



ВАРИАНТ № 2-2

Оценка выполнения олимпиадной работы  
(заполняется проверяющим)

|                 |                   |              |   |    |    |    |   |                      |   |                    |    |    |
|-----------------|-------------------|--------------|---|----|----|----|---|----------------------|---|--------------------|----|----|
| Первая проверка | № задания         | 1            | 2 | 3  | 4  | 5  | 6 | 7                    | 8 | 9                  | 10 | Σ  |
|                 | Полученный балл   | 4            | 8 | 10 | 12 | 15 | — | —                    | — | —                  | —  | 49 |
|                 | Σ баллов прописью | сорок девять |   |    |    |    |   | Подпись проверяющего |   | <i>[Signature]</i> |    |    |
| Вторая проверка | № задания         | 1            | 2 | 3  | 4  | 5  | 6 | 7                    | 8 | 9                  | 10 | Σ  |
|                 | Полученный балл   | 4            | 8 | 10 | 12 | 15 | — | —                    | — | —                  | —  | 49 |
|                 | Σ баллов прописью | сорок девять |   |    |    |    |   | Подпись проверяющего |   | <i>[Signature]</i> |    |    |

1/1  $a_n = \log_5 2 \cdot \log_5 3 \cdot \dots \cdot \log_5 n$

тогда  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log_5 2 \cdot \log_5 3 \cdot \dots \cdot \log_5 n \cdot \log_5(n+1)}{\log_5 2 \cdot \log_5 3 \cdot \dots \cdot \log_5 n} = \frac{\log_5(n+1)}{5}$

Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ , то  $a_{n+1} \leq a_n$  (т.е. при  $n \geq 2$   $a_n > 0$ )

$\frac{\log_5(n+1)}{5} \leq 1$ ;  $\log_5(n+1) \leq 5$ ;  $n+1 \leq 5^5$

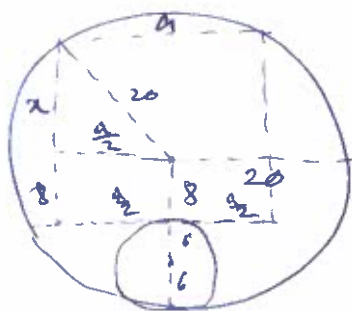
+4

Зн.  $a_n$  убывает до  $n = 5^5 - 1 = n_{\min}$ ;  $a_{n_{\min}} = a_{n_{\min}+1} = a_{\min}$ , при  $n > n_{\min}+1$  последовательность возрастает (т.е. тогда  $\frac{\log_5 n}{5} > 1$ )

Зн.  $n_{\min} = 5^5 - 1 = 3124$ . Ответ: 3124.

Не учтено  $n_{\min 2} = 5^5$

1/2



Очевидно, что расстояние будет таким, как показано на рисунке.

Пусть  $a$  — сторона квадрата.

тогда  $\begin{cases} x^2 + (\frac{a}{2})^2 = 20^2 \\ x + 8 = a \end{cases}$

+8

из этой системы:  $x = 16$  (с учетом того, что  $x > 0$ ).

Зн.  $a = 16 + 8 = 24$ , т.е.  $S = 24^2 = 576$  (ед<sup>2</sup>)

Ответ: 576 ед<sup>2</sup>.



Вариант № 2-2

✓3 Окружность:  $x^2 + y^2 = 4$ .

$$\frac{y(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - 1)}{x(\frac{\sqrt{3}}{3}y^2 - 1)} = -1$$

$$y(\frac{x^2}{\sqrt{3}} - 1) = -x(\frac{y^2}{\sqrt{3}} - 1)$$

$$\frac{x^2y + xy^2}{\sqrt{3}} - x - y = 0$$

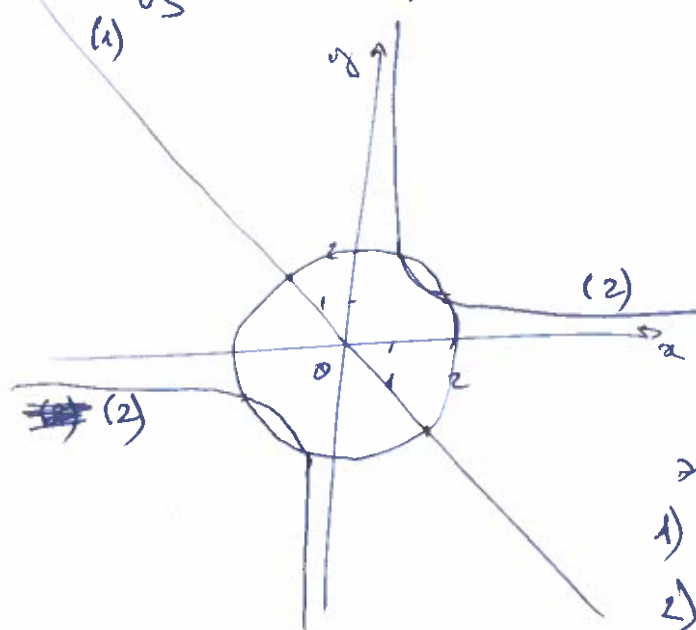
$$(*) \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq -\sqrt{3} \\ y \neq \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{xy}{\sqrt{3}}(x+y) - (x+y) = 0; (x+y)(\frac{xy}{\sqrt{3}} - 1) = 0$$

$$\text{Или } \begin{cases} x+y=0 & (1) \\ \frac{xy}{\sqrt{3}} - 1=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): x+y=0, \text{ т.е. } y=-x$$

$$(2): \frac{xy}{\sqrt{3}} - 1=0, \text{ т.е. } y = \frac{\sqrt{3}}{x}$$



(1): 2 точки:

$$(-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; -\sqrt{2}).$$

(2): 4 точки:

$$(1; \sqrt{3}), (\sqrt{3}; 1), (-\sqrt{3}; -1), (-1; -\sqrt{3}).$$

Легко проверить, что координаты этих 6 точек удовлетворяют:

1) уравнению окружности;

2) уравнению (1) или уравнению (2);

3) (\*).

Ответ:  $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (1; \sqrt{3}), (\sqrt{3}; 1), (-\sqrt{3}; -1), (-1; -\sqrt{3})$ .

+10



Вариант № 2-2

✓ 1) По к.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$ .

2) Пусть  $r_c$  - радиус сферы,  $h_c$  - высота конуса с сечением в основании,  $a$  - высота шарового сегмента, отсекаемого плоскостью сечения,  $R$  - радиус шара,  $h$  - высота цилиндрического конуса.

3)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{h}{r}$ , т.е.  $h = r \operatorname{ctg} \alpha = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ .

4)  $V_k = \frac{1}{3} \pi h = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{ctg} \alpha$ .

5)  $R = \frac{r_c}{\sin \alpha} = \frac{r_c}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{4} r_c$ ;  $a = R - h_c = \frac{r_c}{\sin \alpha} - r_c \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} r_c$ .

6)  $V_{k1} = \frac{1}{3} \pi h_c = \frac{1}{3} \pi r_c^3 \operatorname{ctg} \alpha$ .

$$V_c = \pi \left( R a^2 - \frac{a^3}{3} \right) = \pi \left( \frac{5}{4} r_c \cdot \frac{1}{4} r_c^2 - \frac{1}{24} r_c^3 \right) = \pi \left( \frac{5}{16} r_c^3 - \frac{1}{24} r_c^3 \right) = \pi \cdot \frac{13}{48} r_c^3$$

7)  $V_{k1} + V_c = \frac{1}{2} V_k$ .

$$\frac{1}{3} \pi r_c^3 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{13}{48} \pi r_c^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\frac{1}{3} \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r_c^3 + \frac{13}{48} \pi r_c^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \pi r^3;$$

$$\frac{1}{4} \pi r_c^3 + \frac{13}{48} \pi r_c^3 = \frac{1}{8} \pi r^3;$$

$$12 \pi r_c^3 + 13 \pi r_c^3 = \pi r^3;$$

$$25 \pi r_c^3 = \pi r^3;$$

$$r_c^3 = r^3 \cdot \frac{\pi}{25 \pi}; r_c^3 = r^3 \cdot \frac{6}{25}; r_c = r \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{25}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{25}}.$$

8)  $S_c = \pi r_c^2 = \pi \cdot \left( 2 \sqrt[3]{\frac{6}{25}} \right)^2 = 4 \pi \cdot \left( \frac{6}{25} \right)^{\frac{2}{3}}$

Ответ:  $4 \pi \cdot \left( \frac{6}{25} \right)^{\frac{2}{3}}$ .

+12



Вариант № 2-2

14 Если считать, что один конец дуги начался неугнетен с уже проверенными аббревиатурами, то для конца, то можно не учитывать  $V_c$ ; тогда

$$V_{cl} = \frac{1}{2} V_n; \quad \frac{1}{3} \Delta V_c^3 d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \Delta V^3 d\alpha;$$

$$V_c^3 = \frac{1}{2} V^3; \quad V_c = \frac{V}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Будет } S = \Delta V_c^2 = \Delta \cdot \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \Delta \cdot 2^{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{2\Delta \cdot \sqrt[3]{2}}}.$$

15 Пусть нужно и маркировать.

Возможны такие случаи:

1) все маркирует неугнетенные:

$$P_1 = \frac{28-n}{28} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{24-n}{24} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(28-n)(24-n)}{3 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 28} - \text{вероятность}$$

чтобы все маркирует.

2) первый - неугнетенный, второй - угнетенный:

$$P_2 = \frac{28-n}{28} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{24} \cdot 1 = \frac{n(28-n)}{3 \cdot 24 \cdot 28}.$$

3) первый маркирует угнетенный, а второй - нет:

$$P_3 = \frac{n}{28} \cdot 1 \cdot \frac{24-(n-1)}{24} \cdot \frac{1}{3} = \frac{n(28-n)}{3 \cdot 24 \cdot 28}.$$

4) все маркирует угнетенные:

$$P_4 = \frac{n}{28} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{24} \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{24 \cdot 28}.$$

$$\text{Будет } p = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{4n^2 + 104n + 28 \cdot 24}{9 \cdot 24 \cdot 28}.$$

$$\text{Зн. } 4n^2 + 104n + 24 \cdot 28 \geq 4 \cdot 24 \cdot 28; \quad n^2 + 26n - 3 \cdot 24 \cdot 28 \geq 0.$$

Очевидно, что есть 2 корня; 1 отрицательный; а второй лежит между 23 и 24; зн. ответ 24.

+ 15

Ответ: 24