



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Шифр работы ЕН14-02
(не заполнять)

Вариант № 5

Оценка выполнения олимпиадной работы
(заполняется проверяющим)

№ задания		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Полученный балл		5	8	9	1	15	0	0	0	0	0	38
I проверка	Фамилия И.О. проверяющего	Сорова А.Ю. Моманис			Подпись	Хорова			Σ баллов прописью	ноль		
	Фамилия И.О. проверяющего	Дарина А.В. Сильванович			Подпись	Дарина			Σ баллов прописью	38 (тридцать восемь)		
II проверка	Фамилия И.О. проверяющего	Родасов Р.О. Сорова А.Ю.			Подпись	Хорова			Σ баллов прописью	ноль		
	Фамилия И.О. проверяющего	Вилеев А.В. Моманис			Подпись	Вилеев			Σ баллов прописью	тридцать восемь		



Вариант № 5

№1

Пусть задумали число x . Обозначим промежуточные числа, получаемые в ходе преобразований:

$$x \xrightarrow{x:6} p \xrightarrow{\left[\frac{p}{10}\right]} c \xrightarrow{c \cdot 13} d \xrightarrow{\left[\frac{d}{10}\right]} 42$$

$$\text{Имеем } p = x/6, c = \left[\frac{p}{10}\right], d = 13c, 42 = \left[\frac{d}{10}\right]$$

$$\text{При } c \leq 32, d \leq 13 \cdot 32 = 416 \Rightarrow \left[\frac{d}{10}\right] \leq 41$$

$$\text{При } c \geq 34, d \geq 13 \cdot 34 = 442 \Rightarrow \left[\frac{d}{10}\right] \geq 44$$

~~Итак~~, При $c = 33$ $d = 13 \cdot 33 = 429$, $\left[\frac{d}{10}\right] = 42$ - всё верно

Значит, $c = 33 \Rightarrow \left[\frac{p}{10}\right] = 33 \Rightarrow p$ - одно из чисел 330, 331, 333, 339.

330, 332, 334, 336, 338 - делится на 2, не простое

333, 339 - делится на 3, не простое

335 - делится на 5, не простое

~~331, 337~~ - простые, подходят.

55

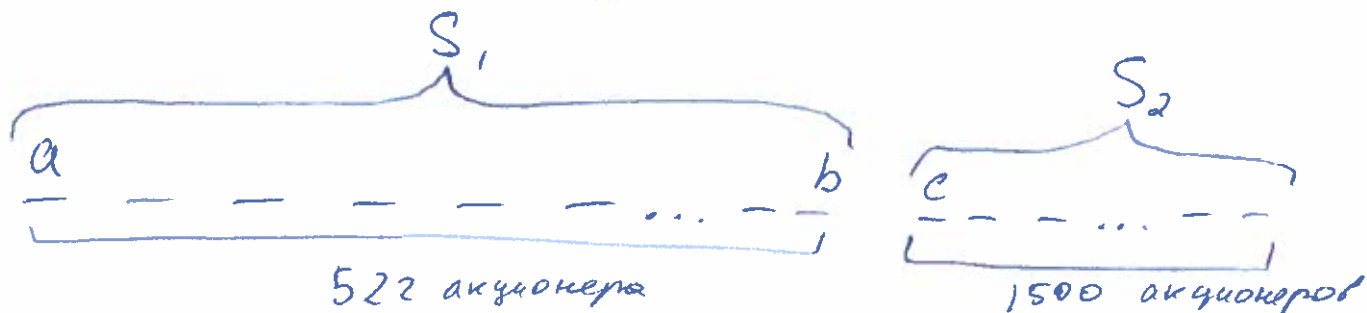
$$\text{Значит, } \begin{cases} \frac{x}{6} = 331 \Leftrightarrow x = 6 \cdot 331 = 1986 \\ \frac{x}{6} = 337 \Leftrightarrow x = 6 \cdot 337 = 2022 \end{cases}$$

Ответ: 1986 или 2022



Вариант № 5

Опсортируем акционеров по невозрастающей их доле акций, разделим этот список на ~~522~~ 522 первых и 1500 последних акционеров, обозначим ~~долю~~ долю самого первого акционера за a , последнего в первом списке за b и первого во втором списке за c , сумму ~~долей~~ долей акционеров из первого списка за S_1 , а второго — за S_2 :



$$\text{Имеем } \begin{cases} S_2 \leq 1500c \\ S_2 \geq 0,5 \end{cases} \Rightarrow 1500c \geq 0,5 \Rightarrow c \geq \frac{1}{3000}$$

$$b \geq c \Rightarrow b \geq \frac{1}{3000}$$

~~$$\begin{cases} S_1 \geq a + 499b \\ S_1 \geq 0,5 \end{cases} \Rightarrow a + 499b \geq 0,5$$~~

~~$$\begin{cases} S_1 \geq a + 499b \\ S_1 \geq 1 - S_2 \leq 0,5 \end{cases} \Rightarrow a + 499b \leq 0,5 \Rightarrow a \leq 0,5 - 499 \cdot \frac{1}{3000} = \frac{1500 - 499}{3000} = \frac{1001}{3000}$$~~

~~Итого имеем $a \leq \frac{1001}{3000}$~~



Вариант № 5

$$\begin{cases} s_1 \geq a + 521b \\ s_1 = 1 - s_2 \leq 0,5 \end{cases} \Rightarrow a + 521b \leq 0,5 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2} - 521b \leq$$

$$\leq \frac{1500}{3000} - \frac{521}{3000} = \frac{979}{3000}$$

Итого имеем $a \leq \frac{979}{3000}$

Оценка достигнута, приведем пример:

Пусть у одного акционера $\frac{979}{3000}$ доля акций составляет $\frac{979}{3000}$, ~~у остальных~~ у ~~остальных~~ остальных — по $\frac{1}{3000}$. Тогда у любой группы из 1500 акционеров будет хотя бы $\frac{1}{3000} \cdot 1500 = \frac{1}{2}$ акций.

Условие выполнено.

Ответ: $\frac{979}{3000}$

86

✓4

$a=9; b=54; c=72$ — подходящи.

Проверим:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 9^3 + 54^3 + 72^3 = 9^3(1 + 6^3 + 8^3) = 9^3 \cdot (1 + 216 + 512) = 9^3 \cdot 729 = 3^2 \cdot 729 = 3^6 \cdot 3^6 = 3^{12} \text{ — условие выполняется.}$$

Ответ: 9, 54, 72

Решение не обосновано 85



Вариант № 5

√3

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2S = (2a_1 + (n-1)d)n$, где $n \geq 10$ — кол-во членов прогрессии, a_1 — первый член, $S = 2359$ — сумма, d — разность. Значит, $2S : n$, и т.д. все величины целые.

$$2S = 2 \cdot 2359 = 2 \cdot 7 \cdot 337 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 < 10 \text{ — не подходит} \\ n=2 < 10 \text{ — не подходит} \\ n=7 < 10 \text{ — не подходит} \\ n=14 \\ n=337 \\ n=674 \\ n=2359 \\ n=4718 \end{array} \right.$$

$$2S = (2a_1 + (n-1)d) \cdot n \Leftrightarrow 2S = 2a_1 n + (n-1)nd \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-1)nd = 2S - 2a_1 n \Leftrightarrow d = \frac{2S - 2a_1 n}{n(n-1)}$$

В числителе ~~возрастает~~ убывает по n функции, в знаменателе возрастает, числитель и знаменатель положительны $\Rightarrow$ чем меньше n , тем больше d .

$$2S = (2a_1 + (n-1)d) \cdot n \Leftrightarrow 2S = 2a_1 n + (n-1)nd \Leftrightarrow$$

~~4718~~

$$\Leftrightarrow 2a_1 n = 2S - (n-1)nd \Leftrightarrow a_1 = \frac{2S - (n-1)d}{2}$$

$$= \frac{4718 - (n-1)d}{2}$$



Вариант № 5

$$2S = (2a_1 + (n-1)d) \cdot n \Leftrightarrow 2S = 2a_1 \cdot n + (n-1)dn \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-1)nd = 2S - 2a_1 \cdot n \Leftrightarrow d = \frac{2S - 2a_1 \cdot n}{n(n-1)} = \frac{4818 - 2a_1 \cdot n}{n(n-1)}$$

При $n = 14$:

$$d = \frac{4818 - 28a_1}{14 \cdot 13} = \frac{338 - 2a_1}{13} \leq \frac{338 - 2}{13} = \frac{336}{13} < \frac{338}{13} = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{\max} = 25 \text{ при } a_1 = 6$$

При $n = 338$:

$$d = \frac{4818 - 676a_1}{338 \cdot 337} = \frac{14 - 2a_1}{337} = \frac{7 - a_1}{168.5} \leq \frac{7-1}{168.5} < 1$$

При $n = 854$:

$$d = \frac{4818 - 1348a_1}{854 \cdot 853} = \frac{7 - 2a_1}{683} \leq \frac{7-2}{683} < 1$$

При $n = 2358$:

$$d = \frac{4818 - 4718a_1}{2358 \cdot 2357} = \frac{2 - 2a_1}{2357} \leq \frac{2-2}{2357} \leq 0$$

При $n = 4818$:

$$d = \frac{4818 - 2 \cdot 4818 \cdot a_1}{4818 \cdot 4817} \leq \frac{4818 - 2 \cdot 4818}{4818 \cdot 4817} < 0$$

Итого, $d_{\max} = 25$. При $a_1 = 6$, $d = 25$, $n = 14$, $S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{12 + 13 \cdot 25}{2} \cdot 14 = 7 \cdot 338 = 2359$ — как в условии.

Ответ: 25

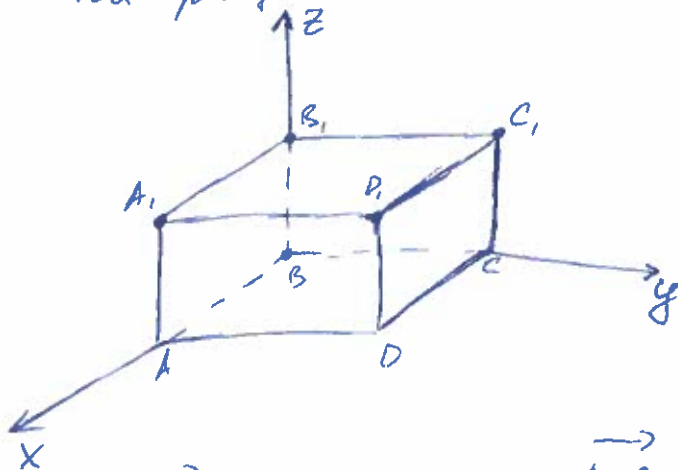
В ответе нужно было записать найденную прогрессию



Вариант № 5

№5

Введём ПДСК и разместим точки и-цифры, как на рисунке:



Пусть $BC=6$, $AB=4$, $BB_1=2$.

Тогда имеем:

$B(0;0;0)$	$B_1(0;0;2)$
$C(0;6;0)$	$C_1(0;6;2)$
$A(4;0;0)$	$A_1(4;0;2)$
$D(4;6;0)$	$D_1(4;6;2)$

$\vec{AC} \{ -4; 6; 2 \}$	$\vec{A_1C_1} \{ -4; 6; -2 \}$
$\vec{DB_1} \{ -4; -6; 2 \}$	$\vec{D_1B_1} \{ -4; -6; -2 \}$
$\vec{CA_1} \{ 4; -6; 2 \}$	$\vec{C_1A_1} \{ 4; -6; -2 \}$
$\vec{BD_1} \{ 4; 6; 2 \}$	$\vec{B_1D_1} \{ 4; 6; -2 \}$

Плоскости грани искомого фигуры будем называть a_i , если она ~~содержит~~ проходит через точку A_i , с остальными грани аналогично:

$a_1: 4x - 6y + 2z + D_1 = 0$	$A \in a \Rightarrow D_1 = -16$
$A_1 \in a_1 \Rightarrow 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = -20$	$a: 4x - 6y - 2z - 16 = 0$
$a_1: 4x - 6y + 2z - 20 = 0$	$B \in b \Rightarrow D_b = 0$
$B_1 \in b_1 \Rightarrow D_{b_1} = -4$	$b: -4x - 6y - 2z = 0$
$b_1: -4x - 6y + 2z - 4 = 0$	$C \in c \Rightarrow D_c = -36$
$C_1 \in c_1 \Rightarrow D_{c_1} = -40$	$c: -4x + 6y - 2z - 36 = 0$
$C_1: -4x + 6y + 2z - 40 = 0$	$D \in d \Rightarrow D_d = -52$
$D_1 \in d_1 \Rightarrow D_{d_1} = -56$	$d: 4x + 6y - 2z - 52 = 0$
$d_1: 4x + 6y + 2z - 56 = 0$	



Вариант № 5

Итого имеем 8 уравнений плоскостей, ограничивающих ~~многогранник~~ ~~фигуру~~. искомую фигуру.

а, п б, :

$$4x - 6y + 2z - 20 = -4x - 6y + 2z - 4 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

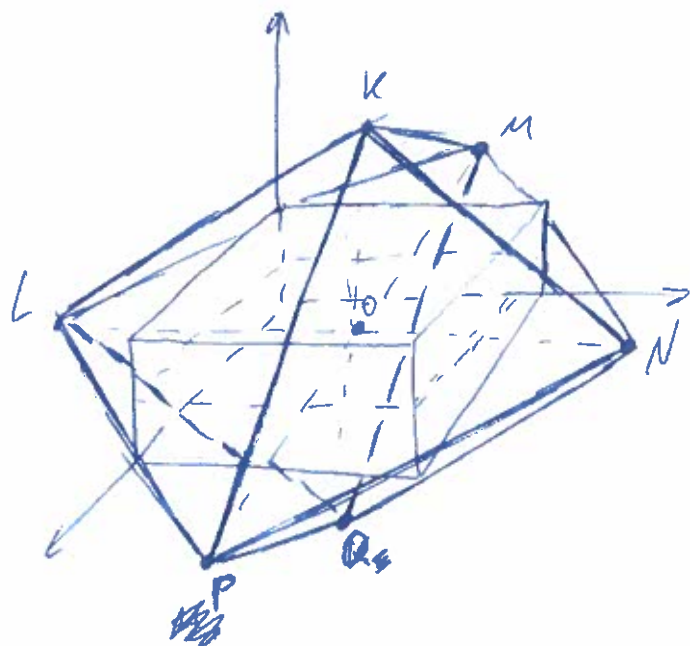
Значит, ~~эти~~ эти грани пересекаются в плоскости $x = 2$.

Аналогично, $x \in b, nc, \dots \Rightarrow x_y = 3$, $x \in c, nd, \dots \Rightarrow x_x = 2$,

$x \in a, nd, \dots \Rightarrow x_y = 3$, $x \in a, nb, \dots \Rightarrow x_x = 2$, $x \in b, nc, \dots \Rightarrow x_y = 3$,

$x \in c, nd, \dots \Rightarrow x_x = 2$, $x \in d, na, \dots \Rightarrow x_y = 3$, $\left\{ \begin{array}{l} x \in a, na, \\ x \in b, nb, \\ x \in c, nc, \\ x \in d, nd, \end{array} \right. \Rightarrow x_z = 1$

Потому ~~иногда~~ построим фигуру:



$K \in a, b, c, d, \dots \Rightarrow$ ~~...~~

$$\Rightarrow K_x = 2, K_y = 3, 4K_x - 6K_y + 2K_z = 20$$

$$\Rightarrow K_z = \frac{20 - 8 + 18}{2} = 15$$

Аналогично,

$$M \in b, c, \dots \Rightarrow M_y = 3, M_z = 1, M_x = 5$$

$$N \in c, d, \dots \Rightarrow N_x = 2, N_z = 1, N_y = \frac{23}{3}$$

$$P \in a, d, \dots \Rightarrow P_x = 9, P_y = 3, P_z = 1$$

$$L \in a, b, \dots \Rightarrow L_x = 2, L_y = -\frac{5}{3}$$

$$Q \in a, b, c, d, \dots \Rightarrow Q_x = 2, Q_y = 3, Q_z = -13$$

$$O(2; 3; 1)$$



Вариант № 5

$$\begin{aligned}
 V_{KLPNMQ} &= V_{KLPNM} + V_{QLPNM} = \frac{1}{3} \cdot KO \cdot S_{LPNM} + \frac{1}{3} \cdot QO \cdot S_{LPNM} = \\
 &= \frac{S_{LPNM}}{3} (KO + QO) = \frac{S_{LPNM} \cdot KQ}{3} = \frac{LN \cdot PM \cdot \sin 30^\circ}{2} \cdot \frac{KQ}{3} = \\
 &= \frac{(N_y - L_y)(P_x - M_x)}{2} \cdot \frac{(K_z - Q_z)}{3} = \frac{(\frac{25}{3} + \frac{5}{3})(9+5)}{2} \cdot \frac{(15+13)}{3} = \\
 &= \frac{28}{3} \cdot \frac{14}{2} \cdot \frac{28}{3} = \frac{5488}{9}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5488}{9}$

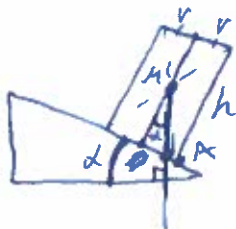
№6

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{2,4 \text{ м}}{12000} = \frac{24}{12000} = 2 \cdot 10^{-4} \\
 v &= 32,4 \text{ км/ч} = 32,4 \cdot \frac{1000}{3600} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{32400}{3600} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{1800}{200} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 9 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 9000 \frac{\text{м}}{\text{с}} \\
 \Delta t &= \frac{S}{v} = \frac{0,09}{9000} \text{ с} = 10^{-5} \text{ с}.
 \end{aligned}$$

Ответ: 10^{-5} с .

№7

Может измерить высоту радиуса, длину и высоту горки $\Rightarrow$
Зная ~~размеры цилиндра~~ размеры цилиндра и угол наклона
Рассмотрим продольную проекцию.



Необходимо, чтобы ~~центр масс~~ проекция
центра масс цилиндра находилась не правее
точки А.
тогда $\frac{h}{2} \tan \alpha \leq r \Rightarrow k \leq \frac{2r}{\tan \alpha}$