



ВАРИАНТ № 2-1

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)												
Первая проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	5	0	10	05	05	—	3	8	8	—	34
	Σ баллов прописью	тридцать четыре						Подпись проверяющего		<i>А. Билев</i>		
Вторая проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	5	0	10	0	0	—	3	10	10	—	38
	Σ баллов прописью	Тридцать восемь						Подпись проверяющего		<i>А. Билев</i>		

Задача 3

Окружность $R=2$ с центром в начале координат описывается уравнением

окружности: $x^2 + y^2 = 4$

Решим соотношения:

$$\frac{y(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1)}{x(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y^2)} = -1$$

$$\frac{y(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1) + x(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y^2)}{x(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y^2)} = 0$$

$$\begin{cases} x(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y^2) - y(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 \neq 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \quad x - \frac{\sqrt{2}}{2}xy^2 - y + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2y = 0$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}xy^2 + y(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2) - x = 0$ из системы $x \neq 0$, тогда решим через 0

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2)^2 + 4\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 = (1 - \sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4) + 2\sqrt{2}x^2 = \\ &= \frac{x^4}{2} + \sqrt{2}x^2 + 1 = (\frac{\sqrt{2}x^2}{2})^2 + \frac{2\sqrt{2}x^2}{2} + 1^2 = (\frac{\sqrt{2}x^2}{2} + 1)^2 \end{aligned}$$



Вариант № 2-1

$$y_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1 + \frac{\sqrt{2}x^2}{2} + 1}{\sqrt{2}x} = \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{2}x} = x$$
$$y_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1 - \frac{\sqrt{2}x^2}{2} - 1}{\sqrt{2}x} = \frac{-2}{\sqrt{2}x} = -\frac{\sqrt{2}}{x}$$

(3)

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}y^2 \neq 1$$

$$y^2 \neq \frac{2}{\sqrt{2}} \neq \sqrt{2}$$

$$y \neq \sqrt{\sqrt{2}}$$

$$y \neq -\sqrt{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{x} \\ x \neq 0 \\ y \neq \sqrt{\sqrt{2}} \\ y \neq -\sqrt{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Необходимо найти точки, в которых $y^2 + x^2 = 4$ совпадает с системой.

$$\textcircled{1} \begin{cases} y^2 + x^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \quad x = -\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2} \quad y = -\sqrt{2}$$

$$\underline{(\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})} +$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y^2 + x^2 = 4 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{x} \end{cases}$$

$$\frac{2}{x^2} + x^2 = 4$$

$$\frac{x^4 + 2 - 4x^2}{x^2} = 0$$



Вариант № 2-1

т.к. $x^2 = 0$, то

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0$$

Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 2 = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

$$t_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$t_2 = 2 - \sqrt{2}$$

Обратная замена:

$$x_1^2 = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_2^2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2 + \sqrt{2}}; -\sqrt{2 - \sqrt{2}})$$

$$x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$x_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$(-\sqrt{2 + \sqrt{2}}; \sqrt{2 - \sqrt{2}})$$

$$x_5 = -\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$x_6 = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{2 - \sqrt{2}}; -\sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

$$y_1 = -\sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}}$$

$$y_3 = -\sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}}$$

$$(-\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

$$= -\sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})}{4 - 2}} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2}} = -\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$y_4 = \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Найдем 6 точек, удовлетворяющих условию.

108

Ответ: точки $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2 + \sqrt{2}}; -\sqrt{2 - \sqrt{2}})$,
 $(-\sqrt{2 + \sqrt{2}}; \sqrt{2 - \sqrt{2}})$, $(\sqrt{2 - \sqrt{2}}; -\sqrt{2 + \sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \sqrt{2 + \sqrt{2}})$

Задача 2.

Опишем трубу и провоз таким образом окружности, чтобы
ни одна точка не располагалась в канале координат.

$$(y - 87)^2 + x^2 = 17^2$$

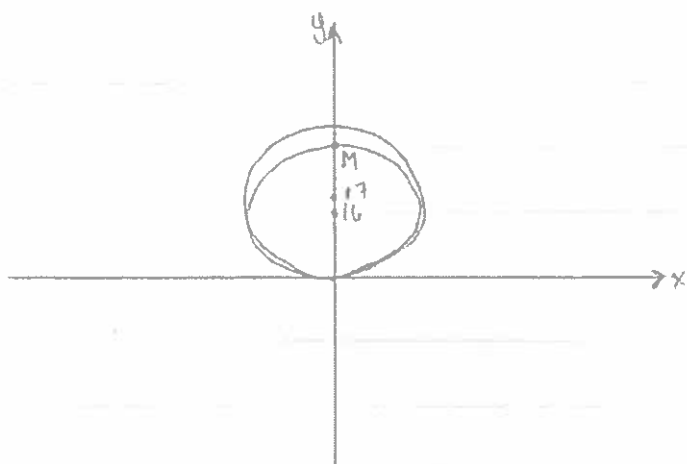
$$(y - 16)^2 + x^2 = 16^2$$

модель составлена
неверно

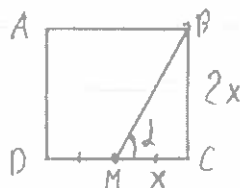
Изобразим на графике:



Вариант № 2-1



Т. Н - вершина ~~меньшей~~ меньшей окружности и
Т. на квадрате (кабель-канал):



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{x} = 2$$

уравнение прямой задается $y = kx + b$ ($k = \operatorname{tg} \alpha$), α - угол наклона прямой

Выведем формулу для МВ: $y = 2x + 32$ ($b = 2d = 32$)

Решим систему, чтобы найти Т. В:

$$\begin{cases} y = 2x + 32 \\ (y - 17)^2 + x^2 = 17^2 \end{cases}$$

$$(2x + 32 - 17)^2 + x^2 = 17^2$$

$$(2x + 15)^2 + x^2 = 17^2$$

$$(2x + 15)^2 + x^2 = 17^2$$

$$4x^2 + 60x + 225 + x^2 = 289$$

$$5x^2 + 60x - 64 = 0$$

$$D = 60^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-64) = 3600 + 1280 = 4880 = 2^4 \cdot 5 \cdot 61$$

$$x_1 = \frac{-60 + 4\sqrt{5 \cdot 61}}{10} = \frac{-30 + 2\sqrt{305}}{5}$$

Т. и координата x для Т. В > 0 , то $x = \frac{-30 + 2\sqrt{305}}{5}$

$$x_2 = \frac{-30 - 2\sqrt{305}}{5}$$

$$MC = B_x - M_x = \frac{2\sqrt{305} - 30}{5} - 0 = \frac{2\sqrt{305} - 30}{5}$$

$$DC = 2MC$$

$$S = DC^2 = 4MC^2 = \frac{4(2\sqrt{305} - 30)^2}{25} = \frac{4(4 \cdot 305 - 120\sqrt{305} + 900)}{25} = \frac{4(2120 - 120\sqrt{305})}{25} = \frac{4(424 - 24\sqrt{305})}{5} \text{ (ег}^2\text{)}$$

Ответ: $S = \frac{4(424 - 24\sqrt{305})}{5} \text{ ег}^2$

ОБ



Вариант № 2-1

Задача 1

Обозначим величину функции $f(n) = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \dots \cdot \lg n}{10^n}$

Найдите n , для которого выполняется условие:

$$f(n+1) > f(n)$$

$$\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \dots \cdot \lg n \cdot \lg(n+1)}{10^{n+1}} > \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \dots \cdot \lg n}{10^n}$$

$$\frac{\lg(n+1)}{10^{n+1}} > \frac{1}{10^n}$$

$$\lg(n+1) > 10$$

$$\lg(n+1) > \lg 10^{10}$$

$$n+1 > 10^{10}$$

$$n > 10^{10} - 1$$

Сравним $f(10^{10}-1)$ и $f(10^{10})$

$$f(10^{10}-1) = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \dots \cdot \lg(10^{10}-1)}{10^{10^{10}-1}}$$

$$f(10^{10}) = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \dots \cdot \lg(10^{10}-1) \cdot \lg 10^{10}}{10^{10^{10}}}$$

$$\frac{f(10^{10}-1)}{f(10^{10})} = \frac{10^{10^{10}}}{\lg 10^{10} \cdot 10^{10^{10}-1}} = \frac{10^{10^{10}-10^{10}+1}}{10 \cdot \lg 10} = \frac{10}{10} = 1$$

Значит наименьшее значение ф.принимает при $n = 10^{10} - 1$

$$n = 10^{10}$$

Ответ: $n_1 = 10^{10} - 1$

$$n_2 = 10^{10}$$

58

Задача 8.

Дано:

$$T = 373 \text{ K}$$

$$\rho = 999.30 \text{ кг/м}^3$$

$$V_{\text{н}} \downarrow$$

$$h_0 = 373 \text{ м}$$

$$T = \text{const}$$

$$\mu = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$\rho_0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$h = ?$$

Решение:

$$\rho V_{\text{н}} = \frac{m}{\mu} RT$$

$$m = \frac{\rho V_{\text{н}} \mu}{RT} \quad \text{Т.к. } m = \text{const, то } m = \rho_0 V_0$$



Вариант № 2-1

$$\frac{pV_n H_n}{RT} = p_0 V_0$$

$$\frac{p S k_0 H_n}{RT} = p_0 S h$$

$$h = \frac{p_0 H_n}{RT p_0}$$

$$h = \frac{2495 \cdot 3.25 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8.31 \cdot 375 \cdot 1000} = \frac{2495 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8.31 \cdot 1000} = \frac{2495 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{831 \cdot 10} = \frac{54 \cdot 10^{-9}}{10} = 54 \cdot 10^{-9} \text{ (м)}$$

Ответ: $h = 54 \cdot 10^{-9} \text{ м}$

8 (10)

Задача 9.

Дано:

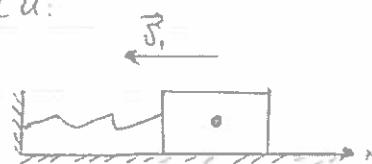
$$m = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$m_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$F_{\text{тр}} = 0$$

Решение:

Система замкнута, применим ЗСИ:
для первой пули $\vec{v} = 0$



$$-m_0 v_0 = -(m + m_0) v_1$$

$$m_0 v_0 = (m + m_0) v_1$$

$$2 \cdot 10^{-3} v_0 = (2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3}) v_1$$

$$2 v_0 = 6 v_1$$

$$v_0 = 3 v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{v_0}{3}$$

$$\frac{v_2'}{v_1'} = ?$$

для второй пули:



$$-(m + m_0) v_1 - m_0 v_0 = -(m + 2m_0) v_2$$

$$(m + m_0) v_1 + m_0 v_0 = (m + 2m_0) v_2$$

$$6 \cdot 10^{-3} v_1 + 2 \cdot 10^{-3} v_0 = 8 \cdot 10^{-3} v_2$$

$$6 v_1 + 2 v_0 = 8 v_2$$

$$3 v_1 + v_0 = 4 v_2$$

$$3 v_1 + 3 v_1 = 4 v_2$$

$$6 v_1 = 4 v_2 = 6 \frac{v_0}{3} = 2 v_0 \Rightarrow v_2 = \frac{v_0}{2}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$



Вариант № 2-1

Энергия в системе постоянна, значит:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{k x_{1 \text{ макс}}^2}{2} = \frac{(m+m_0) \dot{y}_1^2}{2} = \frac{k x_1^2}{2} + \frac{(m+m_0) \dot{y}_1'^2}{2} & x_1 = \frac{x_{1 \text{ макс}}}{2} \\ E_2 = \frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{2} = \frac{(m+2m_0) \dot{y}_2^2}{2} = \frac{k x_2^2}{2} + \frac{(m+2m_0) \dot{y}_2'^2}{2} & x_2 = \frac{x_{2 \text{ макс}}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{k x_{1 \text{ макс}}^2}{2} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \dot{y}_1^2}{2} = \frac{k x_{1 \text{ макс}}^2}{2 \cdot 4} + \frac{6 \cdot 10^{-3} \dot{y}_1'^2}{2}$$

$$\frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{2} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \dot{y}_2^2}{2} = \frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{2 \cdot 4} + \frac{8 \cdot 10^{-3} \dot{y}_2'^2}{2}$$

$$\begin{cases} k x_{1 \text{ макс}}^2 = 6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\dot{y}_0^2}{9} = \frac{k x_{1 \text{ макс}}^2}{4} + 6 \cdot 10^{-3} \dot{y}_1'^2 \\ k x_{2 \text{ макс}}^2 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\dot{y}_0^2}{4} = \frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{4} + 8 \cdot 10^{-3} \dot{y}_2'^2 \end{cases}$$

$$\frac{x_{1 \text{ макс}}^2}{x_{2 \text{ макс}}^2} = \frac{6 \cdot 4}{8 \cdot 9} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_{1 \text{ макс}} = \frac{\sqrt{3}}{3} x_{2 \text{ макс}}$$

$$\begin{cases} \frac{2 \cdot \dot{y}_0^2 \cdot 10^{-3}}{3} = \frac{3 k x_{2 \text{ макс}}^2}{9 \cdot 4} + 6 \cdot 10^{-3} \dot{y}_1'^2 \\ 2 \cdot 10^{-3} \dot{y}_0^2 = \frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{4} + 8 \cdot 10^{-3} \dot{y}_2'^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{12} + 6 \cdot 10^{-3} \dot{y}_1'^2}{\frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{4} + 8 \cdot 10^{-3} \dot{y}_2'^2}$$

80

$$\frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{4} + 8 \cdot 10^{-3} \dot{y}_1'^2 = \frac{k x_{2 \text{ макс}}^2}{4} + 18 \cdot 10^{-3} \dot{y}_1'^2$$

$$8 \dot{y}_1'^2 = 18 \dot{y}_1'^2$$

$$4 \dot{y}_2'^2 = 9 \dot{y}_1'^2$$

$$\frac{\dot{y}_2'^2}{\dot{y}_1'^2} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Ответ: $\frac{\dot{y}_2'}{\dot{y}_1'} = \frac{3}{2}$

$$\frac{\dot{y}_2'}{\dot{y}_1'} = \frac{3}{2}$$



Вариант № 2-1

Задача 7.

Дано: Решение

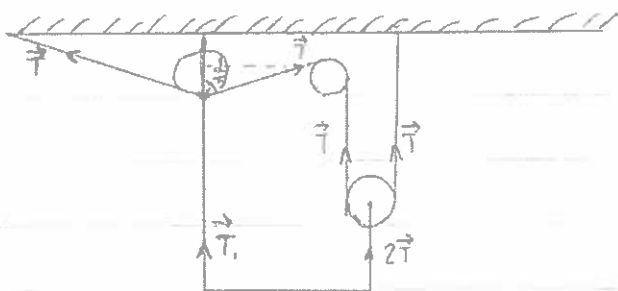
$$\angle = 120^\circ$$

$\Delta x = ?$

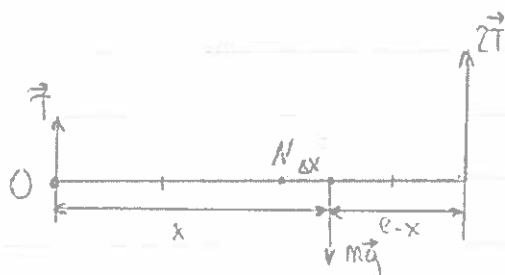
Сделаем рисунок, покажи действующие силы.

Сила натяжения нити между блоками постоянна, т.к. блоки легкие, и равно T .

$$T_1 = 2T \cdot \cos \frac{\angle}{2} = T$$



Рассмотрим отдельно нить действующую на стержень (длина которого ℓ)



$$mg = T + 2T$$

$mg = 3T$ (1) - векторная сумма всех сил в
вдоль оси = 0.

Относительно т. O: $2T\ell = mgx$

$$2T\ell = 3Tx$$

$$2\ell = 3x \Rightarrow x = \frac{2\ell}{3}$$

Пусть N - середина ℓ , тогда $\Delta x = x - ON = \frac{2\ell}{3} - \frac{\ell}{2} = \frac{4\ell - 3\ell}{6} = \frac{\ell}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$ длины стержня или $\frac{\ell}{6}$



Вариант № 2-1

Задача 4

Дано:

$$V_1 = 2V_2$$

$$r_1 = 4$$

$$\angle = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

Решение:

~~$$V = \frac{\pi r^3}{3}$$~~

$$V = \frac{\pi r^3}{3}$$

$$V_1 = \frac{\pi r_1^3}{3}$$

$$V_2 = \frac{\pi r_2^3}{3}$$

~~$$\frac{r_1^3}{3} = \frac{2r_2^3}{3}$$~~

$$r_1^3 = 2r_2^3$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{r_1^3}{2}} = r_1 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = r_1 \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \frac{r_1}{2} \sqrt[3]{4}$$

$$r_2 = 2 \sqrt[3]{4}$$

$$S = \pi r^2 + 4\pi \sqrt[3]{16} + 4\pi \sqrt[3]{8} = 8\pi \sqrt[3]{2}$$

Ответ: $S = 8\pi \sqrt[3]{2}$

не учтен
общий шаровый
сегмент

05

Задача 5

Запишем условие, следующее из условия задачи

$$\left(\frac{x}{32} + \frac{1}{3} \left(\frac{32-x}{32} \right) \right) \left(\frac{x}{31} + \frac{1}{3} \left(\frac{31-x}{31} \right) \right) \geq 0.5$$

где x - кол-во
маршрутов, изученных
спортсменом

$$\left(\frac{3x}{96} + \frac{1}{3} - \frac{x}{96} \right) \left(\frac{3x}{93} + \frac{1}{3} - \frac{x}{93} \right) \geq 0.5$$

$$\left(\frac{2x}{96} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2x}{93} + \frac{1}{3} \right) \geq 0.5$$

$$\frac{4x^2}{96 \cdot 93} + \frac{2x}{96 \cdot 3} + \frac{2x}{93 \cdot 3} + \frac{1}{9} \geq 0.5$$

$$\frac{4x^2}{96 \cdot 93} + \frac{2x}{3} \left(\frac{1}{96} + \frac{1}{93} \right) + \frac{1}{9} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\frac{4x^2}{96 \cdot 93} + \frac{2x \cdot 189}{3 \cdot 96 \cdot 93} + \frac{7}{18} \geq 0$$

$$4x^2 + 126x - \frac{7 \cdot 96 \cdot 93}{18} \geq 0$$

$$2x^2 + 63x - \frac{7 \cdot 24 \cdot 93}{9} \geq 0$$

$$2x^2 + 63x - 7 \cdot 8 \cdot 31 \geq 0$$

$$D = 63^2 + 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 31 = 4 \cdot 7^2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 31 = 3969 + 64 \cdot 7 \cdot 31 = 3969 + 1384 = 5353$$



Вариант № 2-1

$$x_1 = \frac{-63 + \sqrt{5953}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-63 - \sqrt{5953}}{4}$$

$$\sqrt{5084} < \sqrt{5953} < \sqrt{6241}$$

$$78 < \sqrt{5953} < 79$$

$$15 < \sqrt{5953} - 63 < 16$$

$$\frac{15}{4} < \frac{\sqrt{5953} - 63}{4} < 4$$

Т.к. должно быть не менее, то $x = 4$

Ответ: 4

05