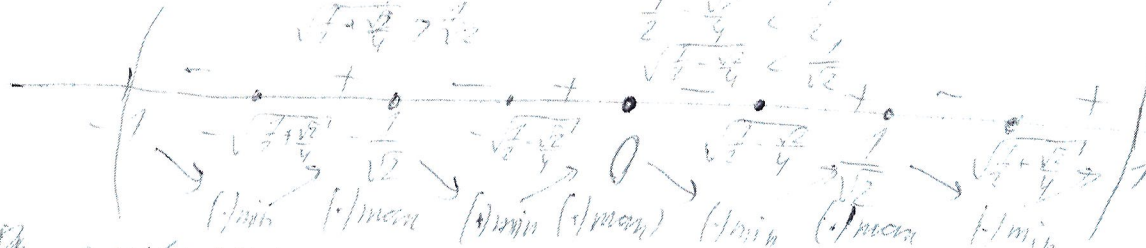
$$t(t^2 - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{16})(t^2 - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{16})(t - \frac{1}{\sqrt{2}})(t + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$$

$$t = 0, t = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{16}}, t = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{16}}, t = \frac{1}{\sqrt{2}}, t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{4} < \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{16}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Исследовать, что $y(x) = y(t-1)$

$$y(1) = y(-1) = 1$$

$$y(0) = 1$$

$$y(\frac{1}{\sqrt{2}}) = y(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$$

$$\Rightarrow y_{\max} = 1$$

$$y_{\min} = 0$$

$$y \in [0; 1]$$

$$\begin{cases} y' \geq 0 \\ y \in [0; 1] \end{cases} \Rightarrow y = 0; 1$$

$$1) y = 0$$

$$t = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$2) y = 1$$

$$t = 1$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sin \alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

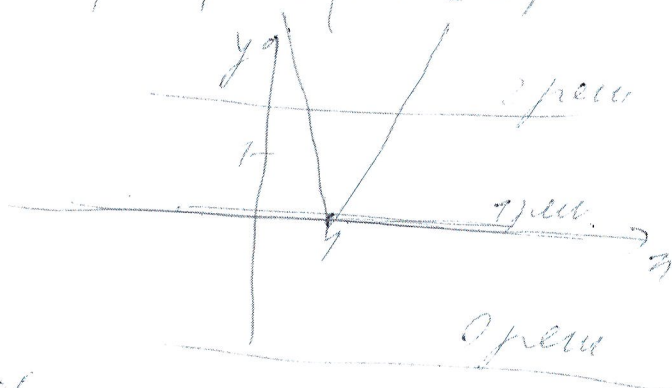


Вариант № 1

при $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ($n \neq 2$) максимума

при $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $\sin^2 \alpha = 1$
 $-\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 1$

$$2|n-1| = 8(2\pi + 2\pi n)$$



$$8(2\pi + 2\pi n) = 0$$

$$\theta = 0$$

$$8(\alpha + \frac{3\pi}{2}) = 0$$

$$\theta = 0$$

$$\alpha = -\frac{3\pi}{2}$$

ответ: $\left\{ \begin{array}{l} n+2 \\ (\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0), n \neq 2 \\ (-\frac{3\pi}{2}; R) \end{array} \right.$

156

Дано:

$$d_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$\lambda_1 = 540 \cdot 10^9 \text{ м}$$

$$\lambda_2 = 600 \cdot 10^9 \text{ м}$$

$$\lambda_3 = 650 \cdot 10^9 \text{ м}$$

$$\lambda_4 = 680 \cdot 10^9 \text{ м}$$

$$d_2 = \frac{d_1}{2} = 1 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$d_3 = \frac{d_1}{2} = 1 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$d_4 = \frac{d_1}{2} = 1 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$d_5 = \frac{d_1}{2} = 1 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$d_6 = \frac{d_1}{2} = 1 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$d_7 = \frac{d_1}{2} = 1 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$d_8 = \frac{d_1}{2} = 1 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$d_9 = \frac{d_1}{2} = 1 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Решение:

№6.

1) $N_1 = N_2 + N_3 + N_4 = 2k_{\text{max}} + 2k_{\text{max}} + 2k_{\text{max}} + 4$
 $N_2 = 2k_{\text{max}} + 4$ $N_3 = 2k_{\text{max}} + 4$ $N_4 = 2k_{\text{max}} + 4$

$$k_{2\text{max}} = \frac{d_1}{\lambda_2} = \frac{2 \cdot 10^6}{600 \cdot 10^9} = \frac{2000}{600} = 3 \frac{2}{3} \rightarrow k_{2\text{max}} = 3$$

$$k_{3\text{max}} = \frac{d_1}{\lambda_3} = \frac{2 \cdot 10^6}{650 \cdot 10^9} = \frac{2000}{650} = 3 \frac{1}{13} \rightarrow k_{3\text{max}} = 3$$

т.к. 3 центральных максимума совпадают в одну, то $N_1 = N_2 + N_3 + N_4 - 2 = 19$



Вариант № 1

2)

N_2 - число молекул во 2 случае.

$$K_{\text{отн}} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1.75^6}{6.40 \cdot 10^9} = \frac{1200}{640} \cdot \frac{20}{73} = 1.7 \frac{2}{73}$$

$$\Rightarrow K_{\text{отн}} = 1$$

$$N_2 = 2K_{\text{отн}} + 7 = 3$$

$$\Delta N = N_1 - N_2 = 16$$

ответ увеличивается на 16

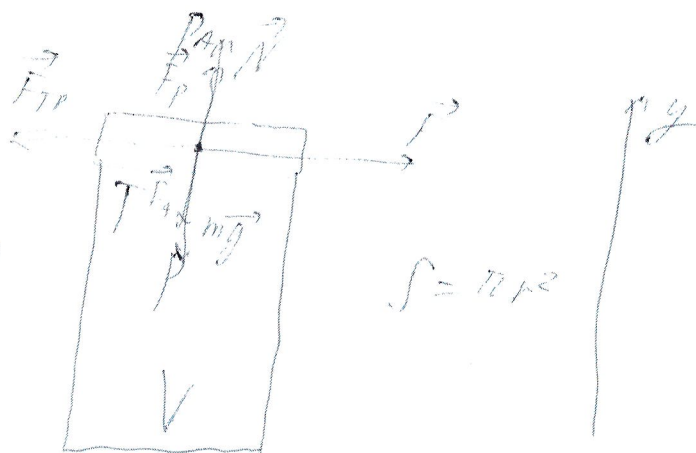
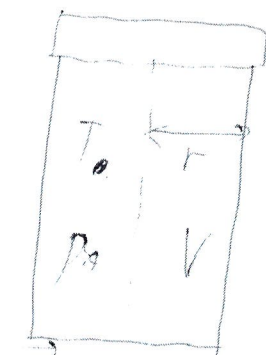
N_7 .

Даны:

$$\begin{aligned} m &= 0.066 \text{ кг} \\ r &= 0.05 \text{ м} \\ T &= 273 \text{ К} \\ T_0 &= 300 \text{ К} \\ \mu &= 0.1 \\ p_0 &= 10^5 \text{ Па} \end{aligned}$$

$$F = ?$$

Решение:



$$\vec{F}_p + m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{N} = 0$$

$$F_A = p_0 S = \pi r^2 p_0$$

$$F_p = p S = \pi r^2 p \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)$$

$$N + F_p - F_A - mg = 0$$

$$N = mg + \pi r^2 p \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)$$

$$F_T \leq \mu N \Rightarrow F_{T\text{max}} = \mu N = \mu \left(mg + \pi r^2 p \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) \right)$$

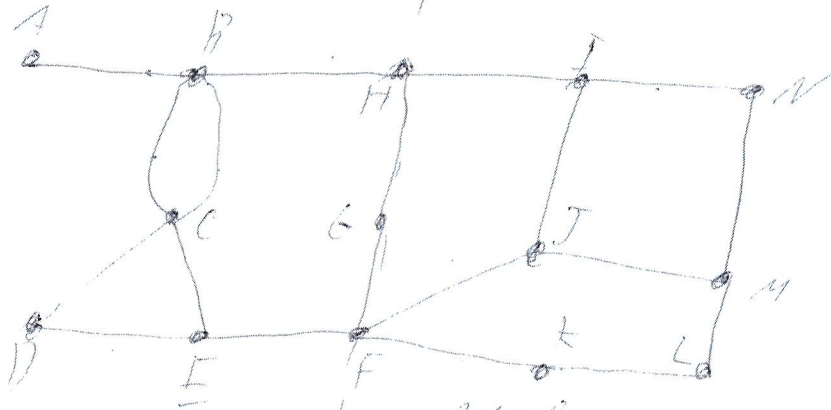
$$F \geq F_{T\text{max}} = 0.1 \left(0.066 \cdot 10 + 3.14 \cdot (0.05)^2 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{273}{300}\right) \right) =$$

$$= 0.066 + 3.14 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{27}{300} = 7.58 \text{ Н}$$



Вариант № 1

Представим вывеску в виде графа:



Считаем, что каждая из правой
часть при проходе в
сумме придем к правому
краю по длине и толщине между частями
графа

$$N \geq 19 + 2 = 21$$

$N = 21$ при маршруте:

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow M$
 $\rightarrow M \rightarrow J \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow E$

$$N_{\min} = 21$$

$$R_{\min} = N_{\min} R_0 = 21 \cdot 4,18 = 87,78 \text{ Ом}$$

$$P = \frac{U_1^2}{R_{\min}} \leq P_{\max}$$

$$U_1^2 \leq P_{\max} \cdot R_{\min}$$

$$U_1 \leq \sqrt{P_{\max} \cdot R_{\min}}$$

$$k = \frac{U_1}{U_0} \leq \frac{45,8}{120} \approx \frac{1}{4}$$

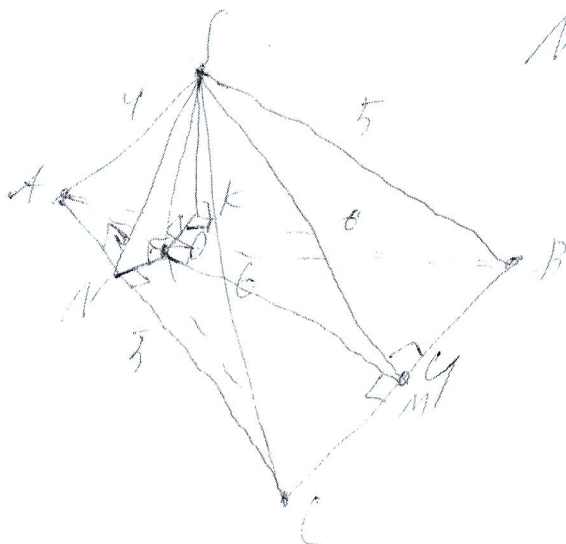
Ответ:

$$R_{\min} = 87,78 \text{ Ом}$$

$$k = \frac{1}{4}$$

Вариант № 1

№3



1) $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ — полупериметр треугольника

2) $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$ — по формуле Герона
 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{6 \cdot (6-4) \cdot (6-5) \cdot (6-3)} = \frac{12}{4} \sqrt{7}$

3) пусть SO — высота

4) высоты треугольника пересекаются в одной точке

5) $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp AC$
 $SM \perp AC \Rightarrow AC \perp (SON)$

6) аналогично $OM \perp BC$
 $OK \perp AB$

7) пусть $SO = x$

8) из площадей треугольников: $SN = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = \frac{3}{2} \sqrt{7}$

$SM = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{12}{5} \sqrt{7}$

$SK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{6}{4} \sqrt{7}$



Вариант № 1

$$\left. \begin{aligned} 9) \quad ON &= \sqrt{N^2 - n^2} = \sqrt{\frac{63}{4} - n^2} \\ OM &= \sqrt{M^2 - n^2} = \sqrt{\frac{125}{64} - n^2} \\ OK &= \sqrt{K^2 - n^2} = \sqrt{\frac{775}{16} - n^2} \end{aligned} \right\} - \text{ по т. П.}$$

$$S_{CT} = \frac{1}{2} ON \cdot AC + \frac{1}{2} OM \cdot BC + \frac{1}{2} OK \cdot AB$$

$$\frac{15}{4}\sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot 5 \sqrt{\frac{63}{4} - n^2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \sqrt{\frac{125}{64} - n^2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \sqrt{\frac{775}{16} - n^2}$$

$$\frac{15}{2} = 5 \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{n^2}{2}} + 4 \sqrt{\frac{125}{64} - \frac{n^2}{2}} + 6 \sqrt{\frac{15}{16} - \frac{n^2}{2}}$$

$$\frac{15\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2} \sqrt{9 - 4n^2} + \frac{4}{2} \sqrt{125 - 64n^2} + \frac{6}{2} \sqrt{75 - 16n^2}$$

$$60\sqrt{2} = 20 \sqrt{63 - 4n^2} + 4 \sqrt{1575 - 64n^2} + 12 \sqrt{775 - 16n^2}$$

т.к. в правой части уберётся при $n=0$,
то есть все произвольные решения для n

Подбором $n = \sqrt{7}$ $SO = \sqrt{7}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{CT} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{15}{4} \sqrt{7} = \frac{35}{4}$$

Ответ: $\frac{35}{4}$ **25**