

ВАРИАНТ № 2-1

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)												
Итого проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	55	26	105	—	25	—	—	—	2	—	33
	Условие сложилось	тридцать три						Подпись проверяющего Валерий Д. —				
Итого итоговая	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	5	7	10	—	9	—	—	—	2	—	33
	Условие сложилось	тридцать три						Подпись проверяющего Алексей				

Вариант № 2-1

1. Задача 1. Рассмотрим первые 8 элементов последовательности: $x_1 = \frac{2}{3}$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_4 = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$x_7 = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

$$x_8 = 2 : \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Заметим, что 7 и 8 элементы идентичны ~~ранее~~ 1 и 2 элементу соответственно. Тогда 9 элемент будет равен 3 элементу, 10-й - 4-му, пока 13-й элемент опять не станет равен 1-му, а 14-й - 2-му. Тогда мы имеем дело с циклом длины 6, начинающимся с числа 2021. Число, кратное 6 - 2022, тогда $x_{2022} = \frac{2}{3}$, $x_{2023} = 2$, $x_{2024} = 3$

Ответ: $x_{2024} = 3$

58

2. Задача 2. Рассмотрим, какими числами могут быть x и y . ^{только} Если одно из них нечетно;

без ограничения общности, допустим, это число - x . Это невозможно, т.к. в таком случае, x^2 - нечет, xy - чет,

т.к. y - четное (по предположению). y^2 - четное, тогда сумма $x^2 + xy + y^2$ представляет собой сумму двух четных чисел и одного нечетного, а значит, $x^2 + xy + y^2 = 2k+1$, где k - натуральное число. Но $x^2 + xy + y^2 = 10 \cdot m$, где m - натуральное число.

(по условию). Тогда рассмотрим вариант, когда оба числа нечетны, например: x^2 - нечет, y^2 - нечет, xy - нечет, тогда например: $x^2 + xy + y^2$ - сумма трех нечетных чисел - нечетное число. Но это невозможно, т.к. по усл. $x^2 + xy + y^2 = 10 \cdot m$, число ^{нечетное} 10 делится на 2, а нечетное число не делится на 2. Тогда и x , и y - четные числа. Четные числа в квадрате, как известно, при делении на 4 дают остаток 0.

Вариант № 2-1

(целое n при делении на 4 дает остаток 1 или 0, тогда n^2 дает остаток $n^2 = 4 = 0$ при делении на четыре, $0^2 = 0$ при делении на 4, где n - натуральное).

тогда получаем: $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ $y^2 \equiv 0 \pmod{4}$

значит, что произведение двух целых натуральных чисел аналогично кратно 4, (т.е. среди делителей каждого из чисел есть двойка), $xy \equiv 0 \pmod{4}$

Тогда $x^2 + y^2 + xy \equiv 0 \pmod{4}$, Ч.Т.Д.

3. Рассмотрим последний анализ:

после вычитания из $\frac{x_6}{2}$ (где x_6 - цел-во керти, оставшийся после 6 анализа) 0,5 и керти, керти не остался.

тогда $\frac{x_6}{2} = 0,5$, $x_6 = 1$, тогда $x_6 = \frac{x_5}{2} = 0,5$, $\frac{x_5}{2} = 1,5$, $x_5 = 3$,

аналогично

$x_5 = \frac{x_4}{2} = 0,5$, $\frac{x_4}{2} = 3,5$, $x_4 = 7$, $\frac{x_3}{2} = x_4 + 0,5 = 7,5$, $x_3 = 15$

$\frac{x_2}{2} = 0,5 = 15$, $\frac{x_2}{2} = 15,5$, $x_2 = 31$, $\frac{x_1}{2} = 0,5 = 31$, $\frac{x_1}{2} = 31,5$, $x_1 = 63$,

$\frac{x_0}{2} = 0,5 = 63$, $\frac{x_0}{2} = 63,5$, $x_0 = 127$, в самом начале было 127 и керти.

105.

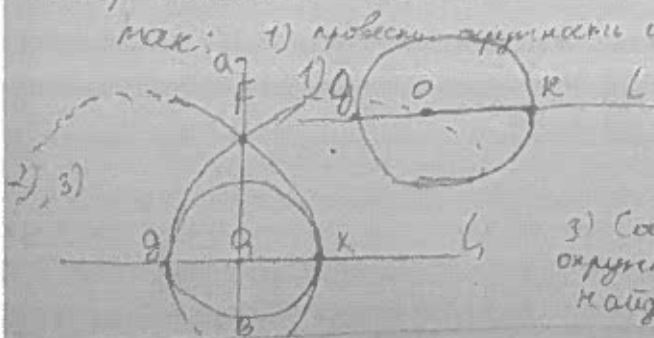
Ответ: 127.

5. Для решения задачи нам потребуется несколько алгоритмов. 1. Вставление перпендикуляра из точки F на KL делается так:

на: 1) провести окружность с центром в точке O с любым радиусом

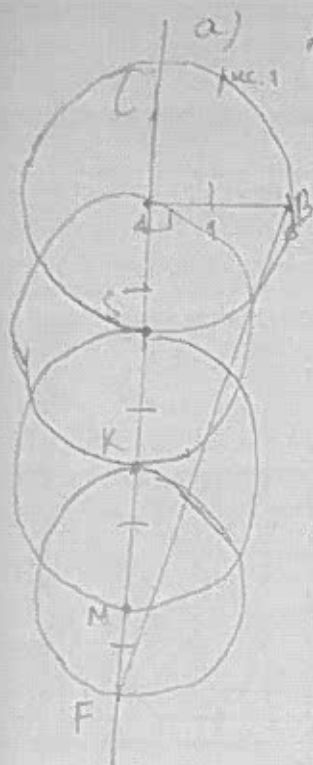
2) В точках пересечения прямой окружности с центром в этих точках и радиусами - диаметры изотайной окр. KD

3) Соединить точки пересечения окружностей F и B прямой FB - искомым перпендикуляром найдена (FB - искомая прямая)



Вариант № 2-1

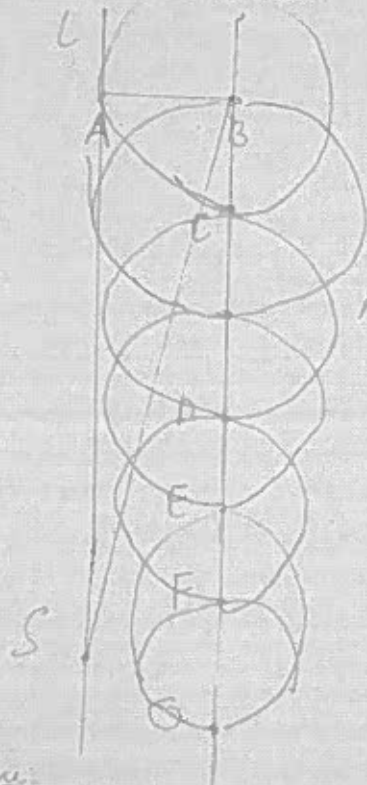
$FB \perp L$, т.е. FK, FG - радиусы окр. с одинаковыми диаметрами, $FK = FG$, $\triangle FKG - \text{п/о}$, $DK = OD$ - радиусы исходной окр., FO - медиана, $\angle FKO = 90^\circ$, FO - высота, ч.т.д.



а) Дано: $AB = 1$. Опустим перпендикуляр из A , наметим прямую, содержащую его. Теперь на прямой L с помощью окружностей $R = AB = 1$, отложим 4 равных отрезка, равных AB , как показано на рис. 1. $AF = 4 \cdot 1 = 4$, тогда по теореме Пифагора в прямоугольнике ABF

$$FB = \sqrt{AF^2 + AB^2} = \sqrt{17}, \quad BF - \text{искомый отрезок.}$$

б) Дано: $AB = 1$



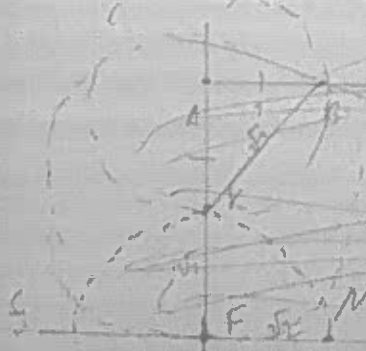
Восстановим перпендикуляр из A , проведем прямую, содержащую его. Теперь самое сделаем с проведенным из B перпендикуляром. Теперь с помощью окружностей отложим отрезков с радиусами AB . Тогда $BS = 6 \cdot AB = 6$. Проведем окружность с центром в точке B и $R = BS$. Найдем точку пересечения S этой окружности и прямой L .

Тогда $BS = BS = 6$ (как радиус), по теореме Пифагора в $\triangle ABS$
 $AS = \sqrt{BS^2 - AB^2} = \sqrt{36 - 1} = \sqrt{35}$, искомый отрезок - AS

Найти:

в) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$? Дано: $AB = 1$

Восстановим перпендикуляр из A , проведем прямую L , содержащую его. Отметим на прямой L отрезок $AK = AB$ с помощью окр. с центром в точке A и $R = AB$. Тогда по теореме Пифагора $KB = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \sqrt{2}$ (в $\triangle ABK$). Отметим F - точку пересечения прямой L и окр. с центром в точке K и $R = KB = \sqrt{2}$. Тогда $KF = \sqrt{2}$.



Вариант № 2-1

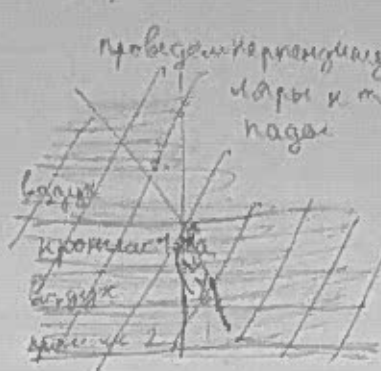
9.

Дано: $\angle d = 60^\circ$

$n_k = 1,5$

$a = 3 \text{ см}$

$a_2 = 1 \text{ см}$



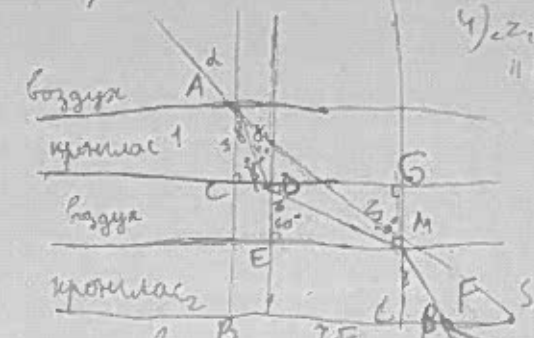
1) $n_k = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{1}{1,5} = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{1}{1,5} = \frac{3 \cdot 10^8}{v} \Rightarrow v = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

2) $\beta = 90^\circ - \alpha = 30^\circ, \alpha = 90^\circ - \beta = 60^\circ$

3) $n_k = 1,5 = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{1}{1,5} = \frac{c}{v} \Rightarrow v = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

$\angle Z = \beta \cdot 1,5 = 30^\circ \cdot 1,5 = 45^\circ$

4) $\angle Z_1 = \angle Z_2 = 60^\circ$ и $\angle CME = 180^\circ - \angle Z_1 - \angle Z_2 = 60^\circ$. Аналогично построим лучи через точку C и точку E.



Учитывая то, что в $\triangle ABC \angle A = \angle d$, как вертикальный и $\alpha = 60^\circ$, тогда $\angle S = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. В прямоугольном $\triangle ASB$ напротив угла 30° лежит сторона $AB = 3 + 3 + 1 = 7$, в 2 раза меньшая, чем гипотенуза, тогда $AS = 14$, $BS = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{105} = 7\sqrt{3}$

в $\triangle ADC$ по теореме $\sin$, $\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{CD}{\sin 50^\circ} \Rightarrow CD = CF = \frac{3 \sin 40^\circ}{\sin 50^\circ}$

в $\triangle DME$ по теореме $\sin$ $\frac{DE}{\sin 60^\circ} = \frac{EM}{\sin 30^\circ} \Rightarrow EM = \frac{DE \cdot \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{3 \sin 40^\circ}{\sin 50^\circ} \cdot \sin 60^\circ}{\frac{1}{2}} = 6 \cdot \frac{\sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\sin 50^\circ}$

таким образом, $FS = BS - CD - EM - LS = 7\sqrt{3} - \frac{3 \sin 40^\circ}{\sin 50^\circ} - \frac{6 \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\sin 50^\circ} - \sqrt{3} = 6\sqrt{3} - \frac{6 \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 6\sqrt{3} - 6 \operatorname{tg} 40^\circ = 6 \cdot (\sqrt{3} - \operatorname{tg} 40^\circ)$

Ответ: $6 \cdot (\sqrt{3} - \operatorname{tg} 40^\circ)$