



ВАРИАНТ № 2-1

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)												
Первая проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	1	8	10	0	15	3	2	8	5	2	54
	Σ баллов прописью	пятьдесят четыре						Подпись проверяющего		<i>Д. Блинов</i>		
Вторая проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	1	8	10	0	15	3	6	8	5	2	58
	Σ баллов прописью	пятьдесят восемь						Подпись проверяющего		<i>А. А. А.</i>		

Задача 1.

$\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \dots \cdot \lg n}{10^n}$ Представим в следующем виде:

$$\frac{\lg 2}{10} \cdot \frac{\lg 3}{10} \cdot \frac{\lg 4}{10} \cdot \dots \cdot \frac{\lg(n-1)}{10} \cdot \frac{\lg n}{10}$$

Заметим, что если $\frac{\lg(n+1)}{10} > 1$, то значение выражения при $k=n$ меньше, чем при $k=n+1$, если $\frac{\lg(n+1)}{10} < 1$, то значение выражения при $k=n$ больше, чем при $k=n+1$. Значит, значение выражения минимально при n , удовлетворяющему следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{\lg n}{10} < 1 \\ \frac{\lg(n+1)}{10} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg n < 10 \\ \lg(n+1) > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg n < \lg e^{10} \\ \lg(n+1) > \lg e^{10} \end{cases} \begin{cases} n < 10^{10} \\ n+1 > 10^{10} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ наименьшее значение выражения достигается при $n = \lfloor e^{10} \rfloor$, где запись $\alpha = \lfloor \beta \rfloor$ означает, что целая часть числа β равна α , т.е. при $\beta = 4,7$: $\alpha = 4$

Ответ: $a = \lfloor e^{10} \rfloor$

$$\lg n = \log_{10} n$$

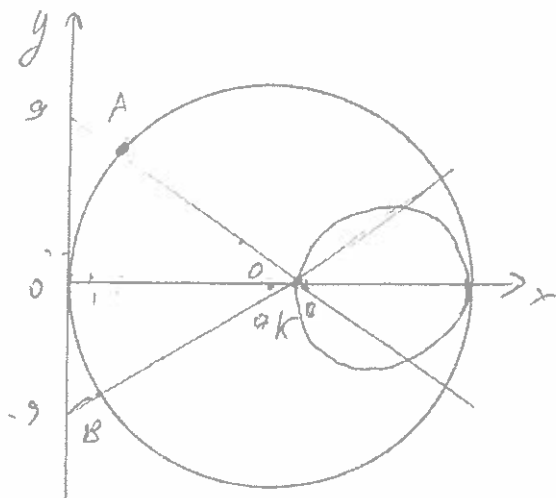
рассмотрены
не все случаи

15



Вариант № 2-1

Задача 2.



Заметим, что максимальная

площадь сечения кабель-канала

дост-ся при следующем образе:

ок-сть трубы и провода кас-ся
внутренним образом.

Чтобы найти длину стороны

кабель-канала заданной крив

сис. коор. как показано на рис.

уравнение ок-сти с ц. в O : $(x-17)^2 + y^2 = 17^2$

уравнение прямой AB : $y = 9 - \frac{1}{2}x$

KB : $y = -9 + \frac{1}{2}x$

Чтобы найти длину a достаточно найти ординату P : B :

$$\begin{cases} (x-17)^2 + y^2 = 17^2 \\ 2y+11+y^2 = 17^2 \\ x=2y+18 \end{cases}$$

$$4y^2 + 4y + 1 + y^2 = 289$$

$$5y^2 + 4y - 288 = 0$$

$$D = 5776 \quad \sqrt{D} = 76 \quad y_1 = 7.2$$

$$y_2 = -8 - \text{искомая величина}$$

$$a = 2y_2 = 16 \Rightarrow S_{\max} = a^2 = 256$$

Ответ: 256.

85



Вариант № 2-1

Задача 3.

$$\frac{y(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1)}{x(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y^2)} = -1$$

$y=0$ и $x=0$ не являются решениями

$$y\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - y = -x + x\frac{\sqrt{2}}{2}y^2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}xy(x-y) + x - y = 0$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}xy + 1)/(x-y) = 0$$

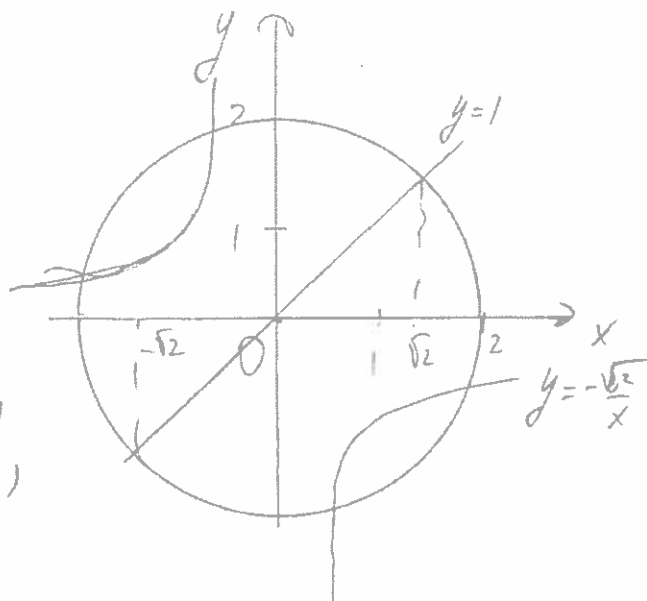
$$\frac{\sqrt{2}}{2}xy = -1$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{x}$$

$$y = x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{x} \end{cases}$$

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0$$

$$t = x^2$$

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$x_2 = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}, y_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, y_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$x_4 = -\sqrt{2 + \sqrt{2}}, y_4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

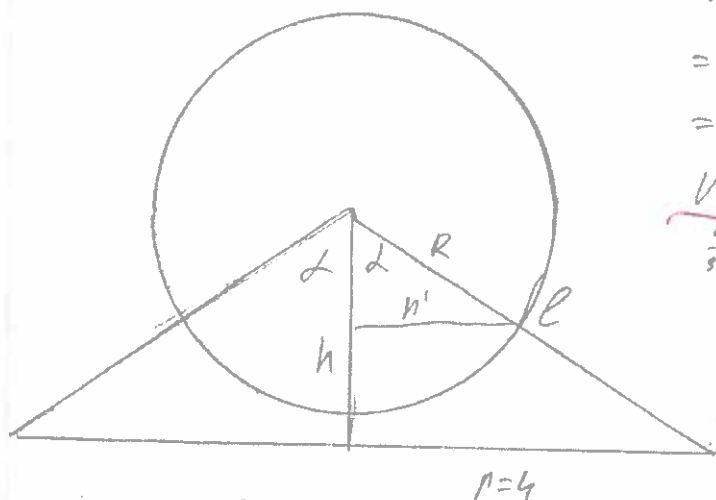
Ответ: $(\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}); (\sqrt{2 - \sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}); (-\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}); (\sqrt{2 + \sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}); (-\sqrt{2 + \sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}})$

105



Вариант № 2-1

Задача 4.



$$e = \frac{r}{\sin \alpha} \quad h = r \cot \alpha$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} h \cdot S_{\text{осн}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{16\sqrt{3}}{9} \pi$$

$$\Rightarrow V_{\text{ш.}} = \frac{1}{2} V_{\text{конуса}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \pi$$

$$V_{\text{ш.}} = \frac{1}{3} V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} \pi \Rightarrow R^3 = 2\sqrt{3}$$

$$R^3 = 2\sqrt{3} \quad R = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \quad R = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \quad R = 2\sqrt[3]{3}$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{3} S_{\text{шара}} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{16\pi}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \pi$$

Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{3} \pi$.

Задача 5.

Пусть спортсмен изумил n маршрутов, тогда $32-n$ маршрутов не изумил.

Если спортсмену попадутся 2 изумленных маршрута, то он пройдет их с вероятностью $1 \cdot 1 = 1$. Если попадутся два неизумленных, то он пройдет их с вероятностью $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Если попадутся 1 изумленный и 1 неизумленный, то с вероятностью $1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Всего вариантов выбора маршрута: $32 \cdot 31$

2 изумленных: $(32-n)(31-n)$ 2 неизумленных: $n(n-1)$ 1 изумл. 1 неизумл.: $2n(32-n)$

Таким образом можно удовлетворять кр-ству:

$$\frac{n(n-1) + 2n(32-n) \cdot \frac{1}{3} + (32-n)(31-n) \cdot \frac{1}{9}}{32 \cdot 31} \geq 0,5$$

получим, что $n > 18 \Rightarrow$ минимальное число n , удовлетворяющее условию: $n = 19$

Ответ: $n = 19$.



Вариант № 2-1

Задача 6.

I случай:



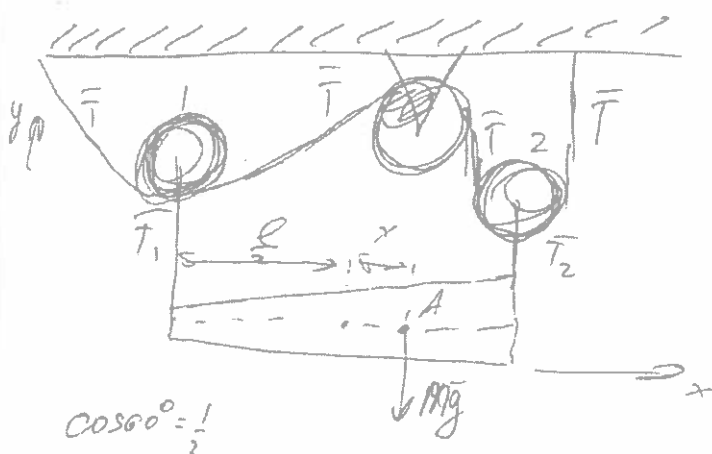
Заметим, что т.к. углы падения равен углу отражения, то $\triangle AOB \sim \triangle MON$

$\Rightarrow AM = MB$, где OM - медиана
 $OM \perp AB$, $OM \perp ON \Rightarrow AM \parallel ON$,
 $AN \parallel OM \Rightarrow AM = ON = MB = 90 \text{ см}$,
т.к. $AB = 180 \text{ см}$

$\Rightarrow h_1 = MO = 90 \text{ см} \Rightarrow h = \frac{h_1}{1.5} = 60 \text{ см}$

Ответ: 60 см.

Задача 7.



$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

по II ЗН для стержня на ось y

$$T_1 + T_2 = mg$$

по II ЗН для блока 2 на ось y: $T_2 = 2T$

для блока 1 на ось y: $T_1 = 2T \cos 60^\circ = T$

т.к. блок в равновесии, по правилу моментов для т. А:

$$T_1 \left(\frac{l}{2} + x \right) = T_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

$$T_1 \frac{l}{2} + T_1 x = T_2 \frac{l}{2} - T_2 x$$

$$x(T_1 + T_2) = (T_2 - T_1) \frac{l}{2}$$

$$x(T + 2T) = (2T - T) \frac{l}{2}$$

$$x \cdot 3T = T \frac{l}{2} \quad 3x = \frac{l}{2} \quad x = \frac{l}{6}$$

Ответ) $x = \frac{l}{6}$



Вариант №2-1

Задача 8.

Дано:

$$T = 100^\circ\text{C} = 373\text{K}$$

$$P = 24930\text{Па}$$

$$h_{\text{взг}} = 37,3\text{м}$$

$$\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$$

$h_{\text{взг}}?$

Решение:

По уравнению Менделеева-Клапейрона: $PV = \nu RT$ $V = S \cdot h_{\text{взг}}$

$$\Rightarrow V = \frac{P \cdot S \cdot h_{\text{взг}}}{RT}$$

$$m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} \cdot V = \rho_{\text{в}} \cdot S \cdot h_{\text{взг}} \quad m_{\text{в}} = \mu_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \nu$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{в}} \cdot S \cdot h_{\text{взг}} = \mu_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \frac{P \cdot S \cdot h_{\text{взг}}}{RT}$$

$$h_{\text{взг}} = \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}} \cdot P \cdot h_{\text{взг}}}{RT + \rho_{\text{в}}}$$

$$h_{\text{взг}} = \frac{0,018 \cdot 24930 \cdot 37,3}{8,31 \cdot 373 \cdot 1000} = \frac{0,018 \cdot 0,1 \cdot 3000}{1000} = 0,0018 \cdot 3 = 0,0054\text{м} = 0,54\text{мм} +$$

Ответ: 0,54 мм

Задача 9.

$$m_0 = 4\text{г}$$

$$m_1 = 2\text{г}$$

$$v_0$$

Решение:

По 3СЗ для 1-го столкновения: $m_1 v_1 = (m_0 + m_1) v_1'$ $v_1' = \frac{m_1 v_0}{m_0 + m_1} = \frac{v_0}{3}$

$$\frac{KA_1^2}{2} = E_{\text{н, макс}} = E_{\text{к, макс}} \quad \text{т.е.} \quad \frac{KA_1^2}{2} = \frac{(m_0 + m_1) v_1'^2}{2}$$

$$\frac{KA_1^2}{2} = \frac{(m_0 + m_1) \cdot \frac{v_0^2}{9}}{2} \quad \text{при} \quad A = \frac{A_1}{2} \quad E_{\text{к}} = E_{\text{н, макс}} - E_{\text{н}} = \frac{KA_1^2}{8} - \frac{KA_1^2}{8} = \frac{7KA_1^2}{8}$$

$$\frac{7(m_0 + m_1) v_0^2}{8} = \frac{(m_0 + m_1) v_1'^2}{2} \quad \frac{7 \cdot v_0^2}{4 \cdot 9} = \frac{v_1'^2}{2} \quad v_1' = \frac{v_0 \sqrt{7}}{6}$$

По 3СЗ для 2-го столкновения: $(m_0 + m_1) v_1' = (m_0 + 2m_1) v_2'$

$$\frac{6 \cdot v_0}{3} = 8 \cdot v_2' \quad v_2' = \frac{v_0}{4}$$

$$E_{\text{н, макс}} = E_{\text{к, макс}} \Rightarrow \frac{KA_2^2}{2} = \frac{(2m_1 + m_0) v_2'^2}{2}$$

$$\frac{KA_2^2}{2} = \frac{(2m_1 + m_0) \cdot \frac{v_0^2}{16}}{2} \quad \text{при} \quad A = \frac{A_2}{2} \quad E_{\text{к}} = \frac{7KA_2^2}{8} = \frac{7(2m_1 + m_0) v_0^2}{8}$$

$$\text{т.е.} \quad \frac{7(2m_1 + m_0) v_0^2}{8} = \frac{(2m_1 + m_0) v_2'^2}{2} \quad \frac{7 \cdot v_0^2}{4 \cdot 4} = \frac{v_2'^2}{2} \quad v_2' = \frac{v_0 \sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{v_2'}{v_1'} = \frac{\frac{v_0 \sqrt{7}}{4}}{\frac{v_0 \sqrt{7}}{6}} = \frac{6}{4} = 1,5$$

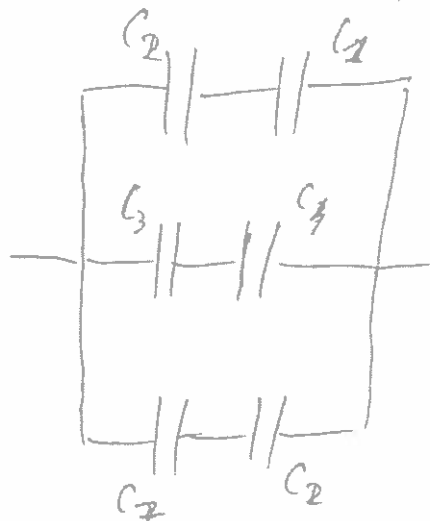
Ответ: 1,5.



Вариант № 2-1

Задача 10.

Итоговая схема:



d - толщина диэлектрика $a = 10 \text{ см}$
+ - клеммы

Упрощенная схема:

2



$$C_0 = \frac{C_5 C_6}{C_5 + C_6}$$

$$C_5 = \frac{\epsilon_0 \cdot 3 \cdot 100}{d} = \frac{300 \epsilon_0}{d}$$

$$C_6 = \frac{\epsilon_0 \cdot 5 \cdot 100}{d} = \frac{500 \epsilon_0}{d}$$

$$C_0 = \frac{1500 \epsilon_0}{800} = \frac{15}{8} \epsilon_0$$

$$C_0' = \frac{1500}{8} \cdot \frac{18}{100} \cdot \frac{\epsilon_0}{d} = 15 \cdot 6 \frac{\epsilon_0}{d} = 90 \frac{\epsilon_0}{d} = 180 \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot 3 \cdot 10 \cdot x}{d} = \frac{30x \epsilon_0}{d}$$

$$C_2 = \frac{30(10-x) \epsilon_0}{d} = 60(10-x) \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$C_2 = \frac{10x \epsilon_0}{d} = 20x \frac{\epsilon_0}{d} = 20x \frac{\epsilon_0}{a}$$

$$C_3 = \frac{30(10-2x) \epsilon_0}{d} = 60(10-2x) \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$C_7 = \frac{50(10-x) \epsilon_0}{d} = 100(10-x) \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$C_4 = \frac{50(10-2x) \epsilon_0}{d} = 100(10-2x) \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$C_{21} = \frac{C_2 C_1}{C_2 + C_1} = \frac{120(10-x)x \epsilon_0}{600 - 40x} \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{600(10-2x)^2}{160(10-2x)} = \frac{600(10-2x)}{160} \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$C_{72} = \frac{C_7 C_2}{C_7 + C_2} = \frac{200x(10-x) \epsilon_0}{1000 - 80x} \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$\frac{200(10-x)x}{600-40x} + \frac{600(10-2x)}{160} + \frac{200x(10-x)}{1000-80x} \frac{\epsilon_0}{d} = 180 \frac{\epsilon_0}{d}$$

$$\frac{20(10-x)}{30-2x} + \frac{75(10-2x)}{20} + \frac{5x(10-x)}{25-2x} = 18$$

$$(10-x)(150-11x)x + 15(10-2x)(15-x)(25-2x) = 4 \cdot 18(15-x)(25-2x) \Rightarrow x \approx 4,5 \text{ см}$$

Ответ: 4,5 см