



Шифр работы 4600407
(не заполнять)

Олимпиада школьников «Гранит науки»

Вариант № 1

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

- В бланке олимпиадной работы **необходимо**:
 - выполнять работу только ручкой (паста синего или черного цвета);
 - заполнить номер варианта;
 - пронумеровать страницы.
- В бланке олимпиадной работы **рекомендуется**:
 - писать аккуратно, без помарок;
 - ошибку зачеркивать одной чертой.
- В бланке олимпиадной работы **запрещается**:
 - использовать карандаш, фломастер, штрих и т.п.;
 - делать пометки, не относящиеся к работе.
- За нарушение регламента проведения олимпиады участник может быть отстранен от олимпиады. В случае отстранения участника результат олимпиадной работы аннулируется.

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)											
№ задания	1	2	3	4	5 ✓	6	7	8	9	10	Σ
Полученный балл	8	8	6	8	12	14	6	8	12	10	88
Фамилия И.О. проверяющего	Смирнов Е.В.			Подпись	[Подпись]			Σ баллов прописью	сорок		
Фамилия И.О. проверяющего	Чумаков И.В.			Подпись	[Подпись]			Σ баллов прописью	сорок восемь		

Примечание
(заполняется проверяющим)
Мустафакеев
Степанов И.В.
Дюблевский

~~Σ 84~~ ~~всего баллов~~
Σ 245 (сумма баллов)
[Подпись]
[Подпись]



Вариант № 1

Задача №1
1009 точек

$$\sqrt{222...22 - 11...1133...33} = 33...33$$

$$1) 222...22 = 2 \cdot 10^{2017} + 2 \cdot 10^{2016} + 2 \cdot 10^{2015} + \dots + 2 \cdot 10 + 2 =$$

$$= 2(10^{2017} + 10^{2016} + 10^{2015} + \dots + 10 + 1)$$

$10^{2017}, 10^{2016}, 10^{2015}, \dots, 10, 1$ — геометрическая прогрессия; $b_1 = 10^{2017}$, $q = \frac{1}{10}$

Поэтому

$$S_{2018} = \frac{10^{2017}(1 - (\frac{1}{10})^{2018})}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10^{2017} - 0,1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10(10^{2017} - 0,1)}{9}$$

$$222...22 = \frac{20(10^{2017} - 0,1)}{9} = \frac{2 \cdot (10^{2018} - 1)}{9}$$

$$2) 11...1133...33 = 10^{2017} + 10^{2016} + \dots + 10^{1009} + 3 \cdot 10^{1008} + 3 \cdot 10^{1007} + \dots + 3 \cdot 10 + 3 =$$

$$= 10^{1009}(10^{1008} + 10^{1007} + \dots + 10 + 1) + 3(10^{1008} + 10^{1007} + \dots + 10 + 1) =$$

$$= (10^{1009} + 3)(10^{1008} + 10^{1007} + \dots + 10 + 1)$$

$10^{1008}, 10^{1007}, \dots, 10, 1$ — геометрическая прогрессия; $b_1 = 10^{1008}$, $q = \frac{1}{10}$

$$S_{1009} = \frac{10^{1008}(1 - (\frac{1}{10})^{1009})}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10^{1008} - 0,1}{0,9} = \frac{10(10^{1008} - 0,1)}{9}$$

$$11...1133...33 = \frac{10(10^{1009} + 3)(10^{1008} - 0,1)}{9} = \frac{(10^{1009} + 3)(10^{1009} - 1)}{9}$$

$$3) 222...22 - 11...1133...33 = \frac{2 \cdot 10^{2018} - 2 - 10^{2018} - 2 \cdot 10^{1009} + 3}{9} =$$

$$= \frac{10^{2018} - 2 \cdot 10^{1009} + 1}{9} = \frac{(10^{1009} - 1)^2}{9}$$

$$4) \sqrt{\frac{(10^{1009} - 1)^2}{9}} = \frac{10^{1009} - 1}{3} = \frac{99...9}{3} = 333...33$$

1009 точек



Задача №2

$$2018^x = 2017^y + 4035^z$$

Пусть $x=1$, тогда

$$2018^1 = 2017 + 1 = 2017^1 + 4035^0$$

Пусть $x=2$, тогда

$$2018^2 = (2017 + 1)^2 = 2017^2 + 2 \cdot 2017 + 1 = 2017^2 + (4034 + 1) = 2017^2 + (4035)^1$$

Пусть $x \geq 3$, тогда

$$2018^x = (2017 + 1)^3 = 2017^3 + 3 \cdot 2017^2 + 3 \cdot 2017 + 1 = (2017^3 + 3 \cdot 2017^2 + 2017) + (2 \cdot 2017 + 1)$$

$$2017^y = (2017^3 + 3 \cdot 2017^2 + 2017)$$

$$2017^y = 2017(2017^2 + 2 \cdot 2017 + 1 + 2017)$$

$$2017^y = 2017((2018)^2 + 2017)$$

$$y = \log_{2017}(2017((2018)^2 + 2017))$$

$$y = \log_{2017}((2018)^2 + 2017) + 1$$

П.к. $\log_{2017}((2018)^2 + 2017)$ — нецелое число, то y — нецелое, т.е. при $x \geq 3$ ответа нет.



Вариант № 1

Задача 3

$$\sin 2x \cos 3y + \sin 3y \cos 2x + \sin x \cos 8x$$

Рассмотрим данное выражение относительно y , т.к. здесь присутствуют синус и косинус с одинаковым аргументом, зависящим от y .

1) Т.к. $\sin 2 \in [-1; 1]$

$\cos 3 \in [-1; 1]$, то $\sin 2 \cdot \cos 3 = 1$ — максимальное значение.

$$\sin x \cdot \cos 8x = 1$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 8x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 8x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 8x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

2) $\sin \frac{\pi}{2} n \cos 3y + \sin 3y \cos(\pi + 4\pi k) = \pm \cos 3y - \sin 3y$

$\cos 2 + \sin 2 = \sqrt{2}$ — максимальное значение, т.е.

$$\sin \frac{\pi}{2} n = -1$$

$$\sin 2x = -1$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$$

$$\frac{\pi}{2} n \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\frac{n}{2} \neq \frac{3}{2} + 2n$$

$$n \neq 3 + 4n$$

$$n = -1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 2x = -1$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

$$-\cos 3y - \sin 3y = -\sqrt{2}$$

$$\cos 3y + \sin 3y = \sqrt{2}$$

$$\cos 3y = \sin 3y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos 3y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 3y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \begin{cases} 3y = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ 3y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3y = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) не имеет решений.

В системе (1) единственно верное решение:

$$3y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$y = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$$

Ответ: наибольшее значение $\sqrt{2}+1$ достигается

$$\text{при } y = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$



Вариант № 1

Задача №1

1) Если вагон будет двигаться лишь по пустотке, то он не выйдет за пределы круга, радиусом 2 км.
Из центра круга проведём 2 взаимноперпендикулярных луча, длиной каждой по 4 км, — дороги, по которым он может пройти 4 км за час (OA ; OB).
Из (1) получаем рис. 1.

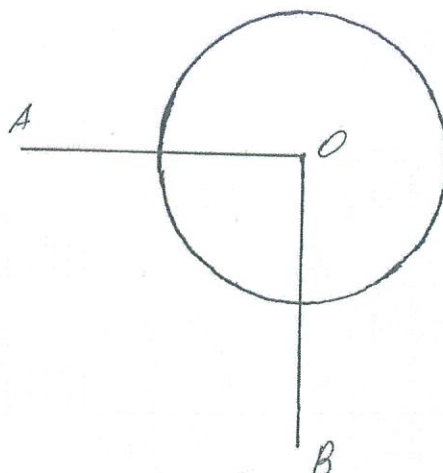


Рис. 1

2) Допустим, вагон движется 2 км по дороге, а после свернул в пустотку.

Тогда он не выйдет за пределы круга, радиусом 2 км:

2 км по дороге — 30 мин;

1 км по пустотке — 30 мин.

Вагон движется, не сворачивая.

Аналогично и с другой дорогой. Из (2) делаем вывод, что вагон может двигаться в пределах окружности с центром O и касательных к ней, проведённых из точек A и B (рис. 2).

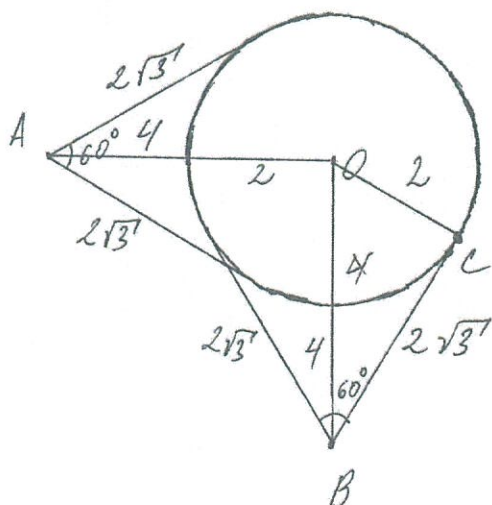


Рис. 2

3) Найдём длину отрезка касательной от точки «выхода» до точки касания, обозначим её точкой C :

$OC = 2 \text{ км}$ } $\Rightarrow$ прямоугол. $\triangle BCO$ имеет

$OB = 4 \text{ км}$ } угол $\angle OBC = 30^\circ$, $\angle B = \angle A = 60^\circ$

По т. Пифагора:

$$BC = \sqrt{4^2 - 2^2}$$

$$BC = \sqrt{2 \cdot 6} = 2\sqrt{3} \text{ км}$$

Ответ: рис. 2.

не доказано, что граница — касательная.



Задача №5

1) $(A_1E_1C_1) \parallel (BFD) \Rightarrow \triangle B_1F_1D_1 \parallel \triangle ACE$

$\triangle B_1F_1D_1$ и $\triangle ACE$ — равноугольные $\Rightarrow \triangle B_1F_1D_1 = \triangle ACE$
 $A_1F_1E_1D_1C_1B_1 = AFEDCB$

2) Проекция $\triangle B_1F_1D_1$ на плоскость (BFD) представляет собой правильный $\triangle BFD$.

$\triangle ACE$ и проекция $\triangle B_1F_1D_1$ ($\triangle BFD$) повернуты друг относительно друга на $60^\circ \Rightarrow \triangle ACE$ и $\triangle B_1F_1D_1$ повернуты друг относительно друга на 60° .

3) При проектировании G, D_1 на (BFD) получим отрезок GD , совпадающий с апофемой тетраэдра G, ACE AD .

Аналогично с остальными рёбрами тетраэдра $G, B_1F_1D_1$.

4) $G, B_1F_1D_1 = G, ACE$ (по условию)

$\triangle ACE = \triangle B_1F_1D_1$ (по условию)

$G, B_1F_1D_1$ повернут относительно G, ACE на 60° (по доказанному)

$\Rightarrow$ грани $G, B_1F_1D_1$ и G, ACE попарно параллельны.

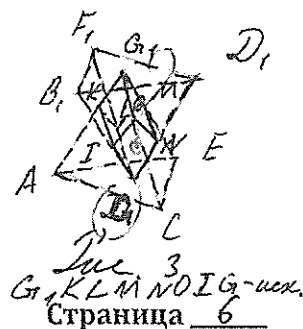
Из всех вышепредставленных действий следует, что пересечение G, ACE и $G, B_1F_1D_1$ является параллелепипедом (рис. 3), грани которого являются ромбами с острым углом 60° .

5) Рассмотрим сечение G, CH , где H — середина AE .

П.к. CH — медиана $\triangle ACE$, то G (середина $\triangle ACE$) делит её в отношении $\frac{CG}{GH} = \frac{2}{1}$.

Проведём отрезок OG , параллельный G, H .

По т. Талеса: $\frac{CG}{GH} = \frac{OG}{GO} = \frac{2}{1}$, т.е. $G, O = \frac{1}{3} CH$.





Вариант № 1

Задача №5 (продолжение)

П.к. все грани параллелепипеда - равны, то
все его стороны $= \frac{1}{3}$ см.

$$6) V = h \cdot S_{\text{осн.}}$$

$$S_{\text{осн.}} = NO \cdot IO \cdot \sin 60^\circ$$

$$h = LL_1$$

Проведем отрезок $LL_2 \perp GI = L_2$.

L_2G - проекция LG , проекция
 L_1G .

$$L_2G = LG \cdot \cos 60^\circ$$

$$L_2G = L_1G \cos \frac{60^\circ}{2}$$

$$L_2G = LG \cos 60^\circ$$

$$L_2G = LG \cdot \cos \alpha \cdot \cos 30^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \cos \alpha \cdot \cos 30^\circ$$

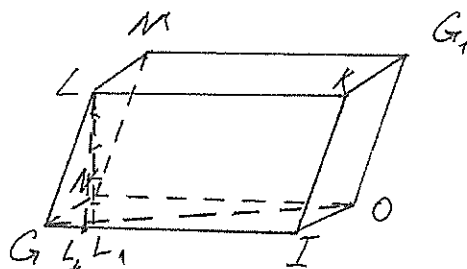
$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$LL_1 = LG \cdot \sin \alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ см.}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{54} \text{ см}^3.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{54} \text{ см}^3.$$

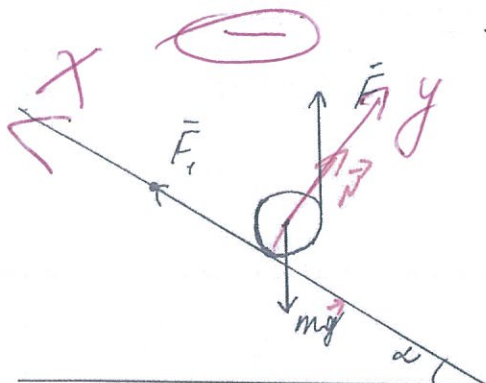




Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Задача №6

50
150



$$M_1 = M_2$$

$$M_1 = F + F_1 \sin \alpha$$

$$M_2 = mg \sin \alpha$$

Получим две равных величины

Нет подсказки —

это теорема (2)? —

$$1) M_1 = M_2$$

$$F \cdot r = F_1 \cdot r$$

$$F = F_1$$

$$2) F + F \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$F = \frac{27 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{27 \cdot 5}{\frac{3}{2}} = \frac{27 \cdot 10}{3} = 90 \text{ Н}$$

Ответ: 90 Н.

Задача №7

68.

$$E_A = \frac{k q_0}{r_A^2} \Rightarrow r_A = \sqrt{\frac{k q_0}{E_A}}$$

$$E_B = \frac{k q_0}{r_B^2} \Rightarrow r_B = \sqrt{\frac{k q_0}{E_B}}$$

$$E_C = \frac{k q_0}{\left(\frac{r_A + r_B}{2}\right)^2} = \frac{4 k q_0}{(r_A + r_B)^2} = \frac{4 k q_0}{\left(\sqrt{\frac{k q_0}{E_A}} + \sqrt{\frac{k q_0}{E_B}}\right)^2} = \frac{4}{\left(\frac{1}{\sqrt{E_A}} + \frac{1}{\sqrt{E_B}}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{\left(\frac{\sqrt{E_B} + \sqrt{E_A}}{\sqrt{E_A E_B}}\right)^2} = \frac{4 E_A E_B}{(\sqrt{E_B} + \sqrt{E_A})^2} = \frac{4 E_A E_B}{E_B + E_A + 2 \sqrt{E_A E_B}} =$$

$$= 10^5 \frac{4 \cdot 0,9 \cdot 0,3}{0,9 + 0,3 + 2 \sqrt{0,27}} = 10^5 \frac{4 \cdot 0,9 \cdot 0,3}{1,2 + 0,6 \sqrt{3}} = 10^5 \frac{2 \cdot 0,9}{2 + \sqrt{3}} \approx 0,48 \cdot 10^5 \text{ Дж}$$

Ответ: $E_C = 0,48 \cdot 10^5 \text{ Дж}$

Страница 8

Отсутствие знания о сложной характеристике эл.-ст. код!



Вариант № 1

Задача № ~~88~~ 65.

Рассмотрим тот случай, когда падают
шары не выходя.

$F = F_m + F_n$, где F — сила притяжения шаров с объектом N , F_m — сила притяжения шара с шаром m , F_n — сила притяжения шаров с шаром n («падающим»).

$$F = \frac{G M_0 m}{d^2}$$

$$M_0 = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$F_n = \frac{G M_n m}{(d - \frac{R}{4})^2}$$

$$F_m = \frac{G M_m m}{d^2}$$

$$M = M_0 - \frac{M_0}{64} = \frac{63 M_0}{64}$$

$$M_n = \rho V_n = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{1}{64} = \frac{M_0}{64}$$

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{G M_0 m}{d^2} - \frac{G M_n m}{(d - \frac{R}{4})^2} = G M_0 m \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{64(d - \frac{R}{4})^2} \right) = \\ &= G M_0 m \left(\frac{64(d - \frac{R}{4})^2 - d^2}{64d^2(d - \frac{R}{4})^2} \right) = G M_0 m \left(\frac{(8d - 2R)^2 - d^2}{(8d^2 - 2dR)^2} \right) = \\ &= G M_0 m \left(\frac{(8d - 2R - d)(8d - 2R + d)}{(8d^2 - 2dR)^2} \right) = \frac{G M_0 m (7d - 2R)(9d - 2R)}{(8d^2 - 2dR)^2} = \\ &= \frac{64 G M_0 m (7d - 2R)(9d - 2R)}{63 (8d^2 - 2dR)^2} \end{aligned}$$

$$g_N = \frac{F_m}{m} = \frac{64 G M_0 (7d - 2R)(9d - 2R)}{63 (8d^2 - 2dR)^2} = \frac{16 G M_0 (7d - 2R)(9d - 2R)}{63 (4d^2 - dR)^2}$$



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Задача №9 125

Отсутствует рисунок!

$$Q = \Delta U + A \quad \leftarrow \text{по условию?}$$

$$1) A = S_{a \rightarrow b} pV + S_{c \rightarrow d} pV = p \cdot 2V + 2p(-V) = 0$$

$$2) \Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_d - T_a)$$

3) Составим уравнения (уравнения Менделеева-Клапейрона) для каждого состояния.

$$a: pV = \nu R T_a$$

$$b: 3pV = \nu R T_b$$

$$c: 6pV = \nu R T_c$$

$$d: 4pV = \nu R T_d$$

П.к. $\nu = 1$, но $T_{\min} = T_a$, $T_{\max} = T_c$.

$$T_c - T_a = \Delta T = 200 \text{ K}$$

$$\frac{T_d - T_a}{T_c - T_a} = \frac{\frac{4pV}{R} - \frac{pV}{R}}{\frac{6pV}{R} - \frac{pV}{R}} = \frac{3 \cdot \frac{pV}{R}}{5 \cdot \frac{pV}{R}} = \frac{3}{5}$$

$$T_d - T_a = \frac{3}{5} \Delta T \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} R \cdot \frac{3}{5} \Delta T = \frac{9}{10} R \Delta T = \frac{9}{10} \cdot 8,31 \cdot 200 =$$

$$= 9 \cdot 8,31 \cdot 20 = 1495,8 \text{ Дж}$$

$$Q = \Delta U + A = 1495,8 \text{ Дж}$$

Ответ: 1495,8 Дж. ✓



Вариант № 1

Задача №10

158

106

$$1) A_{\text{сил тяжести}} = F_{\text{тяги}} \cdot \Delta h = mg \Delta h = \rho V g \Delta h =$$

$$= \rho S H g \Delta h$$

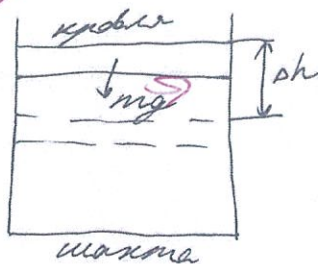
$$1) \Delta V = V_1 - V_2 = S \Delta h \Rightarrow$$

$$2) A = \rho g H \cdot S \Delta h = \rho g H (V_1 - V_2) =$$

$$= \rho g H \left(V_1 - \frac{V_2}{\gamma} \right)$$

$$3) A = U_1 - U_2 = \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} - \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} - \frac{p_2 V_2}{\gamma - 1} =$$

$$= \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$$



П.к. процесс адиабатический, то

$$pV = \text{const} \quad ? \quad \text{Нет мотивированного обоснования!}$$

$$pV^\gamma = T V^{\gamma-1} \Rightarrow A = - \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} (V_1^{\gamma-1} - V_2^{\gamma-1})$$

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$4) \rho g H \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$\rho g H \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right) (\gamma - 1) = p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho g H (k-1) (\gamma - 1)}{p_1 V_1}$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\rho g H (k-1) (\gamma - 1)}{p_1 \cdot k}$$

Странно появление
ответа при ошибках,
допущенных в решении!

Нет формулировки ответа
и проверки регулярности