



ВАРИАНТ № 1

Задача 1. (5 баллов)

Миша и Маша играют в игру: независимо друг от друга, одновременно, пишут на бумаге любое натуральное число из некоторого диапазона и показывают друг другу: Миша - число $a: 0 < a \leq 120$, Маша число $b: 0 < b \leq 112$. Побеждает тот, кто написал большее число. Какова вероятность, что победит Миша?

Решение:

Всех возможных исходов - $120 \cdot 112 = 13440$. Маша победит в том случае, если $b > a$.

Число исходов, благоприятствующих этому событию равно $1 + 2 + 3 + \dots + 111 = \frac{1+111}{2} \cdot 111 = 6216$.

Тогда искомая вероятность $P = 1 - \frac{6216}{13440} = 1 - 0.4625 = 0,5375$

Или: если $a: 0 < a \leq m$, $b: 0 < b \leq n$, то искомая вероятность равна:

$$P = 1 - \frac{n \cdot (n-1)}{m \cdot n} = 1 - \frac{n-1}{2m} = 1 - \frac{112-1}{2 \cdot 120} = 1 - \frac{111}{240} = \frac{129}{240} = 0.5375$$

Ответ: 0,5375

Задача 2. (8 баллов)

Найти наименьшее значение функции $f(x) = \left(1 + \frac{25}{x}\right)^{2025} + \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{2025}$.

Решение: Дважды применим неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{25}{x}\right)^{2025} + \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{2025} &\geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{25}{x}\right)^{2025} \cdot \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{2025}} = 2 \sqrt{\left(1 + \frac{25}{x} + \frac{x}{25} + 1\right)^{2025}} = \\ 2 \sqrt{\left(2 + \frac{25}{x} + \frac{x}{25}\right)^{2025}} &\geq 2 \sqrt{\left(2 + 2 \sqrt{\frac{25}{x} \cdot \frac{x}{25}}\right)^{2025}} = 2 \sqrt{(2+2)^{2025}} = 2^{2026} \end{aligned}$$

Ответ: 2^{2026}

Задача 3. (10 баллов) Числовая последовательность задана условием:

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - (a_n)^2}}$. Доказать, что при неограниченно большом $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1,25$$

Решение:

Так как $-1 \leq a_n \leq 1$, то положим $a_1 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, $a_n = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

последовательность a_n - убывающая и $0 < \sin \alpha < 1$.

Тогда $a_n = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \sqrt{1 - |\cos \alpha|} = \sqrt{1 - \cos \alpha} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, $a_2 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot 6} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2 \cdot 3}$

$$, a_3 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3 \cdot 6}, \dots, a_n = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}.$$

Так как при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin \alpha < \alpha$, то



$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3 \cdot 3} + \dots + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3} < \\
&< \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^3 \cdot 3} + \dots + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^n \cdot 3} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot 3} = \frac{3 + \sqrt{2}\pi}{6} < 1,25
\end{aligned}$$

Задача 4. (12 баллов)

Через лес проходит две параллельные просеки, на каждой из которых пробурены по две скважины так, что соединив эти скважины прямыми линиями мы получим трапецию площади 2. Сумма расстояний между скважинами, расположенными на концах диагоналей этой трапеции, равна 4. Найти расстояние между двумя параллельными просеками.

Решение:

Пусть скважины расположены в вершинах трапеции $ABCO$. Рассмотрим трапецию $ODEF$, полученную сдвигом исходной трапеции $ABCO$ вправо (рис. 1).

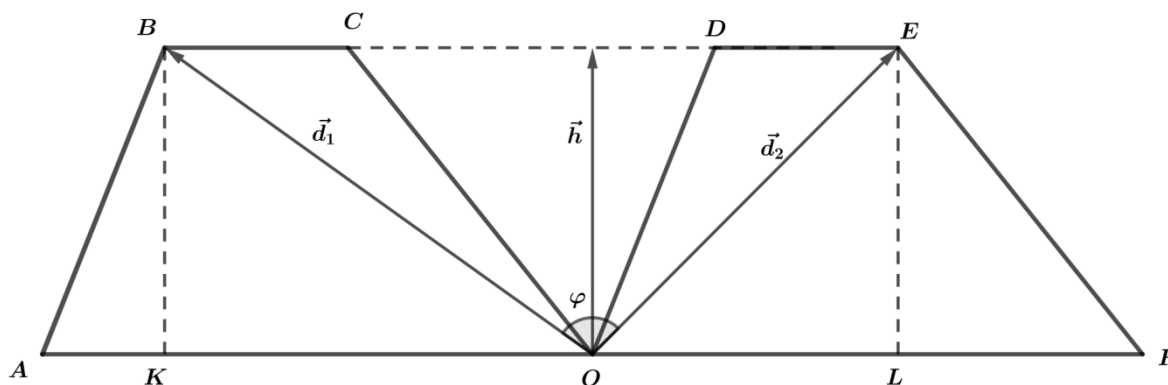


Рис.1.

Площадь прямоугольника $KBEL$ равна удвоенной площади исходной трапеции $ABCO$.

Так как $S_{ABCO} = \frac{1}{2} |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi$, то $S_{KBEL} = 2 \cdot S_{ABCO} = |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 4$.

По условию $|\vec{d}_1| + |\vec{d}_2| = 4$, тогда $|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = (4 - |\vec{d}_2|) \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 4$.

Обозначим $|\vec{d}_2| = x$, тогда получим:

$$(4 - x) \cdot x \sin \varphi = 4 \Leftrightarrow 4x \sin \varphi - x^2 \sin \varphi - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 \sin \varphi - 4x \sin \varphi + 4 = 0.$$

Решим уравнение $x^2 \sin \varphi - 4x \sin \varphi + 4 = 0$:

$D = 16 \sin^2 \varphi - 16 \sin \varphi = 16 \sin \varphi (\sin \varphi - 1)$. Так как $D < 0$ при всех $0 < \varphi < \pi$, то уравнение

$x^2 \sin \varphi - 4x \sin \varphi + 4 = 0$ имеет смысл при $D = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$x = \frac{4}{2} = 2$, то есть $|\vec{d}_2| = 2$ и $|\vec{d}_1| = 4 - 2 = 2$. $\triangle BOE$ - равнобедренный и искомая высота $|\vec{h}|$ - это

и его медиана, а значит $|\vec{h}| = \frac{1}{2} |\vec{d}_1 + \vec{d}_2|$ и

$$|\vec{h}| = \sqrt{\vec{h} \cdot \vec{h}} = \sqrt{\frac{1}{4} (\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 + \vec{d}_2)} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 + 2\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8} = \sqrt{2}$$



Ответ: $\sqrt{2}$

Задача 5. (15 баллов)

Кристалл имеет форму правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой имеют длину 2. Точки M и N - середины ребер AS и AB соответственно. С помощью лазера кристалл рассекают на две части, одна из которых – треугольная пирамида. Луч лазера проходит через точку M перпендикулярно прямой CN . Найти площадь основания полученной треугольной пирамиды с вершиной в точке A .

Решение:

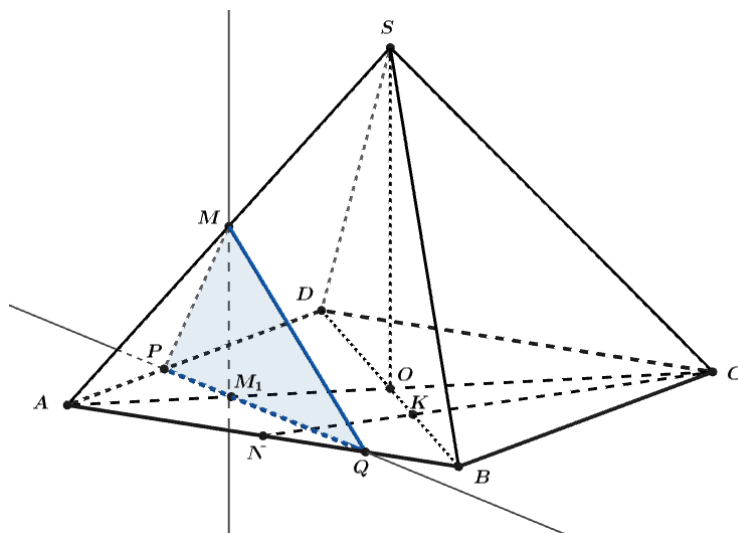


Рис.1.

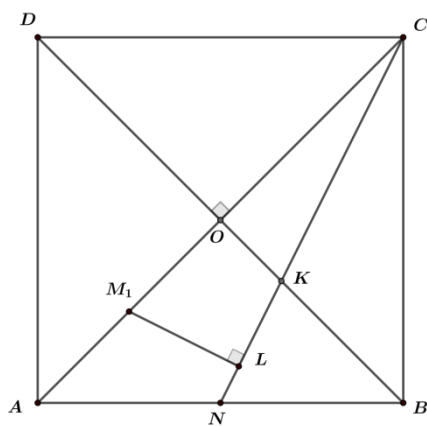


Рис.2.

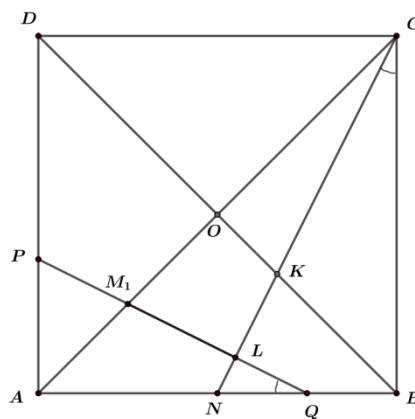


Рис.3.

Пусть α - секущая плоскость лазерного луча. По условию, $\alpha \perp CN$, тогда для построения сечения (рис.1) необходимо:

- 1) провести высоту SO ,
- 2) через точку M провести прямую l , параллельную SO так, что $l \cap AC = M_1$. Тогда MM_1 - перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC
- 3) Проведём из точки M_1 перпендикуляр к прямой CN - он пересекает CN в точке L , сторону AD - в точке P , сторону AB - в точке Q

Важно отметить точное положение точки L и показать, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB .

Рассмотрим рис.2:

- 1) По теореме Пифагора $CN^2 = BC^2 + BN^2 = 4 + 1 = 5$, тогда $CN = \sqrt{5}$



2) $K = CN \cap BD$ и K - точка пересечения медиан треугольника ABC , поэтому

$$CK = \frac{2}{3} CN = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

3) M_1 - середина OA (так как M - середина AS , $MM_1 \parallel SO$). Тогда $CM_1 = \frac{3}{4} AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4) Из подобия треугольников CLM_1 и COK : $CL = \frac{CM_1}{CK} \cdot OC = \frac{9\sqrt{5}}{10}$, т.е. $\frac{CL}{CN} = \frac{9}{10}$ и положение точки L определено.

Для доказательства того, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB , рассмотрим

1) подобные треугольники LNQ и BNC (рис.3):

$$NQ = \frac{LN \cdot CN}{NB} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{1} = \frac{1}{2}, \quad NQ < NB, \text{ значит } Q \in AB.$$

2) подобные треугольники APQ и BNC :

$$AP = \frac{AQ \cdot NB}{BC} = \frac{(AN + NQ) \cdot NB}{BC} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ значит } P \in AD.$$

Искомое сечение получается при соединении точек P, Q и M , так как по построению получаем:

$MM_1 \perp (ABC)$, $MM_1 \perp CN$, $PQ \perp CN$, а значит по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(MPQ) \perp CN$

Вычислим площадь сечения:

$$\begin{aligned} S_{MPQ} &= \frac{1}{2} MM_1 \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} SO\right) \cdot PQ, \\ SO^2 &= SA^2 - AO^2 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow SO = \sqrt{2}, \\ PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 = \frac{9}{16} + \frac{9}{4} = \frac{45}{16} \Rightarrow PQ = \frac{3\sqrt{5}}{4}, \\ S_{MPQ} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{16} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{16}$

**Задача 6.**

С наклонной плоскости высотой 5 метров без трения соскальзывает груз массой 15 кг. Внизу на горизонтальной поверхности стоит тележка массой 50 кг. Плоскость образует с горизонтом угол 30° . Какую скорость приобретет тележка, если в нее соскользнет груз?

Дано:	СИ	Решение:
$h=5 \text{ м}$		1. Скорость груза в конце соскальзывания:
$m=15 \text{ кг}$		m -масса груза, M -масса тележки.
$M=50 \text{ кг}$		$mgh = \frac{mv^2}{2} \quad v = \sqrt{2gh}$
$\alpha = 30^\circ$		2. Используем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось.
$u=?$		$m\sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha = (m + M)u$
		$u = \frac{m\sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha}{(m + M)} = \frac{15\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 5}}{(15 + 50)} \cdot 0,866 = 1,98 \text{ м/с}$
		Ответ: $u=1,98 \text{ м/с}$



Задача 7.

Три одинаковых точечных заряда q находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Найти величину напряженности электрического поля E в точке, находящейся на

расстоянии $\frac{3}{4}a$ от каждого из зарядов.

Дано:

 q a $x = \frac{3}{4}a$ $E = ?$

СИ

Решение:

1. Указанная точка – вершина тетраэдра. Исходя из симметрии поставленной задачи и принципа суперпозиции, результирующий вектор напряженности электрического поля E будет направлен вдоль вертикальной прямой, проведенной через вершину тетраэдра и центр его основания.

2. Необходимо определить косинус угла между векторами напряженностей полей, созданных каждым из зарядов, и указанной вертикальной прямой.

3. Расстояние от каждого из зарядов до центра основания тетраэдра (примем его за L) будет равно:

$$L = \frac{a}{2 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Тогда синус интересующего нас угла $\frac{L \cdot 4}{3 \cdot a}$ будет равен:

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot 4}{\sqrt{3} \cdot a \cdot 3} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{11}{27}} = \frac{\sqrt{11}}{3 \cdot \sqrt{3}}$$

и, соответственно,

Тогда напряженность электрического поля в заданной точке будет равна:

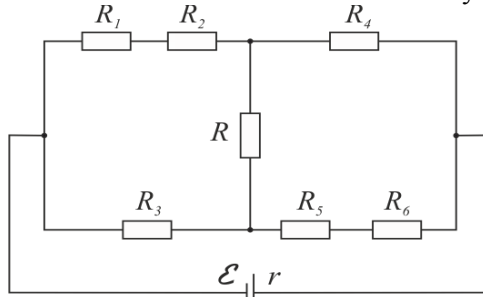
$$E = 3 \cdot k \cdot \frac{q \cdot 16}{9 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{27}} = 3 \cdot \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot \sqrt{11}}{9 \cdot 3\sqrt{3}} \cdot \frac{q}{a^2} = 3,06 \cdot 10^{10} \cdot \frac{q}{a^2} \text{ В/м.}$$

Ответ: $E = 3,06 \cdot 10^{10} \cdot \frac{q}{a^2} \text{ В/м.}$



Задача 8.

На представленном рисунке приведена электрическая схема сопротивления резисторов: $R_1=2$ Ом, $R_2=3$ Ом, $R_3=10$ Ом, $R_4=7$ Ом, $R_5=10$ Ом, $R_6=4$ Ом. Сопротивление $R=2$ Ом. ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 60$ В, внутреннее сопротивление источника $r=4$ Ом. Найти силу тока в цепи.



Дано:

$$R_1=2 \text{ Ом}$$

$$R_2=3 \text{ Ом}$$

$$R_3=10 \text{ Ом}$$

$$R_4=7 \text{ Ом}$$

$$R_5=10 \text{ Ом}$$

$$R_6=4 \text{ Ом}$$

$$R=2 \text{ Ом}$$

$$\mathcal{E}=60 \text{ В}$$

$$r=4 \text{ Ом}$$

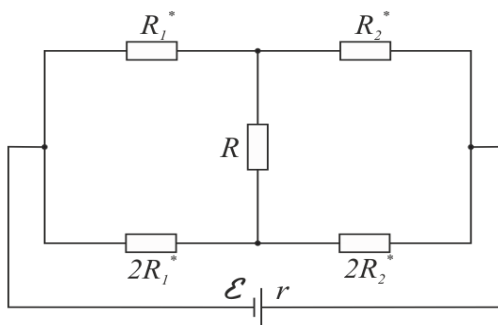
$$I=?$$

СИ

Решение:

1. Упростим схему, заменив последовательно соединенные сопротивления (R_1, R_2) и (R_5, R_6) на эквивалентные. $R_1 + R_2 = 5 \text{ Ом} = R^*$, а $R_5 + R_6 = 14 \text{ Ом} = R^{**}$.

2. Оказалось, что сопротивления в верхней и нижней ветвях цепи пропорциональны друг другу. Действительно, $R_3 = 2R^*$, а $R^{**} = 2R_4$. Для простоты расчетов можно предложить следующую эквивалентную схему:



В этой схеме $R_1^* = 5 \text{ Ом}$, $R_2^* = 7 \text{ Ом}$.

3. Очевидно, что мы имеем дело со сбалансированным мостом Уитстона. Это значит, что ток через сопротивление R не потечет и его можно из схемы исключить.

4. Полное сопротивление внешней цепи будет равно:

$$R_{\text{вн.цепи}} = \frac{2}{3}(R_1^* + R_2^*) = 8 \text{ Ом.}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{вн.цепи}} + r} = \frac{60}{8 + 4} = 5 \text{ А.}$$

5. Сила тока в цепи:

Ответ: $I=5 \text{ А}$

**Задача 9.**

Альфа-частица и антипротон (гипотетическая частица с массой, равной массе протона, и противоположным по знаку зарядом $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$) движутся по прямой в скрещенных

$$E = 1000 \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

электрическом и магнитном полях. Напряженность электрического поля $E = 1000 \frac{\text{В}}{\text{м}}$, напряженность магнитного поля $H = 0,20 \text{ А/м}$. Затем частицы влетают под прямым углом в область однородного магнитного поля с индукцией $B_1 = 100 \text{ мТл}$. На каком расстоянии друг от друга окажутся частицы, пройдя четверть окружности?

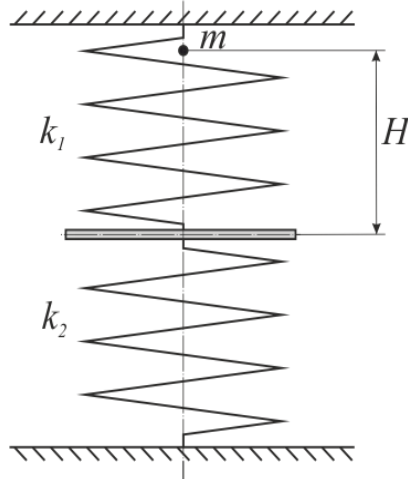
Дано:	СИ	Решение:
$q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$		1. Движение по прямой в скрещенных электрическом и магнитном полях означает, что электрическая и магнитные силы равны.
$E = 1000 \text{ В/м}$		$qE = qvB$, и можно определить скорость движения частиц
$H = 0,20 \text{ А/м}$		$v = \frac{E}{B}$.
$B = 100 \text{ мТл}$	$= 0,1 \text{ Тл}$	2. В однородном магнитном поле частицы будут двигаться по окружности. Пройдя четверть окружности, каждая из частиц отклонится от точки входа на расстояние равное радиусу окружности. Отклоняться в магнитном поле частицы будут в противоположных направлениях.
$\Delta x = ?$		$m \frac{v^2}{R} = qvB_1, \quad R = \frac{mv^2}{qvB_1} = \frac{mv}{qB_1} = \frac{mE}{qB_1 B}$ $\Delta x = R_{-p} + R_{\alpha} = \frac{E}{B_1 B} \left(\frac{m_{-p}}{q_{-p}} + \frac{m_{\alpha}}{q_{\alpha}} \right) = \frac{1000}{0,20 \cdot 100 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{1,6 \cdot 10^{-19}} + \frac{6,64 \cdot 10^{-27}}{3,2 \cdot 10^{-19}} \right)$

Ответ: $\Delta x = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ м}$



Задача 10.

Между двумя пружинами жесткостью k_1 и k_2 закреплена абсолютно невесомая площадка (см. рис.). На эту площадку с высоты H относительно площадки падает шарик массой m и прилипает к ней. Найдите уравнение гармонического колебания этой системы. Отсчет времени начать с момента прохождения положения равновесия. Массами пружин и площадки пренебречь.



Дано:

 k_1 k_2 H m $x=?$

СИ

Решение:

1. Если площадка находится между пружинами, то жесткость k такой системы будет определяться суммой жесткостей двух пружин. $k_{\text{сист}} = k_1 + k_2$.

2. Представленная система, по сути, представляет собой пружинный маятник, частота колебаний которого ω

определяется соотношением $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Под массой следует понимать массу шарика, поскольку в условии сказано, что массами площадки и пружин следует пренебречь.

3. Необходимо найти амплитуду колебаний системы.

Хотя удар шарика о площадку неупругий, можно воспользоваться законом сохранения полной механической энергии, т. к. в условии сказано, что площадка практически невесома. Действительно, в этом случае скорость площадки с шариком непосредственно после удара практически равна скорости шарика в момент соударения с площадкой, поэтому кинетическая энергия площадки с шариком после удара тоже практически равна кинетической энергии шарика непосредственно перед ударом.

Обозначим максимальное отклонение площадки вниз в результате удара за x . Скорость площадки с шариком в этом положении равна нулю (потенциальная энергия шарика $mg(H+x)$ полностью переходит в потенциальную энергию деформированной пружины:



$$\frac{(k_1 + k_2)x^2}{2}, \text{ т.е.}$$

$$mg(H+x) = \frac{(k_1 + k_2)x^2}{2}$$

Отсюда получаем два решения:

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k_1 + k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k_1 + k_2}\right)^2 + \frac{2mgH}{k_1 + k_2}}$$

Среднее арифметическое значение величин x_1 и x_2 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{mg}{k}$ соответствует новому установившемуся положению равновесия (когда шарик лежит на площадке), а координаты x_1 и x_2 соответствуют верхнему и нижнему крайним положениям площадки при колебаниях. Очевидно

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k_1 + k_2} \pm A, \quad \text{тогда} \quad A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k_1 + k_2}\right)^2 + \frac{2mgH}{k_1 + k_2}}$$

Окончательный ответ:

$$x = \sqrt{\left(\frac{mg}{k_1 + k_2}\right)^2 + \frac{2mgH}{k_1 + k_2}} \sin \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} t$$



ВАРИАНТ № 2

Задача 1. (5 баллов)

Миша и Маша играют в игру: независимо друг от друга, одновременно, пишут на бумаге любое натуральное число из некоторого диапазона и показывают друг другу: Миша - число $a: 0 < a \leq 125$, Маша число $b: 0 < b \leq 115$. Побеждает тот, кто написал большее число. Какова вероятность, что победит Миша?

Решение:

Всех возможных исходов - $125 \cdot 115 = 14375$. Маша победит в том случае, если $b > a$. Число исходов, благоприятствующих этому событию равно

$$1 + 2 + 3 + \dots + 114 = \frac{1+114}{2} \cdot 114 = 6555.$$

Тогда искомая вероятность $P = 1 - \frac{6555}{14375} = 1 - 0,456 = 0,544$.

Или: если $a: 0 < a \leq m$, $b: 0 < b \leq n$, то искомая вероятность равна:

$$P = 1 - \frac{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}{m \cdot n} = 1 - \frac{n-1}{2m} = 1 - \frac{115-1}{2 \cdot 125} = 1 - \frac{114}{250} = 1 - \frac{57}{125} = \frac{68}{125} = 0.544$$

Ответ: 0,544

Задача 2. (8 баллов) Найти наименьшее значение функции $f(x) = \left(1 + \frac{24}{x}\right)^{2024} + \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{2024}$.

Решение:

Дважды применим неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{24}{x}\right)^{2024} + \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{2024} &\geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{24}{x}\right)^{2024} \cdot \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{2024}} = 2 \sqrt{\left(1 + \frac{24}{x} + \frac{x}{24} + 1\right)^{2024}} = \\ &2 \sqrt{\left(2 + \frac{24}{x} + \frac{x}{24}\right)^{2024}} \geq 2 \sqrt{\left(2 + 2 \sqrt{\frac{24}{x} \cdot \frac{x}{24}}\right)^{2024}} = 2 \sqrt{(2+2)^{2024}} = 2^{2025} \end{aligned}$$

Ответ: 2^{2025}

Задача 3. (10 баллов) Числовая последовательность задана условием:

$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - (a_n)^2}}$. Доказать, что при неограниченно большом $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1.46$$

Решение:

Так как $-1 \leq a_n \leq 1$, то положим $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$, $a_n = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ последовательность a_n - убывающая и $0 < \sin \alpha < 1$.

$$\text{Тогда } a_n = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \sqrt{1 - |\cos \alpha|} = \sqrt{1 - \cos \alpha} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8}, \quad a_3 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^5}, \dots, a_n = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}.$$



Так как при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin \alpha < \alpha$, то

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3} + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^5} + \dots + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} < \\ &< \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^3} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^5} + \dots + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^3} \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-2}}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi \cdot 4}{2^3 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{6} = \sqrt{2} \left(\frac{3 + \pi}{6}\right) < 1.46 \end{aligned}$$

Задача 4. (12 баллов)

Через лес проходит две параллельные просеки, на каждой из которых пробурены по две скважины так, что соединив эти скважины прямыми линиями мы получим трапецию площади $\frac{9}{2}$. Сумма расстояний между скважинами, расположенными на концах диагоналей этой трапеции, равна 6. Найти расстояние между двумя параллельными просеками.

Решение:

Пусть скважины расположены в вершинах трапеции $ABCO$. Рассмотрим трапецию $ODEF$, полученную сдвигом исходной трапеции $ABCO$ вправо (рис. 1).

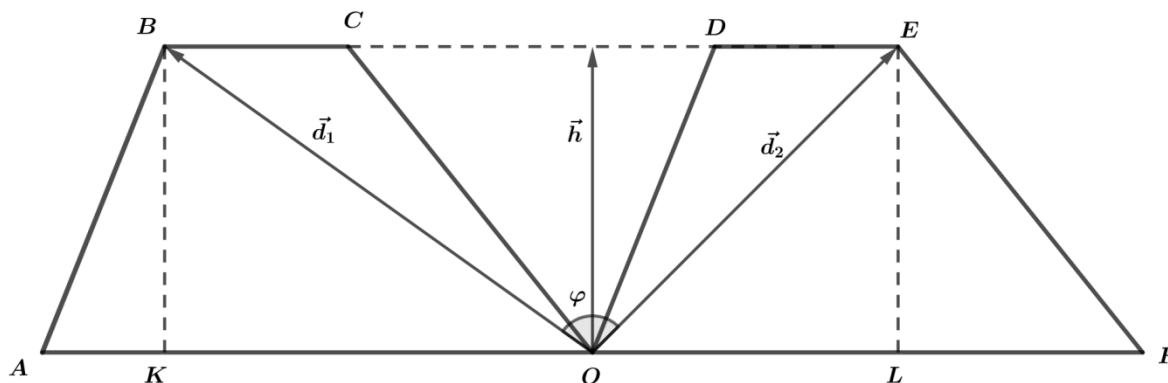


Рис.1.

Площадь прямоугольника $KBEL$ равна удвоенной площади исходной трапеции $ABCO$.

Так как $S_{ABCO} = \frac{1}{2} |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi$, то $S_{KBEL} = 2 \cdot S_{ABCO} = |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 9$.

По условию $|\vec{d}_1| + |\vec{d}_2| = 6$, тогда $|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = (6 - |\vec{d}_2|) \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 9$.

Обозначим $|\vec{d}_2| = x$, тогда получим:

$$(6 - x) \cdot x \sin \varphi = 9 \Leftrightarrow 6x \sin \varphi - x^2 \sin \varphi - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 \sin \varphi - 6x \sin \varphi + 9 = 0.$$

Решим уравнение $x^2 \sin \varphi - 6x \sin \varphi + 9 = 0$:

$D = 36 \sin^2 \varphi - 36 \sin \varphi = 36 \sin \varphi (\sin \varphi - 1)$. Так как $D < 0$ при всех $0 < \varphi < \pi$, то

уравнение $x^2 \sin \varphi - 6x \sin \varphi + 9 = 0$ имеет смысл при $D = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда $x = \frac{6}{2} = 3$, то есть $|\vec{d}_2| = 3$ и $|\vec{d}_1| = 6 - 3 = 3$.



$\triangle BOE$ - равнобедренный и искомая высота $|\vec{h}|$ - это и его медиана, а значит $|\vec{h}| = \frac{1}{2}|\vec{d}_1 + \vec{d}_2|$ и

$$|\vec{h}| = \sqrt{\vec{h} \cdot \vec{h}} = \sqrt{\frac{1}{4}(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 + \vec{d}_2)} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 + 2\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{18} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Задача 5. (15 баллов)

Кристалл имеет форму правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой имеют длину 4. Точки M и N - середины ребер AS и AB соответственно. С помощью лазера кристалл рассекают на две части, одна из которых – треугольная пирамида. Луч лазера проходит через точку M перпендикулярно прямой CN . Найти площадь основания полученной треугольной пирамиды с вершиной в точке A . Решение:

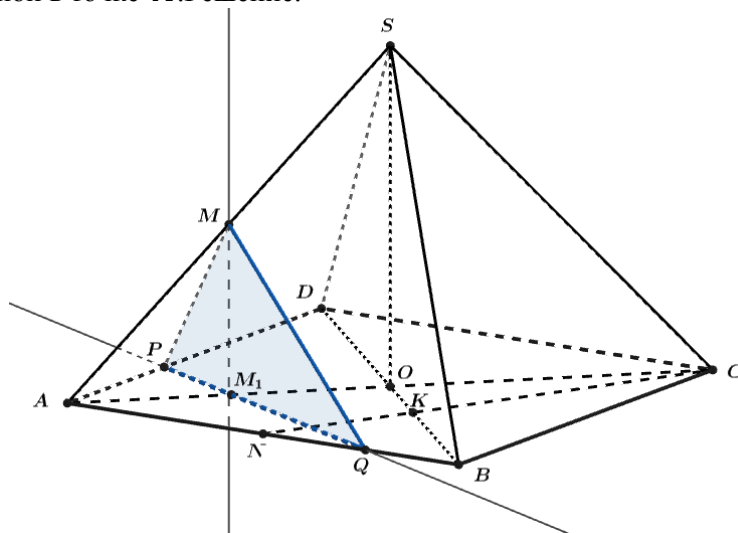


Рис.1.

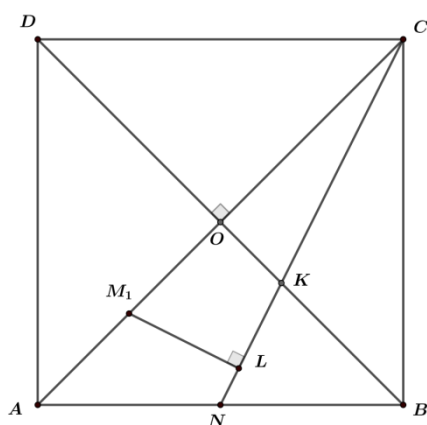


Рис.2.

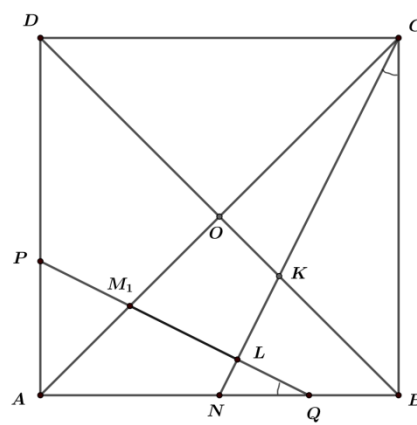


Рис.3.

Пусть α - секущая плоскость лазерного луча. По условию, $\alpha \perp CN$, тогда для построения сечения (рис.1) необходимо:

- 1) провести высоту SO ,
- 2) через точку M провести прямую l , параллельную SO так, что $l \cap AC = M_1$. Тогда MM_1 - перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC
- 3) Проведём из точки M_1 перпендикуляр к прямой CN - он пересекает CN в точке L , сторону AD - в точке P , сторону AB - в точке Q

Важно отметить точное положение точки L и показать, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB .



Рассмотрим рис.2:

1) По теореме Пифагора $CN^2 = BC^2 + BN^2 = 16 + 4 = 20$, тогда $CN = 2\sqrt{5}$

2) $K = CN \cap BD$ и K - точка пересечения медиан треугольника ABC , поэтому

$$CK = \frac{2}{3} CN = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

3) M_1 - середина OA (так как M - середина AS , $MM_1 \parallel SO$). Тогда $CM_1 = \frac{3}{4} AC = 3\sqrt{2}$

4) Из подобия треугольников CLM_1 и COK : $CL = \frac{CM_1}{CK} \cdot OC = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{4\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{9}{\sqrt{5}}$, т.е.

$$\frac{CL}{CN} = \frac{9}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{9}{10} \text{ и положение точки } L \text{ определено.}$$

Для доказательства того, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB , рассмотрим

1) подобные треугольники LNQ и BNC (рис.3):

$$NQ = \frac{LN \cdot CN}{NB} = \frac{\frac{1}{10} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 1, \quad NQ < NB, \text{ значит } Q \in AB.$$

2) подобные треугольники APQ и BNC :

$$AP = \frac{AQ \cdot NB}{BC} = \frac{(AN + NQ) \cdot NB}{BC} = \frac{(2+1) \cdot 2}{4} = \frac{3}{2}, \text{ значит } P \in AD.$$

Искомое сечение получается при соединении точек P, Q и M , так как по построению получаем:

$MM_1 \perp (ABC)$, $MM_1 \perp CN$, $PQ \perp CN$, а значит по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(MPQ) \perp CN$

Вычислим площадь сечения:

$$S_{MPQ} = \frac{1}{2} MM_1 \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} SO \right) \cdot PQ,$$

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 16 - 8 = 8 \Rightarrow SO = 2\sqrt{2},$$

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4} \Rightarrow PQ = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$S_{MPQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

**Задача 6.**

Два протона, находящиеся далеко друг от друга, движутся навстречу друг другу вдоль прямой с одинаковыми по величине скоростями в 1000 км/с. На какое наименьшее расстояние они сблизятся? Ответ округлите до сотых.

Дано:	СИ	Решение:
$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$		При сближении частиц, их скорости уменьшаются в результате кулоновского отталкивания.
$v = 1000 \text{ км/с}$	$= 10^6 \text{ м/с}$	В какой-то момент протоны остановятся, а затем начнут удаляться друг от друга.
$r = ?$		

Минимальное расстояние будет достигаться в момент остановки протона. К этому моменту вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную энергию кулоновского отталкивания.

$$2 \frac{mv^2}{2} = k \frac{e^2}{r}$$

$$r = \frac{ke^2}{mv^2}$$

$$r = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (10^6)^2} = 13,80 \cdot 10^{-14} \text{ м}$$

Ответ: $r = 13,80 \cdot 10^{-14} \text{ м}$

**Задача 7.**

Сплошной горизонтальный стержень длиной 10 дм изготовлен из двух материалов. Четвертая часть его изготовлена из латуни массой 2,5 кг, остальная из олова массой 4,5 кг. Найти положение центра тяжести относительно его латунного конца. Ответ округлите до сотых долей.

Дано:

$$m_1 = 2,5 \text{ кг}$$

$$m_2 = 4,5 \text{ кг}$$

$$l = 10 \text{ дм}$$

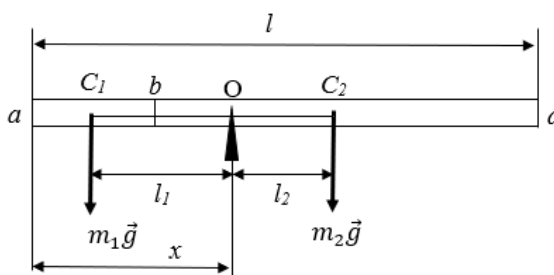
$$x = ?$$

СИ

$$= 1 \text{ м}$$

Решение:

Выполним чертёж



Обозначим концы стержня буквами a и d . Латунная часть ab , оловянная bd . Центры масс каждой части C_1 и C_2 .

К центрам масс каждой части приложим соответствующие силы тяжести m_1g и m_2g .

Чтобы стержень оставался в равновесии, моменты M_1 и M_2 этих сил должны быть равны друг другу:

$$M_1 = M_2$$

$$\text{где, } M_1 = m_1gl_1 \text{ и } M_2 = m_2gl_2$$

$$m_1gl_1 = m_2gl_2, \quad m_1l_1 = m_2l_2$$

Найдем плечи сил тяжести. Из рисунка видно, что

$$l_1 = x - \frac{l}{8}, \text{ а отрезок } OC_2 \text{ будет равен разности } aC_2 \text{ и } x.$$

$$l_2 = \frac{l}{4} + \frac{3l}{4 \cdot 2} - x = \frac{5l}{8} - x$$

Подставим значение l_1 и l_2 в уравнение моментов.

$$m_1\left(x - \frac{l}{8}\right) = m_2\left(\frac{5l}{8} - x\right), \quad m_1x - m_1\frac{l}{8} = m_2\frac{5l}{8} - m_2x$$

$$x(m_1 + m_2) = \frac{l}{8}(m_1 + 5m_2)$$

$$x = \frac{l(m_1 + 5m_2)}{8(m_1 + m_2)}$$

Произведем численную подстановку

$$x = \frac{1 \cdot (2,5 + 5 \cdot 4,5)}{8 \cdot (2,5 + 4,5)} \approx 0,45 \text{ м}$$

Ответ: $x = 0,45 \text{ м}$

**Задача 8.**

Между обкладками плоского конденсатора находится стеклянная пластина с диэлектрической проницаемостью 8. Емкость конденсатора 12 мкФ, напряжение на обкладках 1,5 кВ. Какую работу нужно совершить, чтобы вынуть пластинку из конденсатора, не отключая его от источника напряжения?

Дано:	СИ	Решение:
$\varepsilon_1=8$		Работу можно определить через разность энергий конденсатора после и до вынимания пластинки:
$C_1=12 \text{ мкФ}$	$= 12 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$	$A=W_2-W_1$
$U=1,5 \text{ кВ}$	$= 1500 \text{ В}$	Поскольку конденсатор не отключали от источника, напряжение на его обкладках сохранялось.
$\varepsilon_2=1$		Поэтому энергия:
$A=?$		

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}, \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{C_2 U^2}{2},$$

емкости конденсатора:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{d}, \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{d},$$

Нам известна емкость C_1 , а емкость C_2 не дана. Выразим её через C_1 и диэлектрическую проницаемости:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S d}{d \varepsilon_2 \varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$C_2 = C_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Подставим значение емкости в уравнение энергии:

$$W_2 = \frac{C_1 \varepsilon_2 U^2}{2 \varepsilon_1}$$

Выразим работу:

$$A = \frac{C_1 \varepsilon_2 U^2}{2 \varepsilon_1} - \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{C_1 U^2}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

Произведем численную подстановку:

$$A = \frac{12 \cdot 10^{-6} (1500)^2}{2} (8 - 1) = 94,5 \text{ Дж}$$

Ответ: $A=94,5 \text{ Дж}$

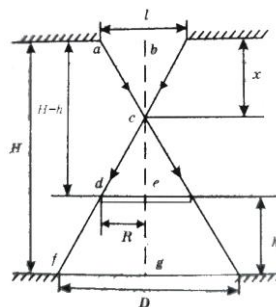
**Задача 9.**

Люминесцентная лампа длиной 70 см прикреплена к потолку комнаты высотой 2,7 м. На высоте 120 см от пола располагается непрозрачный горизонтальный диск радиусом 60 см. Центр лампы и диска лежат на одной вертикали. Определить диаметр тени от диска на полу. Ответ дать с точностью до сотых метра.

Дано:	СИ
$H=2,7$ м	
$l=70$ см	$=0,7$ м
$h=120$ см	$=1,2$ м
$R=60$ см	$=0,6$ м
$D=?$	

Решение:

Выполним чертеж.



Рассмотрим подобные треугольники, и из подобия треугольников abc и cfd следует пропорциональность их сторон:

$$\frac{0,5 D}{0,5 l} = \frac{H - x}{x}$$

$$D = l \frac{H-x}{x} = l \left(\frac{H}{x} - 1 \right)$$

отрезок x найдем из подобия треугольников abc и cde :

$$\frac{R}{0,5 l} = \frac{H - h - x}{x}$$

$$\frac{2R}{l} = \frac{H - h}{x} - 1$$

Откуда:

$$\frac{H - h}{x} = 1 + \frac{2R}{l} = \frac{l + 2R}{l}$$

$$x = \frac{l(H - h)}{l + 2R}$$

Подставим в уравнение для D :

$$D = l \left(\frac{H(l + 2R)}{l(H - h)} - 1 \right) = \frac{H(l + 2R)}{H - h} - l$$

Произведем численную подстановку:

$$D = \frac{2,7(0,7+2 \cdot 0,6)}{2,7-1,2} - 0,7 = 2,72 \text{ м}$$

Ответ: $D=2,72$ м

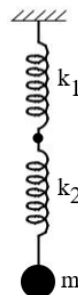
**Задача 10.**

Колебательная система состоит из двух последовательно соединенных пружин с коэффициентами жесткости $k_1=900$ Н/м, $k_2=700$ Н/м, и прикрепленного к ним груза массой $m=300$ г. Найти частоту малых колебаний груза. Трением пренебречь. Ответ округлить до десятых.

Дано:	СИ
$k_1=900$ Н/м	
$k_2=700$ Н/м	
$m=300$ г	$=0,3$ кг
$\nu=?$	

Решение:

Выполним чертеж.



Потенциальная энергия упругой деформации первой пружины будет равна:

$$W_{p1} = \frac{k_1 A_1^2}{2}$$

Второй пружины:

$$W_{p2} = \frac{k_2 A_2^2}{2}$$

По закону сохранения механической энергии потенциальная энергия упругой деформации обеих пружин превратится в кинетическую энергию колеблющегося тела:

$$W_k = \frac{mv_m^2}{2}$$

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{k_1 A_1^2}{2} + \frac{k_2 A_2^2}{2}$$

Максимальная скорость будет равна:

$$v_m = \omega A$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$v_m = 2\pi\nu A$$

Амплитуда колебаний будет равна сумме их деформаций:

$$A = A_1 + A_2$$



$$v_m = 2\pi\nu(A_1 + A_2)$$

Тогда уравнение для энергий примет вид:

$$\frac{m(2\pi\nu(A_1 + A_2))^2}{2} = \frac{k_1 A_1^2}{2} + \frac{k_2 A_2^2}{2}$$

$$m(2\pi\nu(A_1 + A_2))^2 = k_1 A_1^2 + k_2 A_2^2$$

Определим амплитуды колебаний через закон Гука:

$$F_{\text{уп}1} = -k_1 A_1$$

$$F_{\text{уп}2} = -k_2 A_2$$

$$F_{\text{уп}1} = F_{\text{уп}2}$$

тогда

$$A_2 = A_1 \frac{k_1}{k_2}$$

Подставим амплитуду в уравнение для энергий

$$m(2\pi\nu \left(A_1 + A_1 \frac{k_1}{k_2} \right))^2 = k_1 A_1^2 + k_2 \left(A_1 \frac{k_1}{k_2} \right)^2$$

$$m(2\pi\nu)^2 \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_2^2} = \frac{k_1 k_2 (k_1 + k_2)}{k_2^2}$$

Откуда

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

Произведем численную подстановку:

$$\nu = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{900 \cdot 700}{0,3(900 + 700)}} = 5,8 \text{ Гц}$$

Ответ: $\nu = 5,8 \text{ Гц}$



ВАРИАНТ № 3

Задача 1. (5 баллов) Миша и Маша играют в игру: независимо друг от друга, одновременно, пишут на бумаге любое натуральное число из некоторого диапазона и показывают друг другу: Миша - число $a: 0 < a \leq 125$, Маша число $b: 0 < b \leq 118$. Побеждает тот, кто написал большее число. Какова вероятность, что победит Миша?

Решение:

Всех возможных исходов - $125 \cdot 118 = 14750$. Маша победит в том случае, если $b > a$.

Число исходов, благоприятствующих этому событию равно $1 + 2 + 3 + \dots + 117 = \frac{1+117}{2} \cdot 117 = 6903$.

Тогда искомая вероятность $P = 1 - \frac{6903}{14750} = 1 - 0.468 = 0.532$

Или: если $a: 0 < a \leq m$, $b: 0 < b \leq n$, то искомая вероятность равна:

$$P = 1 - \frac{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}{m \cdot n} = 1 - \frac{n-1}{2m} = 1 - \frac{118-1}{2 \cdot 125} = 1 - \frac{117}{250} = \frac{133}{250} = 0.532$$

Ответ: 0,532

Задача 2. (8 баллов). Найти наименьшее значение функции $f(x) = \left(1 + \frac{25}{x}\right)^{-2025} + \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{-2025}$.

Решение:

Дважды применим неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{25}{x}\right)^{-2025} + \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{-2025} &\geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{25}{x}\right)^{-2025} \cdot \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{-2025}} = 2 \sqrt{\left(1 + \frac{25}{x} + \frac{x}{25} + 1\right)^{-2025}} = \\ &= 2 \sqrt{\left(2 + \frac{25}{x} + \frac{x}{25}\right)^{-2025}} \geq 2 \sqrt{\left(2 + 2 \sqrt{\frac{25}{x} \cdot \frac{x}{25}}\right)^{-2025}} = 2 \sqrt{(2+2)^{-2025}} = 2^{-2024} \end{aligned}$$

Ответ: 2^{-2024}

Задача 3. (10 баллов)

Числовая последовательность задана условием:

$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - (a_n)^2}}$. Доказать, что при неограниченно большом $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2.35$$

Решение:

Так как $-1 \leq a_n \leq 1$, то положим $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, $a_n = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ последовательность a_n - убывающая и $0 < \sin \alpha < 1$.

$$\text{Тогда } a_n = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \sqrt{1 - |\cos \alpha|} = \sqrt{1 - \cos \alpha} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot 3}, \quad a_3 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2 \cdot 3}, \dots, a_n = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3}.$$

Так как при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin \alpha < \alpha$, то



$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sin \frac{\pi}{3} + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot 3} + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} < \\
&< \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot 3} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot 3} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\pi}{6} < 2,35
\end{aligned}$$

Задача 4. (12 баллов)

Через лес проходит две параллельные просеки, на каждой из которых пробурены по две скважины так, что соединив эти скважины прямыми линиями мы получим трапецию площади 8. Сумма расстояний между скважинами, расположенными на концах диагоналей этой трапеции, равна 8. Найти расстояние между двумя параллельными просеками.

Решение:

Пусть скважины расположены в вершинах трапеции $ABCO$. Рассмотрим трапецию $ODEF$, полученную сдвигом исходной трапеции $ABCO$ вправо (рис. 1).

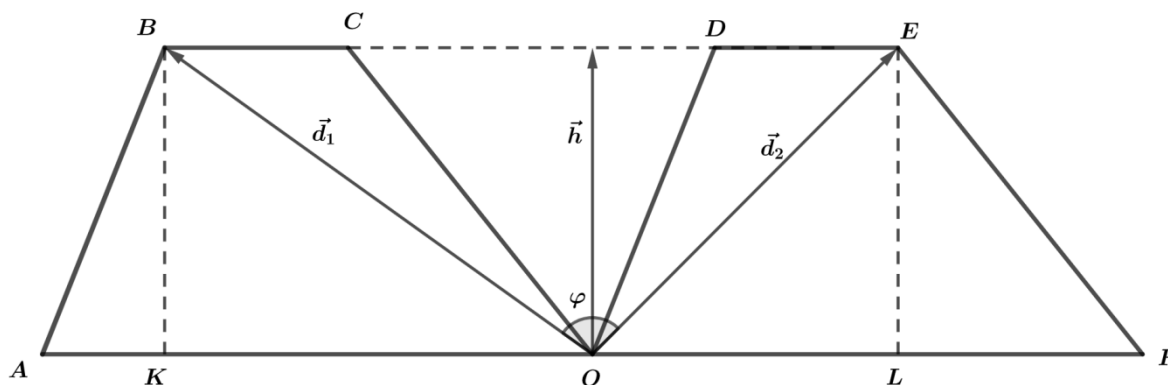


Рис.1.

Площадь прямоугольника $KBEL$ равна удвоенной площади исходной трапеции $ABCO$.

Так как $S_{ABCO} = \frac{1}{2} |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi$, то $S_{KBEL} = 2 \cdot S_{ABCO} = |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 16$.

По условию $|\vec{d}_1| + |\vec{d}_2| = 8$, тогда $|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = (8 - |\vec{d}_2|) \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 16$.

Обозначим $|\vec{d}_2| = x$, тогда получим:

$$(8 - x) \cdot x \sin \varphi = 16 \Leftrightarrow 8x \sin \varphi - x^2 \sin \varphi - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 \sin \varphi - 8x \sin \varphi + 16 = 0.$$

Решим уравнение $x^2 \sin \varphi - 8x \sin \varphi + 16 = 0$:

$D = 64 \sin^2 \varphi - 64 \sin \varphi = 64 \sin \varphi (\sin \varphi - 1)$. Так как $D < 0$ при всех $0 < \varphi < \pi$, то

уравнение $x^2 \sin \varphi - 8x \sin \varphi + 16 = 0$ имеет смысл при $D = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда $x = \frac{8}{2} = 4$, то есть $|\vec{d}_2| = 4$ и $|\vec{d}_1| = 8 - 4 = 4$.

Тогда $\triangle BOE$ - равнобедренный и искомая высота $|\vec{h}|$ - это и его медиана, а значит $|\vec{h}| = \frac{1}{2} |\vec{d}_1 + \vec{d}_2|$

$$\text{и } |\vec{h}| = \sqrt{\vec{h} \cdot \vec{h}} = \sqrt{\frac{1}{4} (\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 + \vec{d}_2)} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 + 2\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{32} = 2\sqrt{2}$$



Ответ: $2\sqrt{2}$

Задача 5. (15 баллов)

Кристалл имеет форму правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой имеют длину 6. Точки M и N - середины ребер AS и AB соответственно. С помощью лазера кристалл рассекают на две части, одна из которых – треугольная пирамида. Луч лазера проходит через точку M перпендикулярно прямой CN . Найти площадь основания полученной треугольной пирамиды с вершиной в точке A .

Решение:

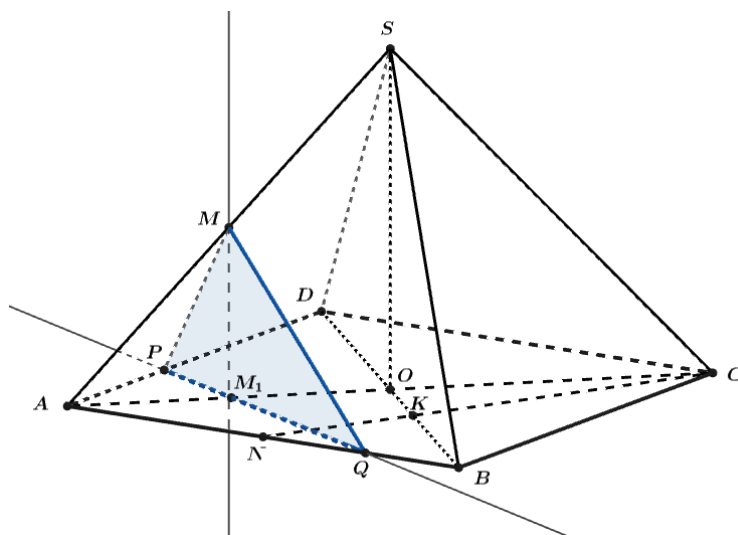


Рис.1.

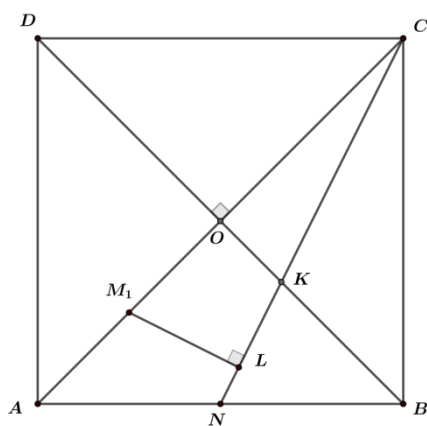


Рис.2.

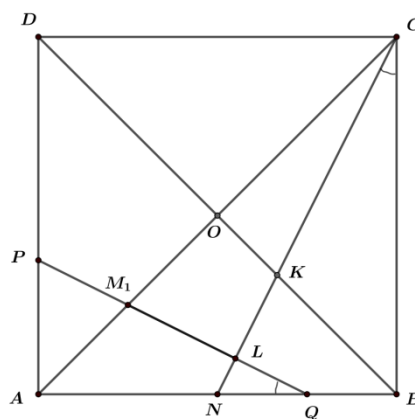


Рис.3.

Пусть α - секущая плоскость лазерного луча. По условию, $\alpha \perp CN$, тогда для построения сечения (рис.1) необходимо:

- 1) провести высоту SO ,
- 2) через точку M провести прямую l , параллельную SO так, что $l \cap AC = M_1$. Тогда MM_1 - перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC
- 3) Проведём из точки M_1 перпендикуляр к прямой CN - он пересекает CN в точке L , сторону AD - в точке P , сторону AB - в точке Q

Важно отметить точное положение точки L и показать, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB .

Рассмотрим рис.2:

- 1) По теореме Пифагора $CN^2 = BC^2 + BN^2 = 36 + 9 = 45$, тогда $CN = 3\sqrt{5}$



2) $K = CN \cap BD$ и K - точка пересечения медиан треугольника ABC , поэтому $CK = \frac{2}{3}CN = 2\sqrt{5}$

3) M_1 - середина OA (так как M - середина AS , $MM_1 \parallel SO$). Тогда $CM_1 = \frac{3}{4}AC = \frac{3 \cdot 6\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

4) Из подобия треугольников CLM_1 и COK : $CL = \frac{CM_1}{CK} \cdot OC = \frac{27\sqrt{5}}{10}$, т.е. $\frac{CL}{CN} = \frac{9}{10}$ и положение точки L определено.

Для доказательства того, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB , рассмотрим

1) подобные треугольники LNQ и BNC (рис.3):

$$NQ = \frac{LN \cdot CN}{NB} = \frac{\frac{1}{10} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}}{3} = \frac{3}{2}, \quad NQ < NB, \text{ значит } Q \in AB.$$

2) подобные треугольники APQ и BNC :

$$AP = \frac{AQ \cdot NB}{BC} = \frac{(AN + NQ) \cdot NB}{BC} = \frac{\left(3 + \frac{3}{2}\right) \cdot 3}{6} = \frac{9}{4}, \text{ значит } P \in AD.$$

Искомое сечение получается при соединении точек P, Q и M , так как по построению получаем:

$MM_1 \perp (ABC)$, $MM_1 \perp CN$, $PQ \perp CN$, а значит по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(MPQ) \perp CN$

Вычислим площадь сечения:

$$\begin{aligned} S_{MPQ} &= \frac{1}{2} MM_1 \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} SO\right) \cdot PQ, \\ SO^2 &= SA^2 - AO^2 = 36 - 18 = 18 \Rightarrow SO = 3\sqrt{2}, \\ PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 = \frac{81}{16} + \frac{81}{4} = \frac{81 \cdot 5}{16} \Rightarrow PQ = \frac{9\sqrt{5}}{4}, \\ S_{MPQ} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2}\right) \cdot \frac{9\sqrt{5}}{4} = \frac{27\sqrt{10}}{16} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{10}}{16}$

**Задача 6.**

На дифракционную решетку, период которой d равен 6 микрометров, нормально падает излучение с длинами волн $\lambda_1=600$ нанометров и $\lambda_2=660$ нанометров. Возможно ли перекрытие дифракционных спектров для этих длин волн?

Дано:	СИ
$d=6\text{мкм}$	$6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$
$\lambda_1=600 \text{ нм}$	$600 \cdot 10^{-9} \text{ м}$
$\lambda_2=660 \text{ нм}$	$660 \cdot 10^{-9} \text{ м}$

Решение:

1. Условие перекрытия дифракционных спектров m -го и $(m+1)$ -го порядков: $m\lambda_2 \geq (m+1)\lambda_1$.

$$m \geq \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{(0,66 - 0,60) \cdot 10^{-6}} = 10.$$

Это возможно при

2. Максимальный порядок спектра, который можно наблюдать при помощи данной дифракционной решетки,

$$m \leq \frac{d}{\lambda_1} = \frac{4,8}{0,6} = 8$$

определяется из условия:

3. Перекрытие дифракционных спектров невозможно.

**Задача 7.**

Четыре одинаковых заряженных шарика размещены в вершинах квадрата. Заряд каждого шарика равен 100 нКл. Сторона квадрата 10 см. Какую работу необходимо совершить, чтобы расположить заряды в вершинах тетраэдра с ребром 10 см?

Дано:	СИ	Решение:
$q=100 \text{ нКл}$	$=100 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$	1. Работу A можно определить через изменение потенциальной энергии системы зарядов. Потенциальная энергия определяется соотношением:
$a=10 \text{ см}$	$=0,1 \text{ м}$	$E_{\text{п}} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r}$
$A=?$		2. Если заряды находятся в вершинах квадрата, четыре расстояния при парном взаимодействии зарядов равны a и два равны $a\sqrt{2}$. Таким образом, потенциальная энергия при данном расположении зарядов будет равна: $E_{\text{п}} = k \frac{q^2}{a} (4 + \sqrt{2})$
		3. Если заряды размещены в вершинах тетраэдра, все расстояния будут равны a (таких расстояний будет шесть) и потенциальная энергия будет равна: $E_{\text{п}} = 6k \frac{q^2}{a}$
		4. Разность энергий $\Delta E_{\text{п}} = A = \frac{k \cdot q^2}{a} (6 - 4 - \sqrt{2}) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-18}}{1 \cdot 10^{-1}} 0,586 = 5,28 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$
		Ответ: $A=5,28 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$

**Задача 8.**

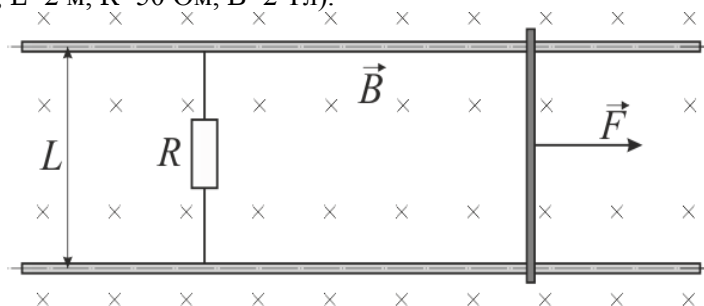
Механические маятниковые часы № 1 (в основе – математический маятник), находятся на уровне моря. Другие аналогичные часы № 2 - на высоте 4 000 метров. На сколько секунд за один час отстанут часы №2, находящиеся на указанной высоте, от часов № 1? Радиус Земли принять равным 6 400 километров.

Дано:	СИ	Решение:
$h=4000 \text{ м}$		
$R=6400 \text{ км}$	$=6400000 \text{ м}$	1. Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. С увеличением высоты g уменьшается, T увеличивается, частота колебаний маятника уменьшается. Маятник часов, находящихся на высоте, совершит меньшее число колебаний и часы “отсчитают” меньшее время. Показания часов t прямо пропорционально числу колебаний и обратно пропорционально периоду. $\frac{t}{t_0} = \frac{T_0}{T}$, где t_0 - показания часов на уровне моря, T_0 - период колебаний маятника часов на уровне моря.
$\Delta t=?$		2. Показания часов на высоте будет равно $t = t_0 \frac{T_0}{T}$.
		3. Отставание часов $\Delta t = t_0 - t = t_0 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$
		4. Известно, что $\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_0}}$ и $\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$
		5. Тогда $\Delta t = t_0 \left(\frac{h}{h+R}\right)$, поскольку h много меньше R , то $\Delta t = t_0 \left(\frac{h}{R}\right)$
		6. Тогда $\Delta t = 3600 \left(\frac{4}{6400}\right) = 2,25 \text{ с}$

Ответ: $\Delta t=2,25 \text{ с}$

**Задача 9.**

Токопроводящий стержень под действием постоянной силы F скользит по двум параллельным длинным токопроводящим шинам. Шины находятся на расстоянии L друг от друга и соединены электрическим сопротивлением R . Перпендикулярно плоскости, в которой находятся шины, создано постоянное магнитное поле с индукцией B (см. рис.). Какое количество теплоты будет выделяться на сопротивлении R за время 10 секунд, когда стержень станет двигаться с постоянной скоростью v ? Электрическим сопротивлением стержня, токопроводящих шин и силами трения пренебречь. ($F=20$ Н, $L=2$ м, $R=50$ Ом, $B=2$ Тл).



Дано:

$F=20 \text{ Н}$

$L=2 \text{ м}$

$R=50 \text{ Ом}$

$B=2 \text{ Тл}$

$Q=?$

СИ

Решение:

1. Скорость стержня станет постоянной, когда векторная сумма всех сил, действующих на стержень, станет равна нулю. Сила, действующая на стержень в противоположном направлении относительно силы F , – это сила Ампера, т.к. при движении стержня в магнитном поле в стержне (и во всей замкнутой электрической цепи) будет индуцироваться электрический ток.

$$F_A = IBL, \quad I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \quad \varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta S}{\Delta t} = BvL;$$

Таким образом, $F_A = \frac{B^2 L^2}{R} v;$

2. Из условия, что $F_A = F$ находим скорость движения

стержня $v = \frac{FR}{B^2 L^2};$

3. При постоянной скорости движения стержня работа внешней силы должна быть равна количеству теплоты, выделяющемуся в сопротивлении

$$Fvt = I^2 Rt;$$

$$4. v = \frac{20 \cdot 50}{4 \cdot 4} = 12,5 \text{ м/с.} \quad Q = 20 \cdot 12,5 \cdot 10 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\Delta t=2,25$ с

**Задача 10.**

Пять одинаково заряженных шариков находятся на одной прямой на равном расстоянии a друг от друга. Заряд каждого шарика равен q . Найдите работу, которую необходимо совершить, чтобы расположить шарики в вершинах двойной пирамиды?

Дано:	СИ	Решение:
q		1. Вычислим работу через изменение потенциальной энергии системы зарядов. Потенциальную энергию системы представим, как сумму энергий взаимодействия все пар зарядов.
a		2. При расположении зарядов в одну линию для пяти зарядов таких пар десять, а именно - $r_{1-2} = r_{2-3} = r_{3-4} = r_{4-5} = a$, $r_{1-3} = r_{2-4} = r_{3-5} = 2a$, $r_{1-4} = r_{2-5} = 3a$ и $r_{1-5} = 4a$.
$A=?$		Потенциальная энергия системы в исходном состоянии будет равна: $E_{\text{н}} = \sum_{i=1}^{10} k \frac{q^2}{r_i} = k \frac{q^2}{a} \cdot \frac{77}{12} = k \frac{q^2}{a} \cdot 6,42$ 3. При расположении зарядов в вершинах двойной пирамиды девять расстояний будут равны длине ребра a и одно расстояние будет равно $r_{1-5} = 2a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Потенциальная энергия системы в конечном состоянии будет равна: $E_{\text{н}} = \sum_{i=1}^{10} k \frac{q^2}{r_i} = k \frac{q^2}{a} \cdot \left(9 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) = k \frac{q^2}{a} \cdot 9,61$ 4. Таким образом, затраченная работа будет равна: $A = \Delta E_{\text{н}} = k \frac{q^2}{a} \cdot 3,19 = 9 \cdot 10^9 \frac{3,19 \cdot q^2}{a} = 28,7 \cdot 10^9 \frac{q^2}{a}$ Ответ: $A = 28,7 \cdot 10^9 \frac{q^2}{a}$



ВАРИАНТ № 4

Задача 1. (5 баллов) Миша и Маша играют в игру: независимо друг от друга, одновременно, пишут на бумаге любое натуральное число из некоторого диапазона и показывают друг другу: Миша - число $a: 0 < a \leq 150$, Маша число $b: 0 < b \leq 139$. Побеждает тот, кто написал большее число. Какова вероятность, что победит Миша?

Решение:

Всех возможных исходов - $150 \cdot 139 = 20850$. Маша победит в том случае, если $b > a$.

Число исходов, благоприятствующих этому событию равно $1 + 2 + 3 + \dots + 138 = \frac{1+138}{2} \cdot 138 = 9591$.

Тогда искомая вероятность $P = 1 - \frac{9591}{20850} = 1 - 0.46 = 0,54$

Или: если $a: 0 < a \leq m$, $b: 0 < b \leq n$, то искомая вероятность равна:

$$P = 1 - \frac{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}{m \cdot n} = 1 - \frac{n-1}{2m} = 1 - \frac{139-1}{2 \cdot 150} = 1 - \frac{138}{2 \cdot 150} = 1 - \frac{23}{50} = \frac{27}{50} = 0.54$$

Ответ: 0,54

Задача 2. (8 баллов) Найти наименьшее значение функции $f(x) = \left(1 + \frac{24}{x}\right)^{-2024} + \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{-2024}$.

Решение:

Дважды применим неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{24}{x}\right)^{-2024} + \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{-2024} &\geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{24}{x}\right)^{-2024} \cdot \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{-2024}} = 2 \sqrt{\left(1 + \frac{24}{x} + \frac{x}{24} + 1\right)^{-2024}} = \\ 2 \sqrt{\left(2 + \frac{24}{x} + \frac{x}{24}\right)^{-2024}} &\geq 2 \sqrt{\left(2 + 2 \sqrt{\frac{24}{x} \cdot \frac{x}{24}}\right)^{-2024}} = 2 \sqrt{(2+2)^{-2024}} = 2^{-2023} \end{aligned}$$

Ответ: 2^{-2023}

Задача 3. (10 баллов) Числовая последовательность задана условием:

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2\sqrt{1 - \sqrt{1 - (a_n)^2}}$. Доказать, что при неограниченно большом $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1,99$$

Решение:

Так как $-1 \leq a_n \leq 1$, то положим $a_1 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, $a_n = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ последовательность a_n - убывающая и $0 < \sin \alpha < 1$.

$$\text{Тогда } a_n = 2\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = 2\sqrt{1 - |\cos \alpha|} = \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$a_2 = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot 6} = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2 \cdot 3}, \quad a_3 = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3 \cdot 6}, \dots, a_n = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}.$$

Так как при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin \alpha < \alpha$, то



$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sin \frac{\pi}{6} + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3 \cdot 3} + \dots + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3} < \\
&< \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^3 \cdot 3} + \dots + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^n \cdot 3} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{2}\pi}{6} < 1,99
\end{aligned}$$

Задача 4. (12 баллов)

Через лес проходит две параллельные просеки, на каждой из которых пробурены по две скважины так, что соединив эти скважины прямыми линиями мы получим трапецию площади $\frac{25}{2}$. Сумма расстояний между скважинами, расположенными на концах диагоналей этой трапеции, равна 10. Найти расстояние между двумя параллельными просеками.

Решение:

Пусть скважины расположены в вершинах трапеции $ABCO$. Рассмотрим трапецию $ODEF$, полученную сдвигом исходной трапеции $ABCO$ вправо (рис. 1).

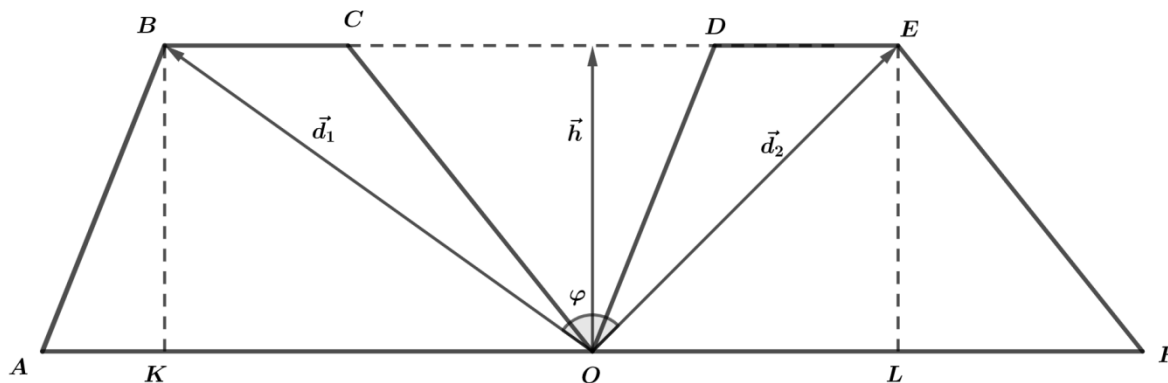


Рис.1.

Площадь прямоугольника $KBEL$ равна удвоенной площади исходной трапеции $ABCO$.

Так как $S_{ABCO} = \frac{1}{2} |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi$, то $S_{KBEL} = 2 \cdot S_{ABCO} = |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 25$.

По условию $|\vec{d}_1| + |\vec{d}_2| = 10$, тогда $|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = (10 - |\vec{d}_2|) \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 25$.

Обозначим $|\vec{d}_2| = x$, тогда получим:

$$(10 - x) \cdot x \sin \varphi = 25 \Leftrightarrow 10x \sin \varphi - x^2 \sin \varphi - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 \sin \varphi - 10x \sin \varphi + 25 = 0.$$

Решим уравнение $x^2 \sin \varphi - 10x \sin \varphi + 25 = 0$:

$D = 100 \sin^2 \varphi - 100 \sin \varphi = 100 \sin \varphi (\sin \varphi - 1)$. Так как $D < 0$ при всех $0 < \varphi < \pi$, то

уравнение $x^2 \sin \varphi - 10x \sin \varphi + 25 = 0$ имеет смысл при $D = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда $x = \frac{10}{2} = 5$, то есть $|\vec{d}_2| = 5$ и $|\vec{d}_1| = 10 - 5 = 5$.



Тогда $\triangle BOE$ - равнобедренный и искомая высота $|\vec{h}|$ - это и его медиана, а значит $|\vec{h}| = \frac{1}{2}|\vec{d}_1 + \vec{d}_2|$

$$\text{и } |\vec{h}| = \sqrt{\vec{h} \cdot \vec{h}} = \sqrt{\frac{1}{4}(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 + \vec{d}_2)} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 + 2\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{50} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Задача 5. (15 баллов)

Кристалл имеет форму правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой имеют длину 8. Точки M и N - середины ребер AS и AB соответственно. С помощью лазера кристалл рассекают на две части, одна из которых – треугольная пирамида. Луч лазера проходит через точку M перпендикулярно прямой CN . Найти площадь основания полученной треугольной пирамиды с вершиной в точке A .

Решение:

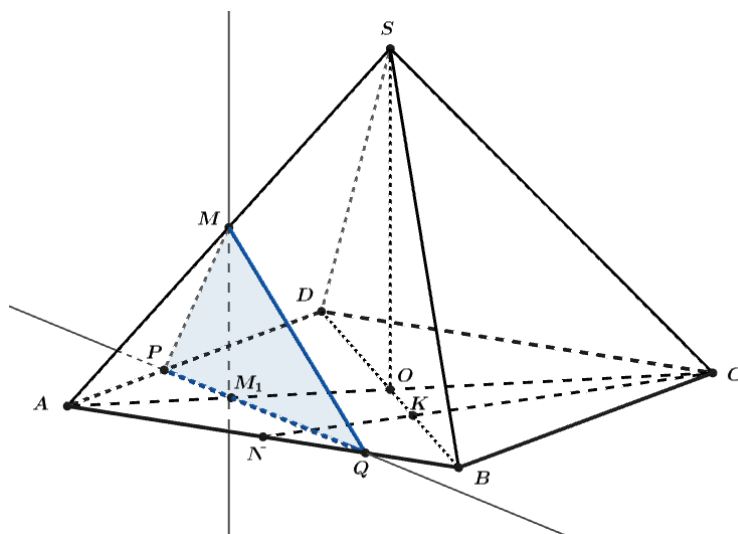


Рис.1.

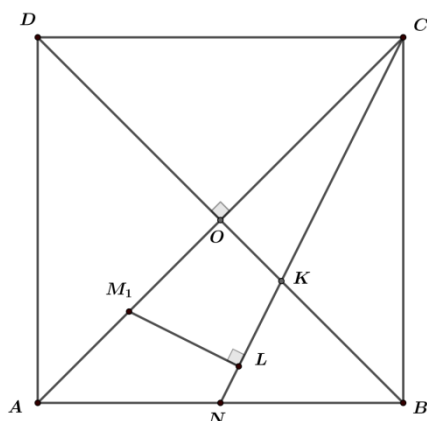


Рис.2.

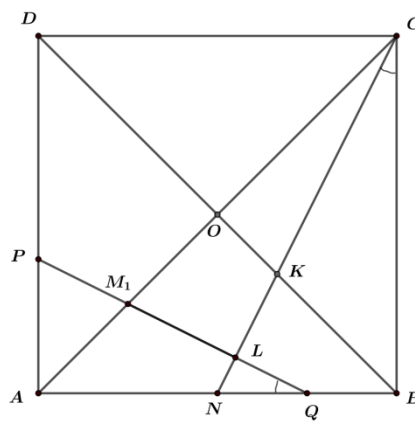


Рис.3.

Пусть α - секущая плоскость лазерного луча. По условию, $\alpha \perp CN$, тогда для построения сечения (рис.1) необходимо:

- 1) провести высоту SO ,
- 2) через точку M провести прямую l , параллельную SO так, что $l \cap AC = M_1$. Тогда MM_1 - перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC
- 3) Проведём из точки M_1 перпендикуляр к прямой CN - он пересекает CN в точке L , сторону AD - в точке P , сторону AB - в точке Q



Важно отметить точное положение точки L и показать, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB .

Рассмотрим рис.2:

- 1) По теореме Пифагора $CN^2 = BC^2 + BN^2 = 64 + 16 = 80$, тогда $CN = 4\sqrt{5}$
- 2) $K = CN \cap BD$ и K - точка пересечения медиан треугольника ABC , поэтому $CK = \frac{2}{3}CN = \frac{8\sqrt{5}}{3}$
- 3) M_1 - середина OA (так как M - середина AS , $MM_1 \parallel SO$). Тогда $CM_1 = \frac{3}{4}AC = \frac{3 \cdot 8\sqrt{2}}{4} = 6\sqrt{2}$
- 4) Из подобия треугольников CLM_1 и COK : $CL = \frac{CM_1}{CK} \cdot OC = \frac{36\sqrt{5}}{10}$, т.е. $\frac{CL}{CN} = \frac{9}{10}$ и положение точки L определено.

Для доказательства того, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB , рассмотрим

- 1) подобные треугольники LNQ и BNC (рис.3):

$$NQ = \frac{LN \cdot CN}{NB} = \frac{\frac{1}{10} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{4} = 2, \quad NQ < NB, \text{ значит } Q \in AB.$$

- 2) подобные треугольники APQ и BNC :

$$AP = \frac{AQ \cdot NB}{BC} = \frac{(AN + NQ) \cdot NB}{BC} = \frac{(4 + 2) \cdot 4}{8} = 3, \text{ значит } P \in AD.$$

Искомое сечение получается при соединении точек P, Q и M , так как по построению получаем:

$MM_1 \perp (ABC)$, $MM_1 \perp CN$, $PQ \perp CN$, а значит по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(MPQ) \perp CN$

Вычислим площадь сечения:

$$\begin{aligned} S_{MPQ} &= \frac{1}{2} MM_1 \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} SO \right) \cdot PQ, \\ SO^2 &= SA^2 - AO^2 = 64 - 32 = 32 \Rightarrow SO = 4\sqrt{2}, \\ PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow PQ = 3\sqrt{5}, \\ S_{MPQ} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \right) \cdot 3\sqrt{5} = 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

Ответ: $3\sqrt{10}$

Задача 6.

Капля воды падает с некоторой высоты, и при ударе о землю она закипает. На нагрев капли идет 50% расходуемой механической энергии. Определить с какой высоты упала капля, если начальная температура воды 20°C . (Ускорение свободного падения принять за 10 м/с^2 , ответ записать в километрах, округлить до десятых).

Дано:

$$\eta = 50\%$$

$$t_1 = 20^\circ\text{C}$$

$$t_2 = 100^\circ\text{C}$$

СИ

$$0,5$$

Решение:

Согласно уравнению количества теплоты на нагрев воды будет затрачено тепло:

$$Q = c_m m (t_2 - t_1)$$



$$c_{\text{в}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$h = ?$$

С другой стороны, на нагрев будет затрачено 50% расходуемой механической энергии:

$$E = \eta mgh$$

Приравняем энергии и выразим высоту:

$$\eta mgh = c_{\text{в}} m(t_2 - t_1)$$

$$h = \frac{c_{\text{в}}(t_2 - t_1)}{\eta g}$$

$$h = \frac{4200 \cdot (100 - 20)}{0,5 \cdot 10} = 67200 \text{ м} = 67,2 \text{ км}$$

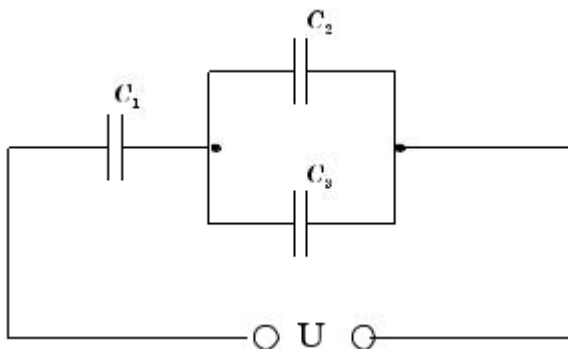
Ответ: $h = 67,2 \text{ км}$

**Задача 7.**

К конденсатору емкостью 12 пФ последовательно подключили два параллельных конденсатора емкостями 4 пФ и 8 пФ. Общий заряд всех конденсаторов 2 нКл. Чему равно общее напряжение на конденсаторах? Ответ округлить до целых.

Дано:	СИ
$C_1 = 12 \text{ пФ}$	$= 12 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$
$C_2 = 4 \text{ пФ}$	$= 4 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$
$C_3 = 8 \text{ пФ}$	$= 8 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$
$q = 2 \text{ нКл}$	$= 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$
$U = ?$	

Решение:

Общая емкость конденсаторов C_2 и C_3

$$C_{23} = C_2 + C_3.$$

Общая емкость всей батареи конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Напряжение на батарее конденсаторов

$$U = \frac{q}{C}$$

Произведем вычисления:

$$U = \frac{q(C_1 + C_2 + C_3)}{C_1(C_2 + C_3)}$$
$$U = \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot (12 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12} + 8 \cdot 10^{-12})}{12 \cdot 10^{-12}(4 \cdot 10^{-12} + 8 \cdot 10^{-12})} = 333 \text{ В}$$

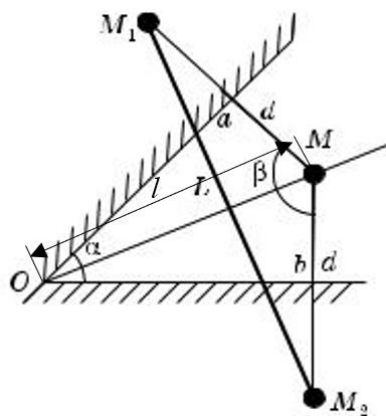
Ответ: $U=333 \text{ В}$

**Задача 8.**

Два зеркала расположены под углом 40° друг к другу. Точечный источник света расположен на биссектрисе этого угла на расстоянии в 8 см от линии пересечения зеркал. Определить расстояние между мнимыми изображениями точечного источника в зеркалах. Ответ округлить до сотых.

Дано:	СИ
$\alpha = 40^\circ$	
$l = 8 \text{ см}$	$= 0,08 \text{ м}$
$L = ?$	

Решение:



Обозначим расстояние между двумя мнимыми изображениями M_1 и M_2 точки M в этих зеркалах буквой L , а расстояние между предметом M и каждым ее изображением M_1 или M_2 — буквой d (эти расстояния между собой равны, поскольку сказано, что точки находятся на равном расстоянии от обоих зеркал, т.е. на биссектрисе угла α , а расстояние от зеркала до изображения равно расстоянию от точки до зеркала). В четырехугольнике $OaMb$ два угла прямые, а угол при точке O , через которую проходит линия пересечения зеркал, равен α , значит, угол β напротив него равен: $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$.

Теперь рассмотрим треугольник M_1MM_2 . В нем нам известны стороны M_1M и MM_2 , каждая из которых имеет длину d , а также угол β между ними. Значит, мы можем найти искомую сторону $M_1M_2 = L$ по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{d^2 + d^2 - 2d \cdot d \cos \beta} = \sqrt{2d^2 - 2d^2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} = \\ &= d\sqrt{2(1 + \cos(\alpha))} \end{aligned}$$

Отрезок d найдем из прямоугольного треугольника OaM , в котором нам известна гипотенуза l , угол $\alpha/2$ и катет aM против него, равный $d/2$. Из этого треугольника следует, что

$$\frac{d}{2} = l \sin \frac{\alpha}{2}$$



$$d = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$$

Тогда

$$L = 2l \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2(1 + \cos(\alpha))} = 2l\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

Из тригонометрии известно, что

$$\sqrt{1 + \cos\alpha} = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$L = 2l\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = 2l \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Где

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

Тогда

$$L = 2l \sin \alpha$$

Произведем вычисления:

$$L = 2 \cdot 0,08 \cdot \sin(40^\circ) = 0,1028 = 0,10 \text{ м}$$

Ответ: L=0,10 м.

**Задача 9.**

В поле конденсатора параллельно его обкладкам влетает протон со скоростью $2 \cdot 10^6$ м/с. Длина обкладки конденсатора 0,06 м, расстояние между его обкладками 0,03 м, разность потенциалов между ними $U=220$ В. Определить смещение частицы к отрицательной обкладке за время пролета конденсатора.

Дано:

$$v = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

$$l = 0,06 \text{ м}$$

$$d = 0,03 \text{ м}$$

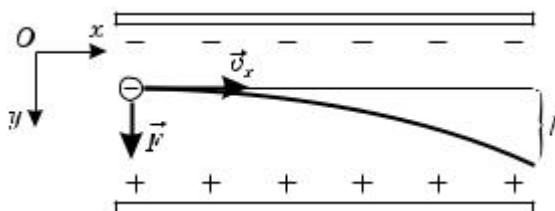
$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$U = 220 \text{ В}$$

$$h = ?$$

СИ

Решение:



За время, пока электрон будет лететь вдоль оси ОХ равномерно и прямолинейно, он спустится вдоль оси ОУ на расстояние h , двигаясь равноускоренно без начальной скорости. Поэтому уравнения движения электрона вдоль осей координат будут иметь вид:

$$l = v_x t, h = \frac{at^2}{2}$$

Выразим время, и подставим в h

$$h = \frac{a}{2} \left(\frac{l}{v_x} \right)^2$$

Ускорение найдем из второго закона Ньютона:

$$a = \frac{F}{m}$$

Силу найдем из формулы напряженности электрического поля

$$F = eE$$

$$a = \frac{eE}{m}$$

Напряженность поля конденсатора так же можем найти через связь с напряжением на обкладках конденсатора:

$$E = \frac{U}{d}$$

$$a = \frac{eU}{md}$$

Подставим ускорение в уравнение для смещения:



$$h = \frac{eU}{2md} \left(\frac{l}{v_x} \right)^2$$

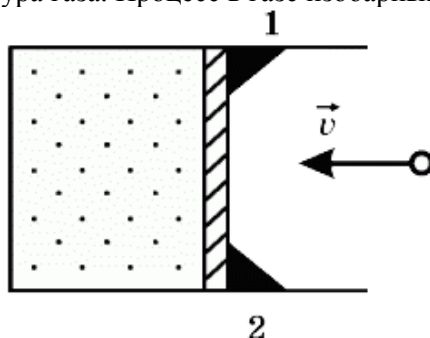
Произведем численную подстановку:

$$h = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 220}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 0,03} \left(\frac{0,06}{2 \cdot 10^6} \right)^2 = 3,17 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Ответ: $h = 3,17 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,317 \text{ мм}$

**Задача 10.**

Идеальный газ, азот, находящийся в теплоизолированном сосуде объемом 2л под давлением p , заперт пробковым поршнем массой M . Справа поршень удерживают упоры 1 и 2, не давая газу расширяться. В поршень попадает пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью v , и застревает в нем. Считая, что всю механическую энергию поршень передаст газу, определить, во сколько раз повысится температура газа. Процесс в газе изобарный.



Дано:

 $V = 2 \text{ л}$ p M m v $\frac{T_2}{T_1} = ?$

СИ

Решение:

По условию задачи, вся кинетическая энергия с застрявшей пулей пойдет на увеличение внутренней энергии газа и совершение отрицательной работы изобарного сжатия газа:

$$E_k = \Delta U - A$$

$$E_k = \frac{(m+M)v_0^2}{2}, \Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T, A = p \Delta V = \nu R \Delta T,$$

v_0 - скорость поршня после попадания в него пули.

$$\frac{(m+M)v_0^2}{2} = \frac{5}{2} \nu R \Delta T - \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$$



$$(m + M)v_0^2 = 3 \nu R \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{(m + M)v_0^2}{3 \nu R}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 + \Delta T}{T_1} = 1 + \frac{\Delta T}{T_1}$$

Начальную температуру T_1 найдем из уравнения Менделеева-Клайперона.

$$pV = \nu RT_1, T_1 = \frac{pV}{\nu R}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{(m+M)v_0^2 \nu R}{3 \nu R p V} = 1 + \frac{(m+M)v_0^2}{3 p V}$$

Найдем скорость поршня с пулей после попадания пули в него.

Будем использовать закон сохранения импульса.

$$mv = (m + M)v_0, v_0 = \frac{mv}{m+M}$$

Подставим значение

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{(m + M)(mv)^2}{3 p V (m + M)}$$

Произведем численную подстановку:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{(m + M)(mv)^2}{6 p (m + M)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{(m+M)(mv)^2}{6 p (m+M)}$$



ВАРИАНТ № 5

Задача 1. (5 баллов) Миша и Маша играют в игру: независимо друг от друга, одновременно, пишут на бумаге любое натуральное число из некоторого диапазона и показывают друг другу: Миша - число $a: 0 < a \leq 116$, Маша число $b: 0 < b \leq 125$. Побеждает тот, кто написал большее число. Какова вероятность, что победит Маша?

Решение:

Всех возможных исходов - $116 \cdot 125 = 14500$. Маша победит в том случае, если $b > a$.
Число исходов, благоприятствующих этому событию равно
 $14500 - (1 + 2 + 3 + \dots + 116) = 13440 - \frac{1+116}{2} \cdot 116 = 14500 - 6786 = 7714$.

Тогда искомая вероятность $P = \frac{7714}{14500} = 0.532$

Или: если $a: 0 < a \leq m$, $b: 0 < b \leq n$, то искомая вероятность равна:

$$P = \frac{m \cdot n - \frac{m \cdot (m+1)}{2}}{m \cdot n} = \frac{2m \cdot n - m^2 - m}{2m \cdot n} = \frac{2n - m - 1}{2n} = \frac{2 \cdot 125 - 116 - 1}{2 \cdot 125} = \frac{133}{250} = 0.532$$

Ответ: 0,532

Задача 2. (8 баллов) Найти наименьшее значение функции $f(x) = \left(1 + \frac{24}{x}\right)^{-2025} + \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{-2025}$.

Решение:

Дважды применим неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{24}{x}\right)^{-2025} + \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{-2025} &\geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{24}{x}\right)^{-2025} \cdot \left(1 + \frac{x}{24}\right)^{-2025}} = 2 \sqrt{\left(1 + \frac{24}{x} + \frac{x}{24} + 1\right)^{-2025}} = \\ &2 \sqrt{\left(2 + \frac{24}{x} + \frac{x}{24}\right)^{-2025}} \geq 2 \sqrt{\left(2 + 2 \sqrt{\frac{24}{x} \cdot \frac{x}{24}}\right)^{-2025}} = 2 \sqrt{(2+2)^{-2025}} = 2^{-2024} \end{aligned}$$

Ответ: 2^{-2024}

Задача 3. (10 баллов) Числовая последовательность задана условием:

$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_{n+1} = 2\sqrt{1 - \sqrt{1 - (a_n)^2}}$. Доказать, что при неограниченно большом $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2,19$$

Решение:

Так как $-1 \leq a_n \leq 1$, то положим $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$, $a_n = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ последовательность a_n - убывающая и $0 < \sin \alpha < 1$.

$$\text{Тогда } a_n = 2\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = 2\sqrt{1 - |\cos \alpha|} = \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$a_2 = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8}, \quad a_3 = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^5}, \dots, a_n = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

Так как при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin \alpha < \alpha$, то



$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sin \frac{\pi}{4} + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3} + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^5} + \dots + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} < \\
 &< \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^3} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^5} + \dots + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-2}} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi \cdot 4}{2^2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{3} = \sqrt{2} \left(\frac{3 + 2\pi}{6} \right) < 2,19
 \end{aligned}$$

Задача 4. (12 баллов)

Через лес проходит две параллельные просеки, на каждой из которых пробурены по две скважины так, что соединив эти скважины прямыми линиями мы получим трапецию площади $\frac{25}{8}$. Сумма

расстояний между скважинами, расположенными на концах диагоналей этой трапеции, равна 5. Найти расстояние между двумя параллельными просеками.

Решение:

Пусть скважины расположены в вершинах трапеции ABCO. Рассмотрим трапецию ODEF, полученную сдвигом исходной трапеции ABCO вправо (рис. 1).

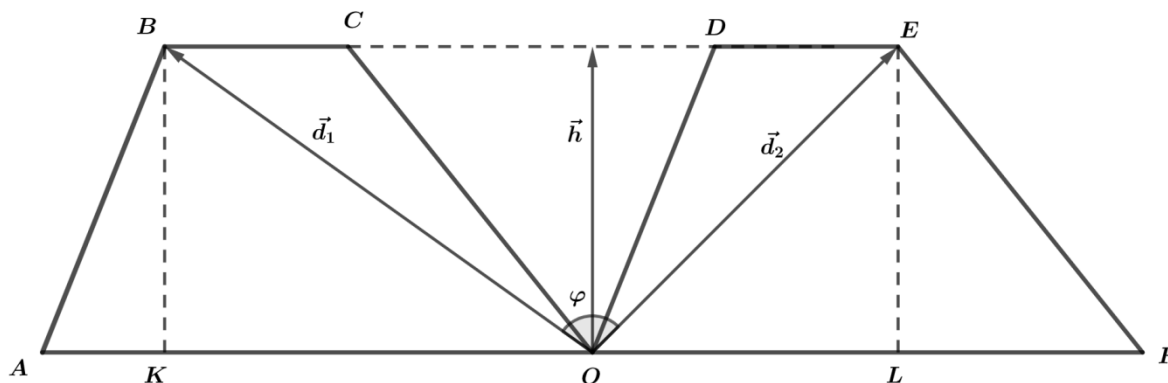


Рис.1.

Площадь прямоугольника KBEL равна удвоенной площади исходной трапеции ABCO.

Так как $S_{ABCO} = \frac{1}{2} |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi$, то $S_{KBEL} = 2 \cdot S_{ABCO} = |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = \frac{25}{4}$.

По условию $|\vec{d}_1| + |\vec{d}_2| = 5$, тогда $|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = (5 - |\vec{d}_2|) \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = \frac{25}{4}$.

Обозначим $|\vec{d}_2| = x$, тогда получим:

$$(5 - x) \cdot x \sin \varphi = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 5x \sin \varphi - x^2 \sin \varphi - \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 \sin \varphi - 5x \sin \varphi + \frac{25}{4} = 0.$$

Решим уравнение $x^2 \sin \varphi - 5x \sin \varphi + \frac{25}{4} = 0$: $D = 25 \sin^2 \varphi - 25 \sin \varphi = 25 \sin \varphi (\sin \varphi - 1)$.

Так как $D < 0$ при всех $0 < \varphi < \pi$, то уравнение $x^2 \sin \varphi - 5x \sin \varphi + \frac{25}{4} = 0$ имеет смысл при

$$D = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $x = \frac{5}{2}$, то есть $|\vec{d}_2| = \frac{5}{2}$ и $|\vec{d}_1| = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.



Тогда $\triangle BOE$ - равнобедренный и искомая высота $|\vec{h}|$ - это и его медиана, а значит $|\vec{h}| = \frac{1}{2}|\vec{d}_1 + \vec{d}_2|$

$$\text{и } |\vec{h}| = \sqrt{\vec{h} \cdot \vec{h}} = \sqrt{\frac{1}{4}(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 + \vec{d}_2)} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 + 2\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

Задача 5. (15 баллов)

Кристалл имеет форму правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой имеют длину 10. Точки M и N - середины ребер AS и AB соответственно. С помощью лазера кристалл рассекают на две части, одна из которых – треугольная пирамида. Луч лазера проходит через точку M перпендикулярно прямой CN . Найти площадь основания полученной треугольной пирамиды с вершиной в точке A .

Решение:

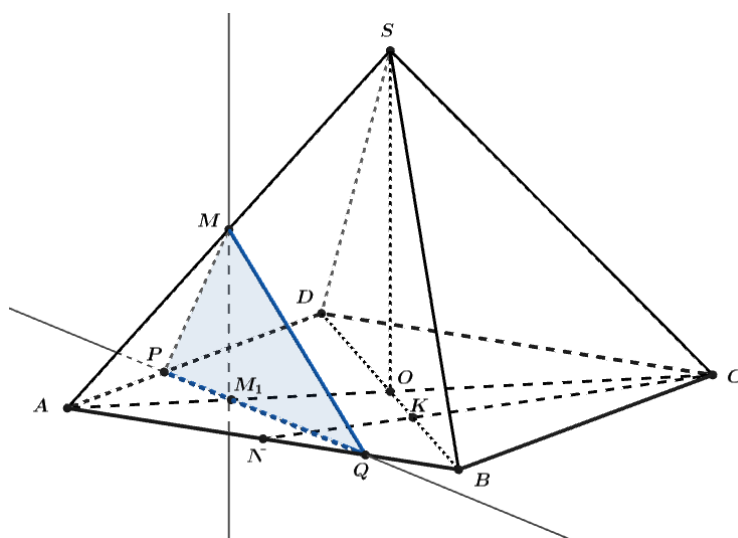


Рис.1.

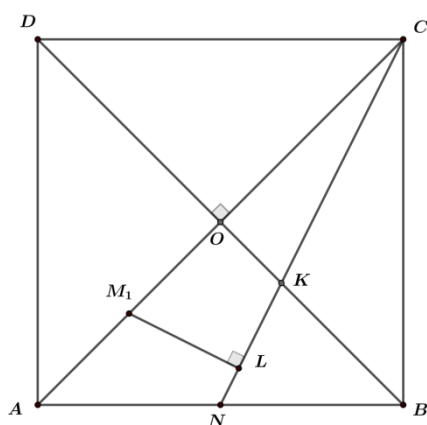


Рис.2.

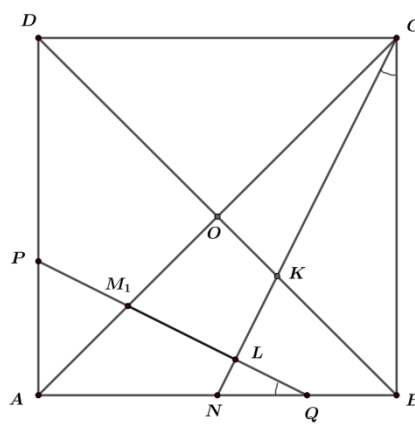


Рис.3.

Пусть α - секущая плоскость лазерного луча. По условию, $\alpha \perp CN$, тогда для построения сечения (рис.1) необходимо:

- 1) провести высоту SO ,
- 2) через точку M провести прямую l , параллельную SO так, что $l \cap AC = M_1$. Тогда MM_1 - перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC
- 3) Проведём из точки M_1 перпендикуляр к прямой CN - он пересекает CN в точке L , сторону AD - в точке P , сторону AB - в точке Q



Важно отметить точное положение точки L и показать, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB .

Рассмотрим рис.2:

- 1) По теореме Пифагора $CN^2 = BC^2 + BN^2 = 100 + 25 = 125$, тогда $CN = 5\sqrt{5}$
- 2) $K = CN \cap BD$ и K - точка пересечения медиан треугольника ABC , поэтому $CK = \frac{2}{3}CN = \frac{10\sqrt{5}}{3}$
- 3) M_1 - середина OA (так как M - середина AS , $MM_1 \parallel SO$). Тогда $CM_1 = \frac{3}{4}AC = \frac{15\sqrt{2}}{2}$
- 4) Из подобия треугольников CLM_1 и COK : $CL = \frac{CM_1}{CK} \cdot OC = \frac{9\sqrt{5}}{2}$, т.е. $\frac{CL}{CN} = \frac{9}{10}$ и положение точки L определено.

Для доказательства того, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB , рассмотрим

- 1) подобные треугольники LNQ и BNC (рис.3):

$$NQ = \frac{LN \cdot CN}{NB} = \frac{\frac{1}{10} \cdot 5\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5}}{5} = \frac{5}{2}, \quad NQ < NB, \text{ значит } Q \in AB.$$

- 2) подобные треугольники APQ и BNC :

$$AP = \frac{AQ \cdot NB}{BC} = \frac{(AN + NQ) \cdot NB}{BC} = \frac{\left(5 + \frac{5}{2}\right) \cdot 5}{10} = \frac{15}{4}, \text{ значит } P \in AD.$$

Искомое сечение получается при соединении точек P, Q и M , так как по построению получаем:

$MM_1 \perp (ABC)$, $MM_1 \perp CN$, $PQ \perp CN$, а значит по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(MPQ) \perp CN$

Вычислим площадь сечения:

$$\begin{aligned} S_{MPQ} &= \frac{1}{2} MM_1 \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} SO\right) \cdot PQ, \\ SO^2 &= SA^2 - AO^2 = 100 - 50 = 50 \Rightarrow SO = 5\sqrt{2}, \\ PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 = \frac{225}{16} + \frac{225}{4} = \frac{1125}{16} \Rightarrow PQ = \frac{15\sqrt{5}}{4}, \\ S_{MPQ} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2}\right) \cdot \frac{15\sqrt{5}}{4} = \frac{75\sqrt{10}}{16} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{75\sqrt{10}}{16}$

Задача 6.

На дифракционную решетку, период которой d равен 7,2 микрометров, нормально подает излучение с длинами волн $\lambda_1=600$ нанометров и $\lambda_2=660$ нанометров. Возможно ли перекрытие дифракционных спектров для этих длин волн?

Дано:	СИ	Решение:
$d=7,2$ мкм	$=7,2 \cdot 10^{-6}$ м	1. Условие перекрытия дифракционных спектров m -го и $(m+1)$ -го порядков: $m\lambda_2 \geq (m+1)\lambda_1$.
$\lambda_1=600$ нм	$=600 \cdot 10^{-9}$ м	



$$\lambda_2 = 660 \text{ нм}$$

$$= 660 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

$$\text{Это возможно при } m \geq \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{(0,66 - 0,60) \cdot 10^{-6}} = 10.$$

2. Максимальный порядок спектра, который можно наблюдать при помощи данной дифракционной решетки,

$$\text{определяется из условия: } m \leq \frac{d}{\lambda_1} = \frac{7,2}{0,6} = 12.$$

3. Перекрывание дифракционных спектров будет наблюдаться.

**Задача 7.**

Тонкое проволочное кольцо радиусом R заряжено с линейной плотностью заряда τ . Вдоль оси кольца протянута тонкая нить из диэлектрического материала. По этой нити может двигаться маленький отрицательно заряженный шарик массой m . Заряд шарика $-q$. Шарик удерживают на расстоянии L от центра кольца, затем отпускают. С какой скоростью шарик пролетит через центр кольца, если при движении на шарик будет действовать постоянная сила трения F ?

Дано:	СИ	Решение:
R		1. Воспользуемся законом сохранения энергии.
τ		2. Потенциальная энергия шарика в начальной точке:
m		$E_{n1} = -k \frac{2\pi R \tau \cdot q}{(R^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}}$
q		3. Потенциальная энергия шарика в центре кольца:
L		$E_{n2} = -k \frac{2\pi R \tau \cdot q}{R}$
F		4. Работа сил трения: $A_{\text{тр}} = F \cdot L$
$v = ?$		5. Кинетическая энергия шарика в центре кольца: $E_k = \frac{mv^2}{2}$
		6. $\sqrt{v = \frac{2}{m} \left[\frac{2\pi R \tau \cdot q}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right) - F \cdot L \right]} =$ $\sqrt{\left[\frac{R \tau \cdot q}{m \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right) - F \cdot L \right]}$

**Задача 8.**

Заполненный газом герметичный цилиндрический сосуд расположен горизонтально. Внутри сосуда находится перегородка с малым отверстием (диаметр отверстия много меньше диаметра сосуда). Теплопроводность перегородки пренебрежимо мала. Давления по разные стороны перегородки поддерживаются постоянными, равными P_1 и P_2 , соответственно. Определить отношение температур T_1 и T_2 в разных частях сосуда.

Дано:

СИ

Решение:

 P_1 P_2 $\frac{T_1}{T_2} = ?$

1. Чтобы термодинамические параметры газа не изменялись, концентрации молекул газа в разных частях сосуда должны оставаться постоянными, то число молекул, проходящих через отверстие за равные промежутки времени, слева-направо и справа-налево должны быть одинаковым.

$$N_1 = \frac{1}{3} n_1 v_1 S \Delta t, \quad N_2 = \frac{1}{3} n_2 v_2 S \Delta t$$

$$2. \quad n_1 v_1 = n_2 v_2 \quad n = \frac{P}{KT} \quad v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

$$3. \text{ После подстановки } \frac{T_1}{T_2} = \frac{P_1^2}{P_2^2}$$

**Задача 9.**

Металлическое кольцо, половина которого изготовлена из меди, а другая половина – из алюминия, находится в магнитном поле. Величина магнитной индукции B возрастает с постоянной скоростью

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = 1$$

Тл/с. Плоскость кольца с вектором магнитной индукции образует угол 90° . Радиус кольца R равен 50 см. Площади поперечных сечений у медного и алюминиевого проводов равны.

Найти силы, действующие на электроны проводимости в меди и алюминии. ($\rho_{Al} = 2,70 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $\rho_{Cu} = 1,68 \cdot 10^{-8}$ Ом·м).

Дано:	СИ	Решение:
$\frac{\Delta B}{\Delta t} = 1 \text{ Тл/с}$		1. При равномерном возрастании магнитной индукции B в кольце создается постоянная ЭДС. Сила тока и плотность тока будут одинаковы во всех сечениях кольца. Вследствие разности удельных сопротивлений меди и алюминия, напряженности электрического поля в меди и алюминии будут разными.
$\alpha = 90^\circ$		
$R = 50 \text{ см}$	$= 0,5 \text{ м}$	2. С одной стороны ЭДС индукции можно определить по формуле
$F_{Al} = ?$		$\varepsilon_i = \pi R^2 \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$. С другой, как работу вихревого электрического поля по перемещению по замкнутому контуру единичного положительного
$F_{Cu} = ?$		заряда $\varepsilon_i = 2\pi R \cdot E$. Поскольку напряженности полей в меди и алюминии различны, то ЭДС удобно представить, как сумму двух ЭДС в медном и алюминиевом полукольцах:

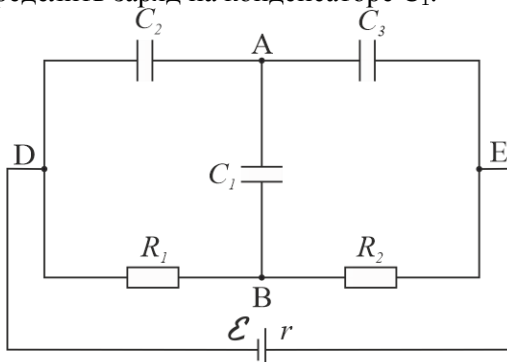
$\varepsilon_i = \pi R(E_{Cu} + E_{Al})$, с учетом того, что $j = \frac{E_{Al}}{\rho_{Al}} = \frac{E_{Cu}}{\rho_{Cu}}$ можно определить напряженности полей в меди и алюминии и силы, действующие на электроны проводимости:

$$F_{Cu} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Cu} + \rho_{Al}} \cdot R \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot q_{эл} = \frac{1,68}{1,68 + 2,70} \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,07 \cdot 10^{-20} \quad \text{Н.}$$

$$F_{Al} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu} + \rho_{Al}} \cdot R \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot q_{эл} = \frac{2,70}{1,68 + 2,70} \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 4,93 \cdot 10^{-20} \quad \text{Н}$$

**Задача 10.**

Электрическая схема, представленная на рисунке, содержит три конденсатора ($C_1=200$ мкФ, $C_2=300$ мкФ и $C_3=400$ мкФ), два резистора ($R_1=24$ Ом, $R_2=6$ Ом), источник (ЭДС=32 В, внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом). Определить заряд на конденсаторе C_1 .



Дано:

СИ

Решение:

$C_1=200 \text{ мкФ}$

$=200 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$

$C_2=300 \text{ мкФ}$

$=300 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$

$C_3=400 \text{ мкФ}$

$=400 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$

$R_1=24 \text{ Ом}$

$R_2=6 \text{ Ом}$

$\mathcal{E}=32 \text{ В}$

$r = 2 \text{ Ом}$

$q=?$

1. Определим разности потенциалов между точками D-B и B-E электрической цепи.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r} = \frac{32}{32} = 1 \text{ А}, \quad \Delta\varphi_{D-E} = I \cdot (R_1 + R_2) = U = 30 \text{ В}.$$

Соединенные последовательно резисторы находятся в соотношении

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{4}{1}, \text{ следовательно, } \varphi_D - \varphi_B = \frac{U \cdot 4}{5}, \quad \varphi_B - \varphi_E = \frac{U}{5}.$$

2. Теперь определим разность потенциалов между точками A и B. Обкладки всех трех конденсаторов соединены (или непосредственно, или через сопротивления). Суммарный электрический заряд такой системы равен нулю. Используем это условие и выразим φ_D и

φ_E через φ_B . Примем 100 мкФ за C , тогда $C_1=2C$, $C_2=3C$, $C_3=4C$.

$$3. (\varphi_A - \varphi_D)3C + (\varphi_A - \varphi_B)2C + (\varphi_A - \varphi_E)4C = 0.$$

$$\varphi_D - \varphi_B = \frac{4U}{5}, \quad \varphi_D = \frac{4U}{5} + \varphi_B.$$

$$\varphi_B - \varphi_E = \frac{U}{5}, \quad \varphi_E = \varphi_B - \frac{U}{5}.$$

$$3\varphi_A C - 3C \left(\varphi_B + \frac{4U}{5} \right) + 2\varphi_A C - 2\varphi_B C + 4\varphi_A C - 4C \left(\varphi_B - \frac{U}{5} \right) = 0$$

$$3\varphi_A C - 3C\varphi_B - \frac{12UC}{5} + 2\varphi_A C - 2\varphi_B C + 4\varphi_A C - 4C\varphi_B + \frac{4UC}{5} = 0$$



$$9C(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{8CU}{5}, \quad (\varphi_A - \varphi_B) = \frac{8U}{45}.$$

4. Заряд q на конденсаторе C_1 будет равен:

$$q = C(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{200 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 30}{45} = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ Кл.}$$



ВАРИАНТ № 6

Задача 1. (5 баллов) Миша и Маша играют в игру: независимо друг от друга, одновременно, пишут на бумаге любое натуральное число из некоторого диапазона и показывают друг другу: Миша - число $a: 0 < a \leq 151$, Маша число $b: 0 < b \leq 160$. Побеждает тот, кто написал большее число. Какова вероятность, что победит Маша?

Решение:

Всех возможных исходов - $151 \cdot 160 = 24160$. Маша победит в том случае, если $b > a$. Число исходов, благоприятствующих этому событию равно $24160 - (1 + 2 + 3 + \dots + 151) = 24160 - \frac{1+151}{2} \cdot 151 = 24160 - 11476 = 12684$.

Тогда искомая вероятность $P = \frac{12684}{24160} = 0.525$

Или: если $a: 0 < a \leq m$, $b: 0 < b \leq n$, то искомая вероятность равна:

$$P = \frac{m \cdot n - \frac{m \cdot (m+1)}{2}}{m \cdot n} = \frac{2m \cdot n - m^2 - m}{2m \cdot n} = \frac{2n - m - 1}{2n} = \frac{2 \cdot 160 - 151 - 1}{2 \cdot 160} = \frac{168}{2 \cdot 160} = \frac{21}{40} = 0.525$$

Ответ: 0,525

Задача 2. (8 баллов) Найти наименьшее значение функции $f(x) = \left(1 + \frac{25}{x}\right)^{2024} + \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{2024}$.

Решение:

Дважды применим неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{25}{x}\right)^{2024} + \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{2024} &\geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{25}{x}\right)^{2024} \cdot \left(1 + \frac{x}{25}\right)^{2024}} = 2 \sqrt{\left(1 + \frac{25}{x} + \frac{x}{25} + 1\right)^{2024}} = \\ &2 \sqrt{\left(2 + \frac{25}{x} + \frac{x}{25}\right)^{2024}} \geq 2 \sqrt{\left(2 + 2 \sqrt{\frac{25}{x} \cdot \frac{x}{25}}\right)^{2024}} = 2 \sqrt{(2+2)^{2024}} = 2^{2025} \end{aligned}$$

Ответ: 2^{2025}

Задача 3. (10 баллов) Числовая последовательность задана условием:

$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{n+1} = 2\sqrt{1 - \sqrt{1 - (a_n)^2}}$. Доказать, что при неограниченно большом $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 3,84$$

Решение:

Так как $-1 \leq a_n \leq 1$, то положим $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, $a_n = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ последовательность a_n - убывающая и $0 < \sin \alpha < 1$.

Тогда $a_n = 2\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = 2\sqrt{1 - |\cos \alpha|} = \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$,

$$a_2 = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot 3}, \quad a_3 = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2 \cdot 3}, \dots, a_n = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3}.$$

Так как при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin \alpha < \alpha$, то



$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sin \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot 3} + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} + \dots + 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} < \\
&< \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot 3} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} + \dots + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\pi}{6} < 3,84
\end{aligned}$$

Задача 4. (12 баллов)

Через лес проходит две параллельные просеки, на каждой из которых пробурены по две скважины так, что соединив эти скважины прямыми линиями мы получим трапецию площади 18. Сумма расстояний между скважинами, расположенными на концах диагоналей этой трапеции, равна 12. Найдите расстояние между двумя параллельными просеками.

Решение:

Пусть скважины расположены в вершинах трапеции $ABCO$. Рассмотрим трапецию $ODEF$, полученную сдвигом исходной трапеции $ABCO$ вправо (рис. 1).

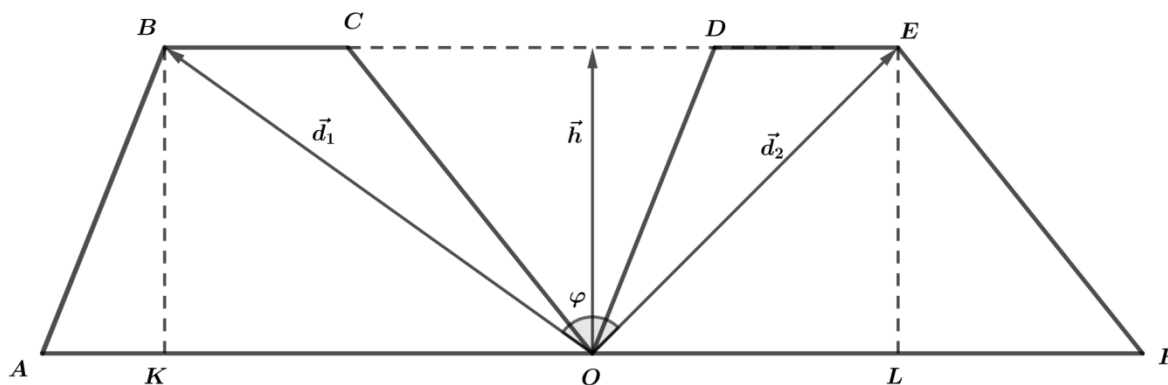


Рис.1.

Площадь прямоугольника $KBEL$ равна удвоенной площади исходной трапеции $ABCO$.

Так как $S_{ABCO} = \frac{1}{2} |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi$, то $S_{KBEL} = 2 \cdot S_{ABCO} = |\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 36$.

По условию $|\vec{d}_1| + |\vec{d}_2| = 12$, тогда $|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = (12 - |\vec{d}_2|) \cdot |\vec{d}_2| \sin \varphi = 36$.

Обозначим $|\vec{d}_2| = x$, тогда получим:

$$(12 - x) \cdot x \sin \varphi = 36 \Leftrightarrow 12x \sin \varphi - x^2 \sin \varphi - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 \sin \varphi - 12x \sin \varphi + 36 = 0.$$

Решим уравнение $x^2 \sin \varphi - 12x \sin \varphi + 36 = 0$:

$D = 144 \sin^2 \varphi - 144 \sin \varphi = 144 \sin \varphi (\sin \varphi - 1)$. Так как $D < 0$ при всех $0 < \varphi < \pi$, то

уравнение $x^2 \sin \varphi - 12x \sin \varphi + 36 = 0$ имеет смысл при $D = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда $x = \frac{12}{2} = 6$, то есть $|\vec{d}_2| = 6$ и $|\vec{d}_1| = 12 - 6 = 6$.

$\triangle BOE$ - равнобедренный и искомая высота $|\vec{h}|$ - это и его медиана, а значит $|\vec{h}| = \frac{1}{2} |\vec{d}_1 + \vec{d}_2|$ и

$$|\vec{h}| = \sqrt{\vec{h} \cdot \vec{h}} = \sqrt{\frac{1}{4} (\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 + \vec{d}_2)} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 + 2\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{72} = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $3\sqrt{2}$

**Задача 5. (15 баллов)**

Кристалл имеет форму правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой имеют длину 12. Точки M и N - середины ребер AS и AB соответственно. С помощью лазера кристалл рассекают на две части, одна из которых – треугольная пирамида. Луч лазера проходит через точку M перпендикулярно прямой CN . Найти площадь основания полученной треугольной пирамиды с вершиной в точке A .

Решение:

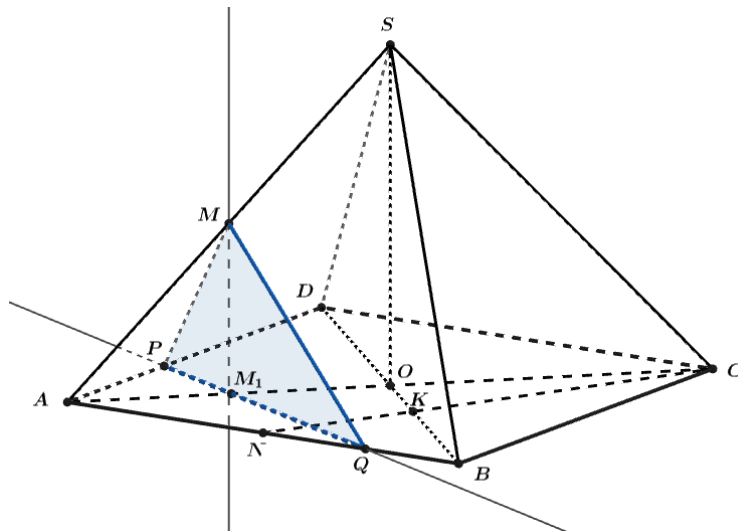


Рис.1.

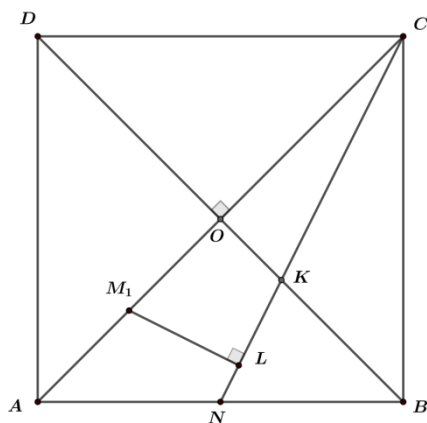


Рис.2.

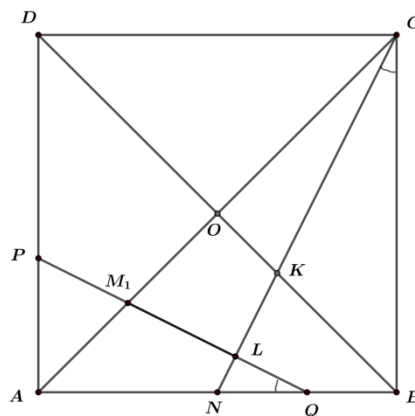


Рис.3.

Пусть α - секущая плоскость лазерного луча. По условию, $\alpha \perp CN$, тогда для построения сечения (рис.1) необходимо:

- 1) провести высоту SO ,
- 2) через точку M провести прямую l , параллельную SO так, что $l \cap AC = M_1$. Тогда MM_1 - перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC
- 3) Проведём из точки M_1 перпендикуляр к прямой CN - он пересекает CN в точке L , сторону AD - в точке P , сторону AB - в точке Q

Важно отметить точное положение точки L и показать, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB .

Рассмотрим рис.2:

- 1) По теореме Пифагора $CN^2 = BC^2 + BN^2 = 144 + 36 = 180$, тогда $CN = 6\sqrt{5}$
- 2) $K = CN \cap BD$ и K - точка пересечения медиан треугольника ABC , поэтому $CK = \frac{2}{3}CN = 4\sqrt{5}$



3) M_1 - середина OA (так как M - середина AS , $MM_1 \parallel SO$). Тогда $CM_1 = \frac{3}{4} AC = 9\sqrt{2}$

4) Из подобия треугольников CLM_1 и COK : $CL = \frac{CM_1}{CK} \cdot OC = \frac{27\sqrt{5}}{5}$, т.е. $\frac{CL}{CN} = \frac{9}{10}$ и

положение точки L определено.

Для доказательства того, что точки P и Q лежат на сторонах AD и AB , рассмотрим

1) подобные треугольники LNQ и BNC (рис.3):

$$NQ = \frac{LN \cdot CN}{NB} = \frac{\frac{1}{10} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{6} = 3, \quad NQ < NB, \text{ значит } Q \in AB.$$

2) подобные треугольники APQ и BNC :

$$AP = \frac{AQ \cdot NB}{BC} = \frac{(AN + NQ) \cdot NB}{BC} = \frac{(6 + 3) \cdot 6}{12} = \frac{9}{2}, \text{ значит } P \in AD.$$

Искомое сечение получается при соединении точек P, Q и M , так как по построению получаем:

$MM_1 \perp (ABC)$, $MM_1 \perp CN$, $PQ \perp CN$, а значит по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(MPQ) \perp CN$

Вычислим площадь сечения:

$$S_{MPQ} = \frac{1}{2} MM_1 \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} SO \right) \cdot PQ,$$

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 144 - 72 = 72 \Rightarrow SO = 6\sqrt{2},$$

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 = \frac{81}{4} + 81 = \frac{405}{4} \Rightarrow PQ = \frac{9\sqrt{5}}{2},$$

$$S_{MPQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \right) \cdot \frac{9\sqrt{5}}{2} = \frac{27\sqrt{10}}{4}$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{10}}{4}$

**Задача 6.**

Вес тела в масле 100 Н, а вес тела в воде 120 Н. Плотность масла 900 кг/м³, плотность воды 1000 кг/м³. Найдите плотность тела.

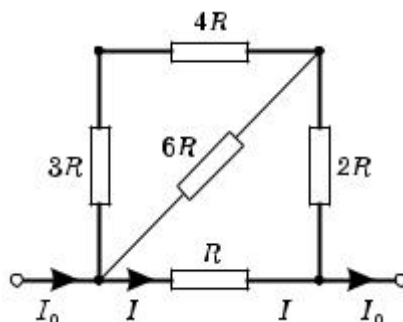
Дано:	СИ	Решение:
$P_1=100 \text{ Н}$		Выталкивающая сила в масле $F_{\text{выт1}} = P - P_1$. Здесь $F_{\text{выт1}} = \rho_m gV$,
$P_2 = 120 \text{ Н}$		Вес тела: $P = mg = \rho_T gV$. Следовательно:
$\rho_1=900 \text{ кг/м}^3$		$\rho_m gV = \rho_T gV - P_1$
$\rho_2=1000 \text{ кг/м}^3$		Для воды получим аналогичное выражение:
$\rho_T=?$		$\rho_B gV = \rho_T gV - P_2$
		Выразим из этих уравнений вес тела:
		$P_1 = \rho_T Vg - \rho_m gV$
		$P_2 = \rho_T Vg - \rho_B gV$
		Разделим одно уравнение на другое:
		$\frac{P_2}{P_1} = \frac{gV(\rho_m - \rho_B)}{gV(\rho_T - \rho_m)}$
		$\rho_T P_1 - \rho_B P_1 = \rho_T P_2 - \rho_m P_2$
		$\rho_T (P_2 - P_1) = \rho_m P_2 - \rho_B P_1$
		$\rho_T = \frac{\rho_m P_2 - \rho_B P_1}{P_2 - P_1}$
		$\rho_T = \frac{900 \cdot 120 - 1000 \cdot 100}{120 - 100} = 400 \text{ кг/м}^3$

Ответ: $\rho_T=400 \text{ кг/м}^3$



Задача 7.

Сила тока $I_0 = 5\text{ A}$ (смотри рисунок). Найти силу тока I , проходящую через резистор R . Ответ округлите до десятых.



Дано:

$$I_0 = 5\text{ A}$$

$I = ?$

СИ

Решение:

Изобразим эквивалентную схему

Общее сопротивление верхнего участка ab , состоящего из двух последовательных резисторов $3R$ и $4R$, равно:



$$R_{\text{общ1}} = 3R + 4R = 7R.$$

Общее сопротивление участка $cabd$ равно:

$$R_{\text{общ2}} = \frac{R_{\text{общ1}} \cdot 6R}{R_{\text{общ1}} + 6R} = \frac{7R \cdot 6R}{7R + 6R} = \frac{42}{13}R$$

Резистор $2R$ соединен с участком $cabd$ последовательно, поэтому их общее сопротивление:

$$R_{\text{общ3}} = \frac{42}{13}R + 2R = \frac{68}{13}R$$

Резистор сопротивлением R соединен с остальным участком параллельно, поэтому общее сопротивление всего участка:

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_{\text{общ3}} \cdot R}{R_{\text{общ3}} + R} = \frac{68R \cdot R}{13 \cdot \frac{68R}{13} + R} = \frac{68}{81}R$$

Тогда напряжение на всем участке

$$U_0 = I_0 R_{\text{общ}}$$

Ток в резисторе R :

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{I_0 R_{\text{общ}}}{R} = \frac{I_0 68}{81}$$

$$I = \frac{5 \cdot 68}{81} = 4,2 \text{ A}$$

Ответ: $I=4,2 \text{ A}$

**Задача 8.**

Два теплоизолированных сосуда соединены узкой трубкой с закрытым краном. Объем трубки пренебрежимо мал. В первом сосуде содержится 5 молей идеального газа со средней квадратичной скоростью молекул в 400 м/с, а во втором содержится 7 молей молекул газа со средней квадратичной скоростью молекул в 500 м/с. Все молекулы одинаковы. Какой будет средняя квадратичная скорость молекул после наступления состояния термодинамического равновесия, если открыть кран. Ответ округлите до целых.

Дано:

$$\nu_1 = 5 \text{ моль}$$

$$\nu_2 = 7 \text{ моль}$$

$$v_1 = 400 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 500 \text{ м/с}$$

$$v = ?$$

СИ

Решение:

По закону сохранения энергии:

$$E_1 + E_2 = E$$

Энергию всех молекул в первом сосуде можно представить как произведение числа молекул N_1 в этом сосуде и кинетической энергии каждой молекулы.

$$E_1 = N_1 \frac{m_0 v_1^2}{2}$$

аналогично:

$$E_2 = N_2 \frac{m_0 v_2^2}{2}$$

Тогда полная кинетическая энергия всех молекул в обоих сосудах, которая останется неизменной, когда откроют кран:

$$E = (N_1 + N_2) \frac{m_0 v^2}{2}$$

Подставим правую часть выражения:

$$N_1 \frac{m_0 v_1^2}{2} + N_2 \frac{m_0 v_2^2}{2} = (N_1 + N_2) \frac{m_0 v^2}{2}$$

$$N_1 v_1^2 + N_2 v_2^2 = (N_1 + N_2) v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{N_1 v_1^2 + N_2 v_2^2}{N_1 + N_2}}$$

но мы не знаем числа молекул в сосуде, но число молекул можно связать с числом молей:

$$N_1 = \nu_1 N_A, \quad N_2 = \nu_2 N_A$$



Тогда скорость будет определяться:

$$v = \sqrt{\frac{v_1 N_A v_1^2 + v_2 N_A v_2^2}{v_1 N_A + v_2 N_A}}$$

Сократим число Авогадро.

$$v = \sqrt{\frac{v_1 v_1^2 + v_2 v_2^2}{v_1 + v_2}}$$

Произведем численную подстановку

$$v = \sqrt{\frac{5 \cdot 400^2 + 7 \cdot 500^2}{5 + 7}} = 461 \text{ м/с}$$

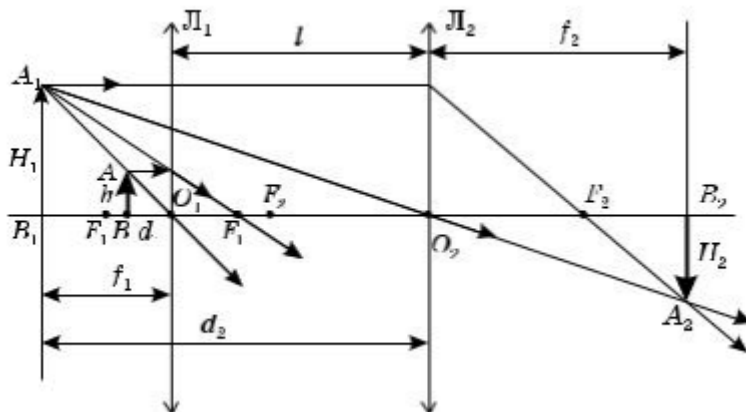
Ответ: $v=461 \text{ м/с}$

**Задача 9.**

Две собирающие линзы с фокусными расстояниями в 12 см и 27 см расположены на расстоянии в 50 см. На расстоянии в 9 см от левой линзы расположен предмет высотой 30 мм. Чему будет равна высота изображения предмета, даваемого системой этих линз? Ответ дайте в сантиметрах, округлите до десятых.

Дано:	СИ
$F_1 = 12 \text{ см}$	$= 0,12 \text{ м}$
$F_2 = 27 \text{ см}$	$= 0,27 \text{ м}$
$l = 50 \text{ см}$	$= 0,5 \text{ м}$
$d_1 = 9 \text{ см}$	$= 0,09 \text{ м}$
$h_1 = 30 \text{ мм}$	$= 0,03 \text{ м}$
$H_2 = ?$	

Решение:



Запишем формулу тонкой линзы применительно к линзам $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}$$

Запишем формулу увеличения:

$$\Gamma_1 = \frac{H_1}{h_1} = \frac{f_1}{d_1}, \quad \Gamma_2 = \frac{H_2}{h_2} = \frac{f_2}{d_2}$$

Из чертежа следует, что: $d_2 = f_1 + l$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{F_1}, \quad f_1 = \frac{d_1 F_1}{F_1 - d_1}$$

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{d_1 F_1}{d_1 (F_1 - d_1)}$$

$$H_1 = \frac{h_1 F_1}{F_1 - d_1}, \quad \text{и } d_2 = \frac{d_1 F_1}{F_1 - d_1} + l$$

Теперь найдем расстояние f_2 от линзы $\mathcal{L}_2$ до второго изображения $A_2 B_2$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2} - \frac{1}{d_2}, \quad f_2 = \frac{d_2 F_2}{F_2 - d_2}$$

$$H_2 = H_1 \frac{f_2}{d_2}, \quad H_2 = H_1 \frac{d_2 F_2}{(d_2 - F_2) d_2} = H_1 \frac{F_2}{(d_2 - F_2)},$$



Теперь подставим H_1 в уравнение для H_2 :

$$H_2 = \frac{h_1 F_1}{F_1 - d_1} \cdot \frac{F_2}{\left(\frac{d_1 F_1}{F_1 - d_1} + l - F_2\right)} = \frac{h_1 F_1 F_2}{d_1 F_1 + (l - F_2)(F_1 - d_1)}$$

Произведем численную подстановку:

$$H_2 = \frac{0,03 \cdot 0,12 \cdot 0,27}{0,09 \cdot 0,12 + (0,5 - 0,27)(0,12 - 0,09)} = 5,49 \text{ см}$$

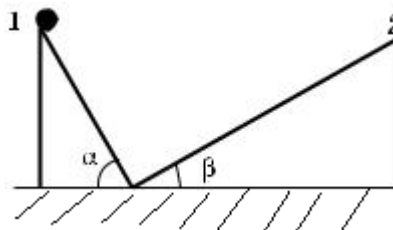
Ответ: $H_2 = 5,49 \text{ см}$

**Задача 10.**

На горизонтальную поверхность стола помещается конструкция, состоящая из двух наклонных желобов. Желоба расположены в одной плоскости. Левый желоб наклонен к горизонту под углом 60° , а правый — под углом 30° . С вершины левого желоба, расположенной на высоте 60 см над горизонтальной поверхностью, начинает скатываться без трения маленький шарик. С какой частотой он будет совершать колебания, двигаясь вверх и вниз по этим желобам? Ответ округлите до сотых. Ускорение свободного падения $9,8 \text{ м/с}^2$.

Дано:	СИ
$\alpha = 60^\circ$	
$\beta = 30^\circ$	
$h = 60 \text{ см}$	$= 0,6 \text{ м}$
$g = 9,8 \text{ м/с}^2$	
$\nu = ?$	

Решение:



Частота колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

T — время, в течение которого шарик скатится с вершины 1 и поднимется на вершину 2, затем скатится с вершины 2 и снова поднимется на вершину 1. Поскольку трение отсутствует, то сколько времени t_1 шарик скатывается с вершины 1 до основания, столько же он поднимается с основания до вершины 1. И то же самое можно сказать о времени t_2 подъема и таком же времени скатывания с вершины 2. Тогда период T равен:

$$T = 2 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 = 2(t_1 + t_2).$$

В прямоугольном треугольнике с катетом h и противолежащим ему углом α гипотенуза есть путь S_1 , пройденный шариком при спуске с вершины 1.

$$S_1 = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$

На этом пути на шарик действует скатывающая его сила $mg \sin \alpha$, являющаяся составляющей силы тяжести mg и равная по второму закону Ньютона произведению массы шарика m и его ускорения a_1 :

$$mg \sin \alpha = ma_1,$$

откуда

$$a_1 = g \sin \alpha.$$

$$S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$$

тогда



$$t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2h}{g \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}} = \frac{1}{\sin(\alpha)} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Конечная скорость шарика у основания при спуске с вершины 1 является его начальной скоростью при подъеме до вершины 2. Эту скорость v_1 найдем по формуле кинематики для случая равнозамедленного движения с ускорением a_2 к вершине 2, когда конечная скорость шарика равна нулю:

$$0 = v_x - a_2 t_2, \text{ по аналогии } a_2 = g \sin \beta$$

$$v_1 = g t_2 \sin \beta$$

И эта же скорость при равноускоренном спуске без начальной скорости с вершины 1 равна:

$$v_1 = a_1 t_1 = g t_1 \sin \alpha.$$

Приравняв правые части двух последних равенств, выразим время t_2 через уже найденное время t_1 :

$$g t_2 \sin \beta = g t_1 \sin \alpha,$$
$$t_2 = t_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$t_2 = \frac{1}{\sin(\alpha)} \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Подставим значения времени в уравнение для периода:

$$T = 2 \left(\frac{1}{\sin(\alpha)} \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{1}{\sin \beta} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Найдем частоту:

$$\nu = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}$$

Произведем численную подстановку:

$$\nu = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,6}{9,8}} \cdot \frac{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ}} = 0,45 \text{ Гц}$$

Ответ: $\nu = 0,45 \text{ Гц}$.