

**ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМПЕРАТРИЦЫ ЕКАТЕРИНЫ II»**



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»

МАТЕМАТИКА

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОТБОРОЧНОМУ ТУРУ ОЛИМПИАДЫ
2024/2025 ГОДА**

9 К Л А С С

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Математика» (предмет олимпиады – Естественные науки) проходит с использованием интернет-технологий (заочно). Продолжительность отборочного тура олимпиады – 2 часа

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовленность участников олимпиады в рамках программы, соответствующей Кодификатору элементов содержания по математике года, размещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений» <https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/173801626-2>. В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса математики:

- числа и вычисления;
- алгебраические выражения
- уравнения и неравенства;
- числовые последовательности
- функции
- координаты на прямой и плоскости;
- геометрия;
- элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2023-2024

Числа и вычисления

Натуральные числа. Десятичная система счисления. Римская нумерация. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Деление с остатком.

Дроби. Обыкновенная дробь, основное свойство дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями. Нахождение части от целого и целого по его части. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей. Арифметические действия с десятичными дробями. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и обыкновенной в виде десятичной

Рациональные числа. Целые числа. Модуль (абсолютная величина) числа. Сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами. Степень с целым показателем. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок. Законы арифметических действий.

Действительные числа. Квадратный корень из числа. Корень третьей степени. Нахождение приближённого значения корня. Запись корней с помощью степени с дробным показателем. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Сравнение действительных чисел

Измерения, приближения, оценки

Единицы измерения длины, площади, объёма, массы, времени, скорости. Размеры объектов окружающего мира (от элементарных частиц до Вселенной), длительность процессов в окружающем мире. Представление зависимости между величинами в виде формул. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по её проценту. Отношение, выражение отношения в процентах. Пропорция. Пропорциональная и обратно пропорциональная зависимости. Округление чисел.

Алгебраические выражения

Буквенные выражения. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения. Подстановка выражений вместо переменных. Равенство буквенных выражений, тождество. Преобразования выражений.

Свойства степени с целым показателем

Многочлены. Многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности, формула разности квадратов. Разложение многочлена на множители. Квадратный трёхчлен. Теорема Виета. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители. Степень и корень многочлена с одной переменной

Алгебраическая дробь. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей. Действия с алгебраическими дробями. Рациональные выражения и их преобразования.

Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях

Уравнения и неравенства

Уравнения. Уравнение с одной переменной, корень уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения. Решение рациональных уравнений. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители. Уравнение с двумя переменными, решение уравнения с двумя переменными. Система уравнений, решение системы алгебраическим сложением. Уравнение с несколькими переменными

Решение простейших нелинейных систем

Неравенства. Числовые неравенства и их свойства. Неравенство с одной переменной. Решение неравенства. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств. Квадратные неравенства

Текстовые задачи. Решение текстовых задач.

Числовые последовательности

Понятие последовательности

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Функции

Числовые функции. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции. График функции, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, чтение графиков функций. Функция, описывающая прямую пропорциональную зависимость, её график. Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график. Гипербола. Квадратичная функция, её график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии. Использование графиков функций для решения уравнений и систем.

Координаты на прямой и плоскости.

Координатная прямая. Изображение чисел точками координатной прямой. Геометрический смысл модуля. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч

Декартовы координаты на плоскости. Декартовы координаты на плоскости, координаты точки. Координаты середины отрезка. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых. Уравнение окружности. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными и их систем.

Геометрия

Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин

Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и её свойства. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой. Понятие о геометрическом месте точек. Преобразования плоскости. Движения. Симметрия.

Треугольник. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Признаки равенства треугольников. Неравенство треугольника. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника. Теорема Фалеса. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника. Решение прямоугольных треугольников. Основное тригонометрическое тождество. Теорема косинусов и теорема синусов

Многоугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки. Трапеция, средняя линия трапеции, равнобедренная трапеция. Сумма углов выпуклого многоугольника. Правильные многоугольники

Окружность и круг. Центральный угол, вписанный угол, величина вписанного угла. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей. Касательная и секущая к окружности; равенство отрезков касательных, проведённых из одной точки. Окружность, вписанная в треугольник. Окружность, описанная около треугольника. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника.

Измерение геометрических величин. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой. Длина окружности. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника. Площадь параллелограмма. Площадь трапеции. Площадь треугольника. Площадь круга, площадь сектора. Формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, куба, шара.

Векторы на плоскости. Вектор, длина (модуль) вектора. Равенство векторов. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число). Угол между векторами. Коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

Статистика и теория вероятностей

Описательная статистика Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков. Средние результатов измерений

Вероятность. Частота события, вероятность. Равновозможные события и подсчёт их вероятности. Представление о геометрической вероятности. Испытание. Успех и неудача. Серия испытаний до первого успеха.

Комбинаторика. Перестановки и факториал. Сочетания и число сочетаний. Решение комбинаторных задач: перебор вариантов, комбинаторное правило умножения.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса математики.

Для конструирования вариантов олимпиадной работы использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки).

Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый и второй блоки содержат задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов или открытой формы с вводом краткого ответа. Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи знания, относящиеся к одной или нескольким темам, умение обобщать знания, комбинировать известные алгоритмы действий, получать выводы, особенно к задачам, имеющим прикладную направленность или политехнический характер.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления значительной степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний, смекалки и эрудиции.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы, состоящий из заданий: десять задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий, пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за каждое выполненное задания, суммируются.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

Блок 1.

1. Вычислить $\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}}$.

Ответ: -2.

2. Первый член возрастающей геометрической прогрессии $b_1 = \sqrt{3}$, пятый член $b_5 = \sqrt{243}$. Найти квадрат шестого члена.

Решение:

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = \sqrt{3} \cdot q^4 = \sqrt{243} \Rightarrow q^4 = \sqrt{\frac{243}{3}} = 3^2; q = \pm 3, b_6 = \sqrt{243} \cdot q = \pm \sqrt{81 \cdot 3^2} = \pm 27.$$

Ответ: 27.

3. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько братьев в семье?

Ответ: 4.

4. Морская вода содержит 5% соли (по весу). Сколько кг пресной воды нужно прибавить к 40 кг морской, чтобы содержание соли в смеси составляло 2%?

Ответ: 60.

Блок 2

1. Вычислить $1, (714285) + 0, (285714)$.

Ответ: 2.

2. Решить уравнение $\frac{26,751}{3,249} - \frac{6,751}{3,249} \cdot x = \frac{23,249}{6,751} - \frac{3,249}{6,751} \cdot x$.

Решение.

Обозначив $a = 6,751$, $b = 3,249$, получим $\frac{a+20}{b} - \frac{a}{b}x = \frac{b+20}{a} - \frac{b}{a}x$; решим это уравнение:

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)x = \frac{b+20}{a} - \frac{a+20}{b}; \left(\frac{b^2 - a^2}{ab}\right)x = \frac{b^2 + 20b - a^2 - 20a}{ab}; x = \frac{b^2 - a^2 + 20(b-a)}{b^2 - a^2};$$

$$x = 1 + \frac{20}{b+a} = 1 + \frac{20}{10} = 3.$$

Ответ: 3.

1. Найти сумму корней уравнения $\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{9}{x}\right) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$.

Решение. Уравнение имеет смысл при $x \neq 0$. Приведя к общему знаменателю, получим:

$$\frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x^2-9}{x} = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3);$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x} = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Значения $x=1, 2, 3$ - решения данного уравнения. Сократим на общие множители и упростим:

$$(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = x^3;$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3;$$

$$6x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Дискриминант $D = -23$, следовательно, других решений исходное уравнение не имеет.

Ответ: 6.

4. Поезд проходит мост длиной в 450 м за 45 сек и 15 сек идет мимо телеграфного столба. Вычислить длину поезда.

Ответ: 225.

5. Громоотвод защищает от молнии все предметы, расстояние от которых до его основания не превышает его удвоенной высоты. Найти наименьшую высоту громоотвода, необходимую для защиты прямоугольного участка на метров.

Решение. Громоотвод высоты h защищает круглую площадь радиуса $2h$, следовательно, задача сводится к отысканию радиуса наименьшего круга, в который можно вписать данный прямоугольник. Очевидно, диаметр такого круга должен совпадать с диагональю прямоугольника $d = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$, и необходимая высота $h = \frac{d}{4} = \frac{25}{4} = 6,25$.

Ответ: 6,25.

Блок 3

1. Найти наименьшее значение выражения $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^3$

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Заметим, что $u + \frac{1}{u} \geq 2$ для любых положительных u , так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2 + 1}{u} \geq 2 \Leftrightarrow u^2 + 1 \geq 2u \Leftrightarrow u^2 + 1 - 2u \geq 0 \Leftrightarrow (u - 1)^2 \geq 0,$$

причем равенство достигается при $u = 1$.

Таким образом, наименьшее значение выражения $2^3 + 2^3 = 16$.

Ответ. 16.

2. Оптовая торговая компания приобрела у производителя товар по цене x рублей за единицу, где x – натуральное число. Цену каждой единицы товара умножили на 1,7, затем округлили до целого (по обычному правилу) и отправили в магазин. В магазине цену опять умножили на 1,7 и округлили до целого. Получилось число 515. Какова цена производителя?

Решение. Последнее число $x_2 = 515$ получилось в результате округления числа x_1 , которое должно принадлежать интервалу $[514,5; 515,5)$. Разделив границы интервала на 1,7, получим: $514,5 \div 1,7 \approx 302,6$, $515,5 \div 1,7 \approx 303,2$. Таким образом, $x_1 = 303$, и, следовательно $x \cdot 1,7 \in [302,5; 303,5)$. В этом случае $x \in [177,9; 178,5)$, то есть, $x = 178$.

Ответ: 178.

3. Две вершины квадрата площадью 256 см^2 лежат на окружности, а две другие вершины – на касательной к этой окружности. Найти радиус окружности.

Ответ: 10.

4. Найти количество девяток, составляющих число $1000^{2024} - 1$.

Решение.

Число 1000^{2024} содержит 1 и 6072 нуля, при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6072 девяток.

Ответ: 6072

5. Найти сумму всех четырехзначных чисел, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1,2,3,4,5, причем каждая цифра встречается не более одного раза.

Решение. Любая из этих цифр встречается в любом разряде столько раз, сколькими способами можно распределить остальные четыре цифры по оставшимся трем разрядам. Это число $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Следовательно, сумма цифр, стоящих в каждом из четырех разрядов, взятая по всем четырехзначным числам, удовлетворяющим условиям задачи, равна $24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360$, а сумма самих четырехзначных чисел $360 \cdot (10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 360 \cdot 1111 = 399960$.

Ответ. 399960.

Составители: доцент А. А. Яковлева, доцент О.В. Сильванович

Научный редактор

заведующий кафедрой высшей математики профессор А.П. Господариков