

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОТБОРОЧНОМУ ТУРУ ОЛИМПИАДЫ
2018/2019 УЧЕБНОГО ГОДА**

Е С Т Е С Т В Е Н Н Ы Е Н А У К И

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю Естественные науки (предметы олимпиады – физика, математика) проходит с использованием интернет-технологий (заочно).

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовленность участников олимпиады в рамках ФГОС среднего общего образования.

На решение задач отборочного тура Олимпиады отводится **2 (два)** астрономических часа (120 минут). Отсчет времени начинается с момента начала выполнения заданий. Место и время выполнения заданий определяются участниками самостоятельно. Для выполнения заданий необходим компьютер с доступом в сеть Интернет. Оргкомитет не несет ответственности за сбой электропитания и связи в момент решения задач отборочного тура.

Участник Олимпиады может выполнять задания отборочного тура однократно.

В задания отборочного тура входят 3 блока вопросов. За каждый правильный ответ 1 блока участник получает 1 балл; за каждый правильный ответ 2 блока – 2 балла; за каждый правильный ответ 3 блока – 4 балла. Максимально возможное количество набранных участником баллов – 100.

В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса **физики**.

- *Механика* (кинематика, динамика, статика, законы сохранения в механике, механические колебания и волны).
- *Молекулярная физика. Термодинамика* (молекулярно-кинетическая теория, законы идеального газа, законы термодинамики).
- *Электродинамика и основы СТО* (электрическое поле, постоянный ток, магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны, оптика, основы СТО).
- *Квантовая физика* (корпускулярно-волновой дуализм, физика атома, физика атомного ядра).

В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса **математики**:

- *Арифметика, алгебра и начала анализа;*
- *Геометрия.*

Ф И З И К А

Для конструирования вариантов олимпиадной работы отборочного тура использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки). Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый блок содержит задания с выбором правильного утверждения "ВЕРНО" или "НЕВЕРНО". Второй блок содержит тестовые задания с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов.

Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи более двух физических законов, относящихся к одной или нескольким темам, комбинировать известные алгоритмы действий.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления достаточно высокой степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний и смекалки.

На задания из третьего блока необходим краткий ответ в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы отборочного этапа, состоящий из 25 заданий: десять задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий; пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за выполненные задания, суммируются.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ 2018/2019 УЧЕБНОГО ГОДА

РАЗДЕЛ 1. МЕХАНИКА

Кинематика

Механическое движение и его виды. Относительность механического движения. Система отсчета. Материальная точка и ее радиус-вектор. Траектория, перемещение, путь. Сложение перемещений. Скорость материальной точки. Сложение скоростей. Ускорение материальной точки. Равномерное прямолинейное движение. Равноускоренное прямолинейное движение. Свободное падение. Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом α к горизонту. Движение точки по окружности. Линейная и угловая скорость точки соответственно. Центростремительное ускорение. Твердое тело. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

Динамика

Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея. Масса тела. Плотность вещества. Сила. Принцип суперпозиции сил. Второй и третий законы Ньютона. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты над поверхностью планеты. Вес тела. Невесомость. Движение небесных тел и их искусственных спутников. Первая космическая скорость. Вторая космическая скорость. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения. Сила трения покоя. Коэффициент трения. Давление.

Статика

Момент силы относительно оси вращения. Условия равновесия твердого тела. Закон Паскаля. Давление в жидкости, покоящейся в ИСО. Закон Архимеда. Условия плавания тел.

Законы сохранения в механике

Импульс материальной точки. Импульс системы тел. Закон изменения и сохранения импульса. Работа силы. Мощность силы. Кинетическая энергия материальной точки. Закон изменения кинетической энергии системы материальных точек. Потенциальная энергия для потенциальных сил. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Потенциальная энергия упруго деформированного тела. Закон изменения и сохранения механической энергии. Закон сохранения механической энергии.

Механические колебания и волны

Гармонические колебания. Амплитуда и фаза колебаний. Кинематическое, динамическое и энергетическое (закон сохранения механической энергии) описание. Связь амплитуды колебаний исходной величины с амплитудами колебаний её скорости и ускорения. Период и частота колебаний. Период малых свободных колебаний математического и пружинного маятника. Вынужденные колебания. Резонанс. Поперечные и продольные волны. Скорость распространения и длина волны. Интерференция и дифракция волн.

РАЗДЕЛ 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Молекулярная физика

Модели строения газов, жидкостей и твердых тел. Тепловое движение атомов и молекул вещества. Взаимодействие частиц вещества. Диффузия. Броуновское движение. Модель идеального газа в МКТ: частицы газа движутся хаотически и не взаимодействуют друг с другом. Абсолютная температура. Связь температуры газа со средней кинетической энергией поступательного теплового движения его частиц. Модель идеального газа в термодинамике. Уравнение Менделеева – Клапейрона. Выражение для внутренней энергии одноатомного идеального газа. Закон Дальтона для давления смеси разреженных газов. Изопроцессы: изотермический, изохорный, изобарный, адиабатный процессы. Изменение агрегатных состояний вещества: испарение и конденсация, плавление и кристаллизация, кипение жидкости. Преобразование энергии в фазовых переходах.

Термодинамика

Тепловое равновесие и температура. Внутренняя энергия. Теплопередача. Количество теплоты. Удельная теплоемкость вещества. Удельная теплота парообразования. Удельная теплота плавления. Удельная теплота сгорания топлива. Элементарная работа в термодинамике. Вычисление работы по графику процесса на pV -диаграмме. Первый закон термодинамики. Второй закон термодинамики. Принципы действия и КПД тепловой машины. Цикл Карно. Уравнение теплового баланса.

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ОСНОВЫ СТО

Электрическое поле

Электризация тел. Электрический заряд. Два вида заряда. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие зарядов. Точечные заряды. Закон Кулона. Электрическое поле. Его действие на электрические заряды. Напряженность электрического поля. Поле точечного заряда. Однородное поле. Картины линий поля. Потенциальность электростатического поля. Разность потенциалов и напряжение. Связь напряженности поля и разности потенциалов для однородного электростатического поля. Принцип суперпозиции электрических полей. Проводники в электростатическом поле. Диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Конденсатор. Емкость конденсатора. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Законы постоянного тока

Постоянный электрический ток. Сила тока. Напряжение и электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для участка цепи. Электрическое сопротивление. Удельное сопротивление вещества. Источники тока. ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока. Закон Ома для полной (замкнутой) электрической цепи. Параллельное и последовательное соединение проводников. Работа электрического тока. Закон Джоуля – Ленца. Мощность электрического тока. Тепловая мощность, выделяемая на резисторе. Мощность источника тока. Носители свободных электрических зарядов в металлах, жидкостях и газах.

Магнитное поле

Механическое взаимодействие магнитов. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Принцип суперпозиции магнитных полей. Линии магнитного поля. Магнитное поле проводника с током. Сила Ампера. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле.

Электромагнитная индукция

Поток вектора магнитной индукции. Явление электромагнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца. Индуктивность. Самоиндукция. ЭДС самоиндукции. Энергия магнитного поля катушки с током.

Электромагнитные колебания и волны

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания. Формула Томсона. Закон сохранения энергии в колебательном контуре. Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс. Гармонические электромагнитные колебания. Переменный ток. Производство, передача и потребление электрической энергии. Электромагнитное поле. Свойства электромагнитных волн. Взаимная ориентация векторов в электромагнитной волне в вакууме. Шкала электромагнитных волн.

Оптика

Прямолинейное распространение света в однородной среде. Луч света. Закон отражения света. Построение изображений в плоском зеркале. Закон преломления света. Абсолютный показатель преломления. Относительный показатель преломления. Ход лучей в призме. Соотношение частот и длин волн при переходе монохроматического света через границу раздела двух оптических сред. Полное внутреннее отражение. Собирающие и рассеивающие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила тонкой линзы. Формула тонкой линзы. Увеличение, даваемое линзой. Построение изображений в линзах. Фотоаппарат как оптический прибор. Глаз как оптическая система. Интерференция света. Когерентные источники. Условия наблюдения максимумов и минимумов в интерференционной картине от двух синфазных когерентных источников. Дифракция света. Дифракционная решетка. Условие наблюдения главных максимумов при нормальном падении монохроматического света. Дисперсия света.

Основы специальной теории относительности

Инвариантность модуля скорости света в вакууме. Принцип относительности Эйнштейна. Энергия свободной частицы. Импульс частицы. Связь массы и энергии. Энергия покоя свободной частицы.

РАЗДЕЛ 4. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Корпускулярно-волновой дуализм

Гипотеза М. Планка о квантах. Формула Планка. Фотоны. Энергия, импульс и масса фотона. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Волновые свойства частиц. Волны де Бройля. Длина волны де Бройля движущейся частицы. Корпускулярно-волновой дуализм.

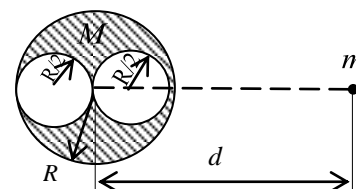
Физика атома и атомного ядра

Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Излучение и поглощение фотонов при переходе атома с одного уровня энергии на другой. Линейчатые спектры. Нуклонная модель ядра. Заряд ядра. Массовое число ядра. Изотопы. Энергия связи нуклонов в ядре. Ядерные силы. Дефект массы ядра. Радиоактивность. Альфа-распад. Бета-распад. Электронный β -распад. Позитронный β -распад. Гамма-излучение. Закон радиоактивного распада.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ И ЕЁ РЕШЕНИЯ ИЗ ВАРИАНТА ЗАДАНИЙ 2018 ГОДА

Задача. На расстоянии d от центра большого однородного шара массой M , в котором имеются две сферические полости радиусом $R/2$, находится материальная точка массой m (см. рис.). Радиус большого шара R . Найдите величину силы притяжения F между большим шаром и материальной точкой.

Дано: $M, m, d, R, R/2$.



Найти: F

Решение.

Целый шар (когда полости не вырезаны) массой M_o взаимодействует с материальной точкой массой m с силой: $\vec{F}_o = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Масса целого шара $M_o = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$. Масса полостей: $M_1 = \rho \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{8}$, $M_2 = \rho \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{8} \Rightarrow \frac{M_1}{M_o} = \frac{1}{8}$, $\frac{M_2}{M_o} = \frac{1}{8}$

Тогда $M = M_o - \frac{M_o}{8} - \frac{M_o}{8} = \frac{3}{4} M_o \Rightarrow M_o = \frac{4}{3} M$

Так как силы действуют по одной прямой, модуль силы гравитационного притяжения между массами M и m : $F = F_o - F_1 - F_2$

$$\begin{aligned} F &= \left[\frac{G \cdot M_o \cdot m}{d^2} - \frac{G \cdot M_1 \cdot m}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} - \frac{G \cdot M_2 \cdot m}{\left(d + \frac{R}{2}\right)^2} \right] = \left[\frac{G \cdot M_o \cdot m}{d^2} - \frac{G \cdot M_o \cdot m}{8 \left(d - \frac{R}{2}\right)^2} - \frac{G \cdot M_o \cdot m}{8 \left(d + \frac{R}{2}\right)^2} \right] = \\ &= \frac{4}{3} G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{2(2d - R)^2} - \frac{1}{2(2d + R)^2} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot m}{3} \cdot \left[\frac{2}{d^2} - \frac{1}{(2d - R)^2} - \frac{1}{(2d + R)^2} \right]. \end{aligned}$$

Ответ: величина силы притяжения между большим шаром и материальной точкой

$$F = \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot m}{3} \cdot \left[\frac{2}{d^2} - \frac{1}{(2d - R)^2} - \frac{1}{(2d + R)^2} \right]$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Против течения мы плывём медленнее, чем в стоячей воде; зато по течению - быстрее. Проплыть одно и то же расстояние *туда и обратно* удастся скорее в озере, чем в реке.

1. Верно. 2. Неверно.

Ответ: утверждение 1

2. Две когерентные волны фиолетового света с длиной волны 400 нм достигают некоторой точки с разностью хода $\Delta = 1,2$ мкм. В этой точке наблюдается интерференционный максимум.

1. Верно. 2. Неверно.

Ответ: утверждение 1

3. Конденсатор частично заполнен диэлектриком. Напряженность электрического поля больше в его нижней части.

1. Верно. 2. Неверно.

Ответ: утверждение 2

4. Студент, идущий вниз по спускающемуся эскалатору метрополитена, затрачивает на спуск 1 минуту. Если он будет идти вдвое быстрее, то затратит на 15 секунд меньше. Сколько времени студент будет спускаться, стоя на эскалаторе?

1. 60 секунд. 2. 3 минуты. 3. 1,5 минуты. 4. 45 секунд.

Ответ: 3

5. Определите ёмкость системы, показанной на рисунке. Все конденсаторы имеют ёмкость C .



1. C . 2. $C/3$. 3. $3C$. 4. 0.

Ответ: 3

6. Каким должен быть угол падения луча на поверхность стекла, чтобы угол преломления был в 2 раза меньше угла падения? Луч света переходит в стекло из воздуха. Скорость света в воздухе превышает скорость света в стекле в 1,73 раз.

1. $\alpha = \pi/12$. 2. $\alpha = \pi/6$. 3. $\alpha = \pi/4$. 4. $\alpha = \pi/3$.

Ответ: 4

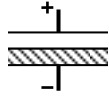
7. Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $x = A \sin \omega t$. В какой-то момент времени смещение точки $x_1 = 15$ см. При возрастании фазы колебания в два раза смещение x_2 оказалось равным 24 см. Определите амплитуду A колебания. Ответ выразить в сантиметрах.

Ответ: $A = 25$ см.

8. Доска толщиной 5 см плавает, погрузившись в воду на 70%. Поверх воды разливается слой нефти толщиной 1 см. На сколько будет выступать доска над поверхностью нефти? Ответ выразить в сантиметрах.

Ответ: на 1,3 см.

9. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно, и к ним подведено постоянное напряжение U . Первый конденсатор заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Во сколько раз изменится напряженность электрического поля в каждом из конденсаторов?

Ответ: в первом уменьшится в $\frac{\epsilon+1}{2}$ раз, 
во втором увеличится в $\frac{2\epsilon}{\epsilon+1}$ раз.

10. Закрытый цилиндрический сосуд высотой 2 м разделен на две части невесомым поршнем, скользящим без трения. При застопоренном поршне обе половины заполнены газом, причём в одной из них давление в 3 раза больше, чем в другой. На сколько передвинется поршень, если снять стопор? Процесс считать изотермическим.

Ответ: на 25 см.

11. Пространство разделено на две области плоскостью. В одной области создано магнитное поле индукции $B_1 = 0,5$ мТл, в другой - индукции $B_2 = 0,2$ мТл, причём поля имеют одинаковое направление, однородны, параллельны друг другу и плоскости. С плоскости раздела перпендикулярно ей стартует электрон со скоростью 10 Мм/с в сторону области с индукцией B_1 . Определите среднюю скорость перемещения электрона вдоль границы раздела магнитных полей проницаемых для него.

Ответ: $V_{cp} = 2,7$ Мм/с.

12. Фотокатод, покрытый кальцием (работа выхода $4,42 \cdot 10^{-19}$ Дж), освещается светом с длиной волны 300 нм. Вылетевшие из катода электроны попадают в однородное магнитное поле с индукцией $8,3 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям индукции этого поля. Каков максимальный радиус окружности, по которой движутся электроны?

Ответ: $R \approx 4,7 \cdot 10^{-3}$ м.

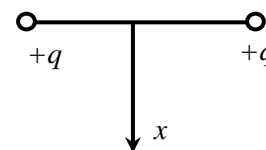
13. Предмет и экран зафиксированы в вертикальном положении на расстоянии 60 см друг от друга. Между ними находится собирающая линза, которая может перемещаться вдоль главной оптической оси. При одном положении линзы на экране получается изображение предмета, увеличенное в 3 раза, при другом – уменьшенное в 3 раза. Определить расстояние между обоими положениями линзы.

Ответ: 0,3 м

14. Луч света проходит через призму с преломляющим углом $\theta = 30^\circ$. Определите показатель преломления призмы, если угол отклонения $\delta = 60^\circ$, при симметричном ходе луча через призму.

Ответ: $n = 1,3$.

15. Два одинаковых одноимённых заряда расположены на расстоянии ℓ друг от друга. Ось x проходит через середину отрезка, соединяющего заряды, перпендикулярно ему. Как будет изменяться напряжённость электрического поля вдоль оси x ? Определите координату x , в которой значение напряжённости максимально.



Ответ: $E = E_{\max}$, $x = \pm \sqrt{\ell^2/8}$

Составитель доцент *Н.Н.Смирнова*

М А Т Е М А Т И К А

Для конструирования вариантов олимпиадной работы использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки).

Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый и второй блоки содержат задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов или открытой формы с вводом краткого ответа. Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи знания, относящиеся к одной или нескольким темам, умение обобщать знания, комбинировать известные алгоритмы действий, получать выводы, особенно к задачам, имеющим прикладную направленность или политехнический характер.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления достаточно высокой степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний и смекалки, и эрудиции.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы, состоящий из 25 заданий: десять задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий, пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за выполненные задания, суммируются.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ 2018/2019 УЧЕБНОГО ГОДА

РАЗДЕЛ 1. АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, НАЧАЛА АНАЛИЗА

Числа, выражения и преобразования

Натуральные и целые числа. НОК и НОД. Дроби. Десятичные периодические дроби. Модуль (абсолютная величина) числа. Степень с натуральным показателем. Арифметический корень: определение и свойства. Степень с рациональным показателем.

Проценты. Пропорции.

Логарифмы.

Тригонометрия: градусная и радианная мера угла; определения и основные свойства тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, котангенс); основные тригонометрические формулы.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Преобразование алгебраических выражений. Формулы сокращенного умножения.

Текстовые задачи.

Уравнения и неравенства

Равенства и уравнения, множество решений уравнения, равносильные (тождественные) преобразования. Линейные уравнения. Квадратные уравнения. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена. Системы алгебраических уравнений, основные методы их решений.

Алгебраические неравенства. Метод интервалов. Системы и совокупности алгебраических неравенств.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Иррациональные уравнения и неравенства.

Тригонометрические уравнения.

Показательные уравнения и неравенства.

Логарифмические уравнения и неравенства.

Системы алгебраических уравнений с двумя переменными.

Уравнения и неравенства с параметром.

Функции

Понятие функции, области определения и значений функции. График функции; четность, нечетность, периодичность функции. Нули функции. Ограниченность функции. Основные элементарные функции и их свойства.

Понятие о производной. Производные от элементарных функций, основные формулы дифференцирования. Производная произведения и частного функций. Определение касательной к графику функции. Монотонность и экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

РАЗДЕЛ 2. ГЕОМЕТРИЯ

Планиметрия

Прямая, луч, отрезок, ломаная, длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые, их свойства.

Треугольник. Медиана, высота, биссектриса, средняя линия треугольника и их свойства. Равенство треугольников. Свойства равнобедренного треугольника. Свойства прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема синусов. Теорема косинусов. Сумма углов треугольника.

Четырехугольники, свойства выпуклых четырехугольников. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр и радиус окружности. Касательная к окружности. Дуга окружности. Круговой сектор. Центральные и вписанные углы. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь кругового сектора.

Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Формулы площадей треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника

Стереометрия

Призма, параллелепипед, пирамида, правильные многогранники. Цилиндр. Конус. Шар. Объёмы и площади поверхности тел вращения.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

Блок 1

1. Упростите выражение $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{ab}{a+b}$.

Ответ: $a - b$.

2. Найдите значение выражений

2.1. $\left(\frac{11}{6} \cdot 0,9 - \frac{7}{4}\right) \cdot \left(9 \cdot \frac{5}{12} - \frac{16}{25}\right)$

Ответ: $-0,311$.

2.2. $(6 \cdot 10^2) \cdot (1,2 \cdot 10^{-4})$

Ответ: $-0,072$.

2.3. $\log_2 12 - \log_2 3 + 3^{\log_3 8}$

Ответ: 10 .

2.4. $\log_6 \left(2 \sin \frac{\pi}{4}\right) + \log_6 \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)$

Ответ: 0 .

3. Найдите значение выражения $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1 &= \sqrt{2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1} - \sqrt{2} + 1 = \\ &= \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{2} + 1 = |\sqrt{2} - 1| - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 1 = 0, \text{ т.к. } \sqrt{2} - 1 > 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0 .

4. В автопарке количество новых автобусов относится к количеству старых как $1:4$. Сколько процентов автобусов в автопарке составляют новые автобусы?

Ответ: 20 .

5. Найдите периметр прямоугольного участка земли (в метрах), площадь которого равна 1200 м^2 и одна сторона в три раза больше другой.

Ответ: 160 .

6. Найдите $4\sin^2 x - 3$, если $\cos x = 0,2$.

Ответ: $0,84$.

Блок 2

1. Укажите выражение, значение которого является наибольшим.

а) $0,3 + 1 : \frac{1}{3}$; б) $\frac{0,4}{0,3} \cdot \frac{1}{2}$; в) $\frac{12,2 - 3,4}{2,2}$; г) $\frac{0,4}{0,3} - 2$.

Ответ: в.

2. Найдите значение выражения

$$\frac{3^{(4-\sqrt{3})^2} - 3^{19-8\sqrt{3}}}{2^2} + 8^{\sqrt{3}} : 2^{3\sqrt{3}}$$

Ответ: 1 .

3. Решите уравнение

$$\log_4(x^2 + 5x + 6) - \log_{16}(x^2 + 4x + 4) = 8.$$

Если уравнение более одного корня в ответе укажите сумму всех корней уравнения.

Ответ: -6 .

4. Найдите наибольшее значение функции $y = 5^{x^4 - 32x + 45}$.

Ответ: 8 .

5. Двое путников одновременно вышли из пункта A по направлению к пункту B . Шаг второго был на 20% короче, чем шаг первого, но зато второй успевал за то же время сделать на 20% шагов больше, чем первый. Сколько времени потребовалось второму путнику для достижения цели, если первый прибыл в пункт B спустя 5 часов после выхода из пункта A ?

Решение.

Шаг второго путника составлял 80% или $0,8$ шага первого путника.

На каждые 100 шагов первого путника второй успевал сделать 120 шагов, т.е. за то же время второй путник успевал сделать в 1.2 раза больше шагов, чем первый.

Следовательно, расстояние, пройденное за некоторое время вторым путником, составляло $0,8 \cdot 1,2 = 0,96$ расстояния, пройденного за то же время первым.

Путь, пройденный человеком за некоторое время, прямо пропорционален скорости движения. Поэтому, скорость второго путника составляла 0,96 скорости первого.

Время, которое затрачивает человек на прохождение определенного пути, обратно пропорционально скорости движения. Поэтому, продолжительность движения первого путника из А в В составляет 0,96 продолжительности движения второго путника на этой дистанции.

Таким образом, для перехода из А в В второму путнику потребовалось $5 : 0,96 = 5,2$ часа, т.е. 5ч 12 мин.

Ответ: 5ч 12 мин .

Блок 3

1. Найдите тангенс угла наклона прямой к оси Ox , проходящей через точки с координатами $(1;1)$ и $(111;111)$.

Ответ: 10.

2. Масса радиоактивного вещества m с течением времени меняется по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где T – период полураспада этого вещества, m_0 – масса вещества в момент начала наблюдения, t – время, прошедшее от начала наблюдения. Через 3 минуты после начала опыта масса вещества была равна 48 г, а через 38 минут после начала опыта масса вещества стала равна 1,5 г. Определите (в минутах) период полураспада вещества.

Ответ: 7.

3. Укажите наибольшее целое значение параметра k , при котором число 3 находится между корнями уравнения $x^2 + x + (k-1)(k+7) = 0$.

Решение.

Введем обозначение $f(x) = x^2 + x + (k-1)(k+7)$. Учитывая, что старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ положительный, можно сделать вывод, что число 3 находится между корнями уравнения $f(x) = 0$, тогда и только тогда, когда $f(3) < 0$.

Решим неравенство $f(3) < 0$,

$$3^2 + 3 + (k-1)(k+7) < 0,$$

$$k^2 + 6k + 5 < 0,$$

$$(k+1)(k+5) < 0,$$

$$-5 < k < -1.$$

Следовательно, наибольшее целое значение $k = -2$.

Ответ: -2.

4. Укажите целое значение параметра a , если оно единственное, или сумму целых значений из промежутка $(0;10)$, при которых уравнение $(\sqrt{x-4}-2)(x-a) = 0$ имеет единственное решение.

Ответ: 10.

5. Все трехзначные числа записаны в ряд: 100, 101, 102, ..., 998, 999. Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?

Решение.

Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда. Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа. Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа, т.е. это число оканчивается на 20. Таких чисел 9: 120, 220, ..., 920. наконец, если двойка, после которой идет нуль стоит в разряде сотен, то соответствующее трехзначное число начинается на 20. Таких чисел 10: 200, 201, ..., 209. Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз.

Ответ: 19.

6. Все трехзначные числа записаны в ряд: 100, 101, 102, ..., 998, 999. Сколько раз в этом ряду после нуля идет единица?

Ответ: 10.

7. Первый член последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д. Чему равен 1917-й член последовательности?

Решение.

1917-й член последовательности равен наименьшему натуральному числу n , для которого $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \geq 1917$. Последнее неравенство будет равносильно неравенству $n^2 + n - 3814 \geq 0$. Решением данного квадратного неравенства (учитывая, что n – натуральное число) будет $n \geq \frac{-1 + \sqrt{15337}}{2} \approx 61,42$. Значит, последний член последовательности будет 62.

Ответ: 62.

8. Найти сумму $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$.

Решение.

Поскольку $-n^2 + (n+1)^2 = n + (n+1)$, то $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2 = 1 + (2+3) + (4+5) + \dots + (100+101) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100 + 101 = \frac{(1+101) \cdot 101}{2} = 5151$

Ответ: 5151.

9. Первый член последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д. Чему равен 2017-й член последовательности?

Ответ: 64.

10. Найти сумму ряда $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{27} + \dots$.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Составитель доцент Л.В. Бакеева