

**ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМПЕРАТРИЦЫ ЕКАТЕРИНЫ II»**



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»

МАТЕМАТИКА

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОТБОРОЧНОМУ ТУРУ ОЛИМПИАДЫ
2024/2025 ГОДА**

10 - 11 К Л А С С

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Математика» (предмет олимпиады – Естественные науки) проходит с использованием интернет-технологий (заочно). Продолжительность отборочного тура олимпиады – 2 часа

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовленность участников олимпиады в рамках программы, соответствующей Кодификатору элементов содержания по математике 2024 года, размещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений» <https://fipi.ru/metodicheskaya-kopilka/univers-kodifikatory-oko#!/tab/243050673-2>.

В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса математики:

- Числа и вычисления;
- Уравнения и неравенства;
- Функции и графики;
- Начала математического анализа;
- Множества и логика;
- Теория вероятностей и статистика;
- Геометрия.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2024-2025

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧИСЛА, ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Натуральные и целые числа. НОК и НОД. Обыкновенные дроби. Десятичные периодические дроби. Модуль (абсолютная величина) числа. Степень с натуральным показателем. Арифметический корень: определение и свойства. Степень с рациональным показателем.

Проценты. Пропорции.

Логарифмы.

Тригонометрия: градусная и радианная меры угла; определения и основные свойства тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, котангенс); арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента; основные тригонометрические формулы.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Преобразование алгебраических выражений. Формулы сокращенного умножения.

Текстовые задачи.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Равенства и уравнения, множество решений уравнения, равносильные (тождественные) преобразования. Линейные уравнения. Квадратные уравнения. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на множители. Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена. Системы алгебраических уравнений, основные методы их решений.

Алгебраические неравенства. Метод интервалов. Системы и совокупности алгебраических неравенств.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.
Иррациональные уравнения и неравенства.
Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения и неравенства.
Логарифмические уравнения и неравенства.
Системы алгебраических уравнений с двумя переменными.
Уравнения и неравенства с параметром.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Понятие функции, области определения и значений функции. График функции; четность, нечетность, периодичность функции. Нули функции. Ограниченность функции. Основные элементарные функции, их графики и свойства.

Понятие о производной. Производные от элементарных функций, основные формулы и правила дифференцирования. Производная произведения и частного функций. Определение касательной к графику функции. Монотонность и экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Использование графиков функций для решения уравнений и линейных систем

МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА

Множество, операции над множествами. Диаграммы Эйлера – Венна.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий.

Случайные опыты с равновероятными элементарными событиями. Вероятности событий в опытах с равновероятными элементарными событиями.

Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Формула сложения вероятностей.

Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Независимые события.

Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона

Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Прямая, луч, отрезок, ломаная, длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые, их свойства.

Треугольник. Медиана, высота, биссектриса, средняя линия треугольника и их свойства. Равенство треугольников. Свойства равнобедренного треугольника. Свойства прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема синусов. Теорема косинусов. Сумма

углов треугольника. Площадь треугольника.

Четырёхугольники, свойства выпуклых четырёхугольников. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр и радиус окружности. Касательная к окружности. Дуга окружности. Круговой сектор. Центральные и вписанные углы. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь кругового сектора.

Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Формулы площадей треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Призма, параллелепипед, пирамида, правильные многогранники. Цилиндр. Конус. Шар. Объёмы и площади поверхности тел.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса математики.

Для конструирования вариантов олимпиадной работы использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки).

Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый и второй блоки содержат задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов или открытой формы с вводом краткого ответа. Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи знания, относящиеся к одной или нескольким темам, умение обобщать знания, комбинировать известные алгоритмы действий, получать выводы, особенно к задачам, имеющим прикладную направленность или политехнический характер.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления достаточно высокой степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний, смекалки и эрудиции.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы, состоящий из 25 заданий: десять задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий, пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за каждое выполненное задания, суммируются.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

Блок 1

1. Упростить выражение $\left[\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} \right) \left(\frac{1}{a^2 - b\sqrt{ab}} \right)^{-1} \right]^{-1}$ и вычислить его значение при $a=101$, $b=99$.

Ответ: 0,5.

2. Вычислить $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\cos x = 0,6$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Ответ: $-0,5$.

3. Найти наибольшее решение уравнения $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$.

Решение. Уравнение определено для любых значений x . Преобразуем уравнение к виду $(5^x)^2 - 7 \cdot (5^x) + 10 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, будем иметь:

$$(5^x)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \begin{cases} 5; \\ 2, \end{cases} \quad \text{откуда} \begin{cases} x = 1; \\ x = \log_5 2. \end{cases}$$

Так как $\log_5 2 < 1$, искомое решение $x = 1$.

Ответ: 1.

4. Два бассейна наполняют водой. В одном из них уже имеется 200 м^3 воды, а в другом – 112 м^3 . Через сколько часов количество воды в бассейнах станет одинаковым, если во второй бассейн в час вливается на 22 м^3 воды больше, чем в первый?

Ответ: 4.

5. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти наибольший катет.

Решение. Введем обозначения: $\triangle ABC$ – прямоугольный, CM – медиана, $CM = \sqrt{3}/2$ см, $\angle ACM : \angle MCB = 2:1$. Найти AC и CB .

Достроим заданный треугольник до прямоугольника $CADB$. Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, поэтому $CD = 2CM = \sqrt{3}$ см. По условию $\angle MCB = 30^\circ$. В треугольнике CDB

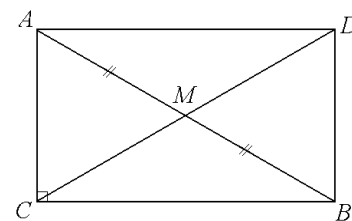


Рис.1

$$\begin{aligned} DB = AC = CD \sin \angle MCB = \\ = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \sqrt{3}/2 \text{ см}; \end{aligned}$$

$$CB = CD \cos \angle MCB = \sqrt{3} \cos 30^\circ = 3/2 \text{ см. Наибольший из найденных катетов } CB = 3/2 = 1,5$$

Ответ: 1,5.

Блок 2

1. Вычислить значение выражения $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{13\pi}{10}$.

Ответ: 0,5.

2. Три числа, третьим из которых является 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получим арифметическую прогрессию. Найти наибольшее из этих чисел.

Решение. Воспользуемся свойствами прогрессий: если три числа (a, b, c) образуют геометрическую прогрессию, то $ac = b^2$; если три числа (a, b, c) образуют арифметическую прогрессию, то $a + c = 2b$. Обозначим x и y – первые два числа. Тогда

$$\begin{cases} 12x = y^2 \\ x + 9 = 2y \end{cases} \Rightarrow x = 2y - 9 \Rightarrow (2y - 9)12 = y^2 \Rightarrow y^2 - 24y + 108 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = 18, y_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 27, x_2 = 3.$$

Таким образом, получили две геометрические прогрессии: 3, 6, 12 и 27, 18, 12; две арифметические: 3, 6, 9 и 27, 18, 9. Наибольшее из этих чисел 27

Ответ: 27.

3. Найти наибольшее значение функции $f(x) = 5\sin x + 12\cos x$.

Ответ: 13.

4. Расстояние от точки пересечения диаметра окружности радиуса 11 см с хордой длиной 18 см до центра окружности равно 7 см. В каком отношении точка пересечения делит хорду?

Ответ: 2:1, 1:2.

5. В книжном шкафу от 250 до 300 книг. Если расставить их на полки по 15 штук, то семи книгам не хватит места, а если разместить на полках по 25 книг, то останется 8 свободных мест. Сколько книг в шкафу?

Решение. Пусть a – число книг. По условию

$$\begin{cases} a = 15k + 7 = 15(k+1) - 8; \\ a = 25l - 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+8) : 15; \\ (a+8) : 25. \end{cases} \Rightarrow (a+8) : 75.$$

$a+8$ следует искать среди кратных числу 75: 225, 300, 375, 450, ..., откуда $a = 292$.

Ответ: 292.

6. Каждый ученик класса побывал в театре или в кино. В театр сходили 22 человека. В кино были 15 человек. И в театре, и в кино были 7 человек. Сколько учеников в классе?

Решение. Если найти сумму $22+15$, то окажется, что каждого, кто побывал и в театре, и в кино, мы посчитали дважды. Поэтому найденная сумма на 7 больше количества учеников в классе. Следовательно, в классе $22+15-7=30$ человек.

Ответ: 30.

Блок 3

1. Найти наименьшее значение выражения $1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}$.

Решение. Выражение имеет смысл при $x \neq \pi k$ и $y \neq \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$ для любых положительных u и v , так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2 + v^2}{uv} \geq 2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \geq 2uv \Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2uv \geq 0 \Leftrightarrow (u - v)^2 \geq 0.$$

Полагая $u = \sin^2 x$, $v = \sin^2 y$, получим $1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \geq 1 + 2 = 3$.

Ответ: 3.

2. Оптовая торговая компания приобрела у производителя товар по цене x рублей за единицу, где x – натуральное число. Цену каждой единицы товара умножили на 1,7, затем округлили до целого (по обычному правилу) и отправили в магазин. В магазине цену опять умножили на 1,7 и округлили до целого. Получилось число 515. Какова цена производителя?

Решение. Последнее число $x_2 = 515$ получилось в результате округления числа x_1 , которое должно принадлежать интервалу $[514,5; 515,5)$. Разделив границы интервала на 1,7, получим: $514,5 \div 1,7 \approx 302,6$, $515,5 \div 1,7 \approx 303,2$. Таким образом, $x_1 = 303$, и, следовательно $x \cdot 1,7 \in [302,5; 303,5)$. В этом случае $x \in [177,9; 178,5)$, то есть, $x = 178$.

Ответ: 178.

3. Найти количество девяток, составляющих число $1000^{2024} - 1$.

Решение.

Число 1000^{2024} содержит 1 и 6072 нуля, при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6072 девяток.

Ответ: 6072

4. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение. Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Общий член прогрессии задается формулой $a_n = 102 + (n - 1) \cdot 6$, и так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102 + (n - 1) \cdot 6 \leq 999, \quad n \leq 1 + \frac{999 - 102}{6} = 1 + \frac{897}{6} = 150,5.$$

Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму, $n = 150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n - 1)}{2} \cdot d = 150 \cdot 102 + \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot 6 = 82305.$$

Ответ: 82305.

5. Определите, при каком значении параметра a система $\begin{cases} 2x + (a-1)y = 3; \\ (a+1)x + 4y = -3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Ответ: -3.

6. Найти число $a = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{2023} 2022 = \log_b c$. В ответ записать сумму $b + c$.

Решение:

$$\log_3 2 = \frac{\log_{2023} 2}{\log_{2023} 3}, \log_4 3 = \frac{\log_{2023} 3}{\log_{2023} 4}, \dots, \log_{2022} 2021 = \frac{\log_{2023} 2021}{\log_{2023} 2022}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} a = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{2023} 2022 &= \frac{\log_{2023} 2}{\log_{2023} 3} \cdot \frac{\log_{2023} 3}{\log_{2023} 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_{2023} 2021}{\log_{2023} 2022} \cdot \log_{2023} 2022 = \\ &= \log_{2023} 2 \end{aligned}$$

Ответ: 2025

Составители: доцент *А. А. Яковлева*, доцент *О.В. Сильванович*

Научный редактор

заведующий кафедрой высшей математики профессор *А.П. Господариков*