



ВАРИАНТ № 2-4

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)												
Первая проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	—	—	10	0	15	0	5	8	—	—	38
	Σ баллов прописью	тридцать восемь						Подпись проверяющего				
								Подпись проверяющего				
Вторая проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	—	0	10	0	15	0	5	8	—	—	38
	Σ баллов прописью	тридцать восемь						Подпись проверяющего				
								Подпись проверяющего				

N3

Запишем уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{2}$:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Выразим y : $y^2 = 2 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 - x^2} = \pm \frac{\sqrt{2-x} \sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x} \sqrt{2+x}}$

Теперь решим уравнение:

$$\frac{y(\sqrt{2}x^2 - 1)}{2(\sqrt{2}y^2 - 1)} = -1$$

$$\text{РДЗ: } x \neq 0 \text{ и } y \neq \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$y(\sqrt{2}x^2 - 1) = -x(\sqrt{2}y^2 - 1)$$

$$\sqrt{2}x^2(\sqrt{2}x^2 - 1) = -x(\sqrt{2}(2 - x^2) - 1)$$

$$\sqrt{4 - 2x^2} \cdot x = \sqrt{2}x^2 = -x(2\sqrt{2} - \sqrt{2}x^2 - 1)$$

$$\sqrt{2}x^2y - y = -\sqrt{2}y^2x + x$$

$$\sqrt{2}xy(x+y) = x+y$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}xy = 1 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}x\sqrt{2-x^2} = 1 \\ x = -y \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{4x^2 - 2x^4} = 1 \quad (1) \\ x = -\sqrt{2-x^2} \quad (2) \end{cases}$$

Если $x > 0$: уравнение $x = -\sqrt{2-x^2}$ не имеет решений; рассмотрим уравнение:

$$\sqrt{4x^2 - 2x^4} = 1 \quad \text{РДЗ: } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$4x^2 - 2x^4 = 1$$

$$2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$



Вариант № 2-4

$$x^2 = t \quad t \geq 0$$

$$2t^2 - 9t + 7 = 0$$

$$t = \frac{9 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$t = \frac{9 - 2\sqrt{2}}{4}$$

$$t = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \text{первая точка} - \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}, \pm \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \text{вторая точка} - \left(\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}, \pm \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

Если $x < 0$:

Первое уравнение аналогично, решение для $x > 0$ имеет корни, противоположные знаки.

$$x = -\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x = -\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Значит нам подходят
Второе уравнение:

$$x^2 = 2 - x^2$$

$$x^2 = \pm 1$$

проверяем уравнение $x^2 + y^2 = 2$, так как тогда $y = \pm 1$

$y = \pm \sqrt{2 - 1} = \pm 1 \Rightarrow$ нам подходят еще точки $(\pm 1, \pm 1)$, учитывая, что $x \neq y$ и исключая точки $(1, 1)$, $(-1, -1)$

Ответ: $(\pm \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}, \pm \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}})$, $(\pm \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}, \pm \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}})$, $(\pm 1, \pm 1)$

Дано:

$$R = 25 \text{ см}$$

$$d = 75 \text{ см}$$

$$S = 7$$

Решение:



1) Площадь всего квадрата (через формулу Пифагора):

$$S_k = \frac{d^2}{2} = \frac{75^2}{2} = 2812.5 \text{ см}^2$$

2) Площадь выреза для угла:

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot 25^2 = 1963.5 \text{ см}^2$$

$$S_{\text{сечения}} = S_k - S = 2812.5 - 1963.5 = 849 \text{ см}^2$$

$$\text{Отв. на 10: } S = 849 \text{ см}^2$$

решение не соответствует условию задачи

условие не выполнено

$$\text{Ответ: } (1, -1), (-1, 1), \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right), \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right), \left(\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right), \left(\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

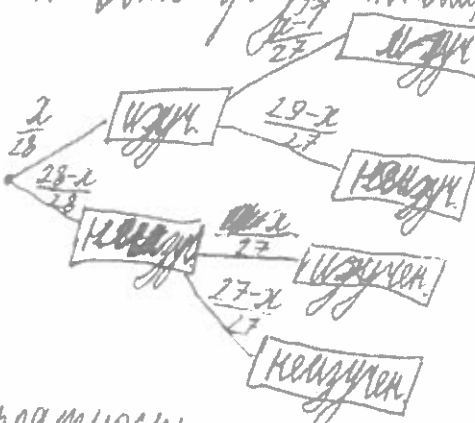
105



Вариант № 2-4

Вероятность прохождения изученного маршрута - $\frac{1}{3}$, неизученного - $\frac{1}{3}$.
Пусть спортсмен изучит x маршрутов. Тогда вероятность прохождения
всего пути равна $\frac{x + (28-x) \cdot \frac{1}{3}}{3}$

Составим граф, учитывая, что спортсмену не ~~до~~ ^{следует} два раза один и тот же путь



Вероятность прохождения двух маршрутов

$$\frac{x}{28} \cdot \frac{x-1}{27} + \frac{x}{28} \cdot \frac{29-x}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{28-x}{28} \cdot \left(\frac{x}{27} + \frac{27-x}{27} \cdot \frac{1}{3} \right) \geq \frac{5}{7}$$

$$\frac{x^2-x}{756} + \frac{(29-x)x}{756 \cdot 3} + \frac{28x-x^2}{756 \cdot 3} + \frac{(28-x)(27-x)}{756 \cdot 9} \geq \frac{5}{7}$$

$$9x^2 - 9x + 87x - 3x^2 + 89x - 3x^2 + 756 + x^2 - 55x = \frac{5}{7} \cdot 756 \cdot 9$$

$$\frac{4x^2 + 107x + 756}{756 \cdot 9} = \frac{5}{7}$$

$$28x^2 + 749x + 756 \cdot 7 = 45 \cdot 756$$

$$28x^2 + 749x - 38 \cdot 756 = 0$$

$$4x^2 + 107x - 38 \cdot 108 = 0$$

$$4x^2 + 107x - 4104 = 0$$

$$x > 21 \text{ и } x < 22 \quad \checkmark ?$$

Значит для того чтобы спортсмен прошел два маршрута с вероятностью $\frac{5}{7}$, он должен изучить 22 маршрута.

Ответ: 22.

150

18



Вариант № 2-4

Дано: $M = 78 \cdot 10^3$

$P = 24930 \text{ Па}$

$T = 100^\circ \text{C} = 373 \text{ K}$

$h = 108 \cdot 10^{-3} \text{ м}$

$T = \text{const}$

$h_0 = ?$

Решение:



До остановки поршня:

$PV = \frac{M}{M} RT$ (уравнение Менделеева-Клапейрона)

$V = h_0 S$

$$P h_0 S = \frac{M}{M} RT \Rightarrow h_0 = \frac{MRT}{MS P}$$

После остановки:

$$M = \rho_0 V$$

$$V = S h$$

$$M = \rho_0 S h$$

$$h_0 = \frac{\rho_0 S h \cdot RT}{M S P} = \frac{\rho_0 h \cdot RT}{M P} = \frac{1000 \cdot 108 \cdot 10^{-3} \cdot 8,317 \cdot 373}{78 \cdot 10^3 \cdot 24930} = 7,6 \text{ м}$$

Ответ: $h_0 = 7,6 \text{ м}$

8

+

Дано:

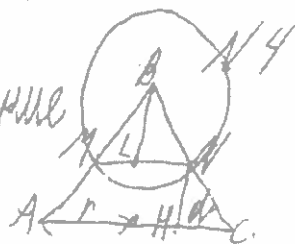
$r = 2$

$\cos \alpha = \frac{4}{5}$

$S_1 = S_2$

$S_{\text{сеч}} = ?$

Решение:



Проведем высоту сечения MN представив конус треугольником:

$$NH = HC \cdot \sin \alpha = AC \cdot \frac{3}{5}$$

$$S_{\text{сеч}} = S_{\text{треугольника}} \Rightarrow \frac{BL \cdot MN}{2} = \frac{MN \cdot AC}{2} \cdot NH$$

$$AB = BC = AC = 2r = 2 \cdot 2 = 4$$

$$NH = \frac{AC \sqrt{3}}{2} - BL = \frac{4 \sqrt{3}}{2} - BL = 2\sqrt{3} - BL$$

$$BL \cdot MN = (MN + AC) \cdot (2\sqrt{3} - BL)$$

$$BL \cdot MN = 2\sqrt{3} MN + 2\sqrt{3} \cdot 4 - BL \cdot MN - BL \cdot 4$$

$$2BL \cdot MN = 2\sqrt{3} MN + 8\sqrt{3} - 4BL$$

$$BL \cdot MN - \sqrt{3} MN + 2BL - 4\sqrt{3} = 0$$

$$MN \cdot (BL - \sqrt{3}) + 2(BL - 2\sqrt{3}) = 0$$

$$BL(MN + 2) - \sqrt{3}(MN + 4) = 0$$

$$MN = AC \cdot \frac{BL}{\sqrt{3} - BL}$$

$$BL = \frac{4 \cdot BL}{\sqrt{3} - BL}$$

$\triangle MBN \sim \triangle ABC$ по двум углам $\angle MBN = \angle ABC$ и $\angle BAC = \angle BMN$ как соответственные

и условия с
объемом?

не ушел объем
шарового сечения



Вариант № 2-4

$$\Rightarrow BL = MN \cdot \sin \alpha \Rightarrow BL = \frac{3MN}{5}$$

$$\frac{3MN}{5} (MN+2) - \sqrt{3} (MN+4) = 0$$

$$0,6MN^2 + (1,2 - \sqrt{3})MN - 4\sqrt{3} = 0$$

$$D = 1,44 + 3 - 2,4\sqrt{3} + 9,6 \cdot 4\sqrt{3} = 4,44 + 7,2\sqrt{3} = 4(1,11 + 1,8\sqrt{3}) \approx 76$$

МММ

N6

05

Высота первого зеркала - 20 см $\Rightarrow$ высота второго - 3-20=60 см. Пусть рост человека - x , в первом случае человек увидел верхнюю часть своего тела, 0,5 x , а во втором раз - x . Люди переходят к зеркалу ближе $\Rightarrow$ человек, который увидел в зеркале отражение головы своей, имеет рост в два зеркала $\Rightarrow$ рост человека - 2-20=40 см.
ответ: 40 см.

N7



Так как диаметры сил относительно центра правого блока равны, $T_1 = T_2$, так как они равны относительно центра левого блока, $T_3 = T_4$, аналогично $T_5 = T_6 \Rightarrow T_6 = T_5 = T_4 = T_3$

Второй закон Ньютона для самого левого блока:

$$m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3$$

$$\text{по } y: T_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + T_2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = T_3$$

$$2T_1 \cdot \frac{1}{2} = T_3$$

$$T_3 = T_1$$

Для правого блока: $m\vec{a} = \vec{T}_4 + \vec{T}_5 + \vec{T}_2$

$$\text{по } y: T_4 + T_5 = T_2$$

$$T_2 = 2T_1$$

Так как $\frac{T_2}{T_3} = \frac{2T_1}{T_1} = 2$, то есть сила натяжения нити справа в два раза больше, чем у нити слева, центр тяжести расположится в правой части кольца на расстоянии $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ от правого края и $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ длины кольца от левого.

ответ: $\frac{2}{3}$

+

5