



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Шифр работы ЕН/Н-04
(не заполнять)

ВАРИАНТ № 1-3

Оценка выполнения олимпиадной работы (заполняется проверяющим)												
Первая проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	5	0	35	10	14	—	—	1	—	—	33
	Σ баллов прописью	тридцать три						Подпись проверяющего				
								Подпись проверяющего				
Вторая проверка	№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
	Полученный балл	5	0	3	10	14	2	—	4	—	—	38
	Σ баллов прописью	тридцать восемь						Подпись проверяющего		Баллов —		
								Подпись проверяющего				



Вариант № 1-3

N2. $R = 17 \text{ ед.}$

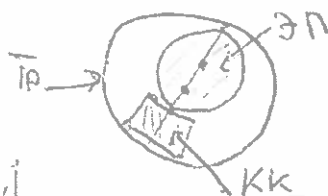
$d = 18 \text{ ед.} \Rightarrow r = 9 \text{ ед.}$

а) ребро сечения робота

$O'H = d - R = 18 \text{ ед.} - 17 \text{ ед.} = 1 \text{ ед.}$

$KO' = O'F = R^{(*)}$

$\max(S_K) = \max(a^2) = \max(a)$



рисунки

$KH = HF = \sqrt{17^2 - 1^2} \text{ ед.} = 18 \text{ ед.}; KF = 24.5$
 $1.5\sqrt{2}$

(*) KF рас. кот. O в CH , где KeO' и FcO'

Зачем же с внутренними касательными труба и проволока
позволяет достичь максимальной S_K т.к. иначе проволока или
труба не могли бы (около ЭПС и вокруг ТП) быть равномерно распределены,
а нам нужны min и max, поэтому касательные (min) дают max с другой
стороны; $\triangle MEO'$ и $\triangle NKF$ — впис. в окр. $O_1 \Rightarrow$ (по теор. син.) $\frac{KF}{\sin KMF} = 2R = 2 \sin KMF$
 $HM = 2R - d = 16 \text{ ед.}$

N 6.

Дано.	Действие.
$n = 4$	В начальный момент времени равная энергия кейбурдиста
$Q = 30 \text{ Дж}$	$E_K + E_P = E$
$g_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	Считая высоту от вершины равной: $E = 0 + \frac{m \cdot v_0^2}{2}$; $E = 2mgh$
$m = 7.0 \text{ кг}$	4 раза кресло: нижнюю точку $\Rightarrow$ 4 раза кресло: верхнюю точку $\Rightarrow$

$Q_{\text{тр}} = 4 \cdot Q$; $Q = 120 \text{ Дж}$

Хитрость: кресло сначала находится в состоянии покоя, а затем переходит в состояние движения, но оно возвращается
в ту же точку $\Rightarrow \Delta E_P = 0$.

Выводим, что $\Delta E = \Delta E_K = Q_{\text{тр}}$ (вся энергия ушла на трение), (*) $\Delta E = E$

Умножив: $2m = 120 \Rightarrow m = 60 \text{ кг}$

Ответ: 60 кг



Вариант № 1-3

№1 $\{a_n\}$ $a_{n+1} = 2a_n + 3, a_1 = 1$

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+3} \Rightarrow a_{2024} + 3 = a_{2025} - a_{2024}$$

$$a_{2025} - a_{2024} = (a_{2024} \cdot 2 + 3) - (2 \cdot a_{2023} + 3) = 2 \cdot (a_{2024} - a_{2023}) \text{ и т.д.}$$

Если раскрывать члены ряда-мигрирующие, то получим:

$$a_{2024} + 3 = a_{2025} - a_{2024} = 2 \cdot (a_2 - a_1); \quad a_1 = 1$$

$$a_{2024} + 3 = 2^{2025}$$

$$a_2 = 2 + 3 = 5$$

Ответ: $2^{2025} + 3$

55

№3. $R = \sqrt{2}$

Из уравнения окружности: $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 2 - x^2$

$$\frac{x \cdot (2y^2 - 1)}{y \cdot (2x^2 - 1)} = -1; \quad x \cdot (4 - 2y^2 - 1) = -y \cdot (2x^2 - 1) \Rightarrow y = \frac{x \cdot (2x^2 - 3)}{2x^2 - 1} \quad | \quad x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(*) Пренебрегая y^2 из уравнения окружности, мы создаем систему уравнений, но отделить её записывать неудобно.

Пересечение графиков функций $f(x) = y = \frac{x \cdot (2x^2 - 3)}{2x^2 - 1}$ и $x^2 + y^2 = 2$ — искомых точек.

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ функция нечётная. $f(x)$ — симметрична относительно точки $(0,0)$.

I и III четверти на графике $f(x)$ — симметричны относительно точки $(0,0)$.

$$\Rightarrow \text{можно найти лишь точки пересечения } f(x) \text{ с } x^2 + y^2 = 2 \text{ при } x > 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3 - 3x}{2x^2 - 1} \right)' = \frac{(6x^2 - 3) \cdot (2x^2 - 1) - (2x^3 - 3x) \cdot (4x)}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{4x^4 - 12x^2 + 12x + 3}{(2x^2 - 1)^2} = 0, \quad x = ?$$

Рассмотрим по частям: $y = x$ — возрастающая функция

$$y = \frac{2x^2 - 3}{2x^2 - 1} \text{ — тоже } (y' = \frac{8x}{(2x^2 - 1)^2}), \text{ но там}$$

при $x > 0$ функция нечётная $x \in (0, \infty)$ не

при $x > 0$

будет иметь экстремум $\Rightarrow$ если пересечём $x^2 + y^2 = 2$, то найдём точку (исключая x — возрастающая функция), если при $x = 0$ $y = \pm \sqrt{2}$

35 рассмотрим не все случаи



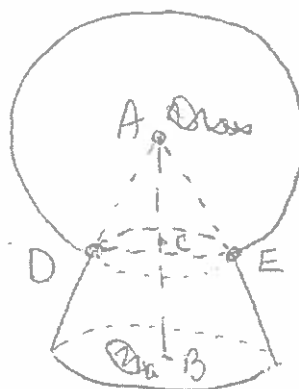
Вариант № 1-3

НЧ. $\alpha = \frac{\pi}{3}, r=2, S_c=?$

$V_2 = V_k - V_2$



$h = \text{ctg} \alpha \cdot r, l = \frac{r}{\sin \alpha}$



A, B, C — точки на поверхности шара,

основание конуса и сечение // осн. конуса части,

$CB = h_1, AE = h_2, h_2 + h_1 = h, AE = h_2 = AD, CE = CD = r_2$

$V_k = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2 h}{3 \text{ctg} \alpha}; V_2 = \frac{\pi r_2^2 h}{6 \text{ctg} \alpha} = \frac{1}{3} \cdot h_2 \cdot \pi r_2^2 (1) - \text{конус и сечение шара это } \frac{1}{3} \text{ части конуса}$

$\frac{h_2}{h} = \frac{r_2}{r} = \frac{R_{\text{ш}}}{l} \text{ (по подобию конусов и т.к. } R_{\text{ш}} = l_2 = AE) \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = \frac{R_{\text{ш}} h}{l} \text{ и } r_2 = \frac{R_{\text{ш}} r}{l} \quad (2)$

(1) + (2): $\frac{V_k}{6 \text{ctg} \alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R_{\text{ш}} h}{l} \cdot \frac{R_{\text{ш}}^2}{l^2} + V_2 \frac{\pi r^2 h}{6 \text{ctg} \alpha} = \frac{R_{\text{ш}}^3 \cdot h \cdot \pi}{3 l^3} + \frac{V_2}{6}$

V_c — не полный сечение ADE шара, а с частью вынесенной конуса

$V_{\text{сп}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{ш}}^3 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{2}{3} R_{\text{ш}}^3 \pi; V_c = V_{\text{сп}} - \frac{V_k}{2} = \frac{V_k}{2} - V_{k2}$

полный сечение

$V_{\text{сп}} = \frac{V_k}{2}; \frac{2}{3} R_{\text{ш}}^3 \pi = \frac{\pi r^2 h}{2 \text{ctg} \alpha} \Rightarrow R_{\text{ш}} = \sqrt[3]{\frac{r^2 h}{4 \text{ctg} \alpha}}; R_{\text{ш}} = \sqrt[3]{\frac{4^2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2^1}{48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}} = \sqrt[3]{3}$

$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = 4\pi R^2 = 4 R^2 \cdot \alpha; S_{\text{сф}} = 4 \sqrt[3]{9} \cdot \pi$

Ответ: $\frac{4 \sqrt[3]{9} \pi}{3}$

сред. оценка 105



Вариант № 1-3

- №5. А – событие, что вышло 2 бонуса выученных, и они бонус сдачи
В – событие, что вышло 2 не выученных бонуса, и они сдачи
С – ~~с~~ событие, что вышло по одному выуч. и не выуч. бонусу, и они сдачи

А и В, и С вместе – все возможные случаи получения сертификата.
К тому же, эти события несовместные.

Пусть выучено n бонусов, тогда $32-n$ – не выуч.

$$P(A) = \frac{1}{32} \cdot \frac{n}{31} \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{32 \cdot 31}$$

вероятность правильного ответа
на 2 бонуса выученных образцов

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{32-n}{32} \cdot \frac{31-n}{31} ; P(C) = \frac{32-n}{32} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{31} \cdot 1 + \frac{n}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{31-(n-1)}{3} \cdot 1 =$$

$$= \frac{2 \cdot (32-n) \cdot n}{32 \cdot 31 \cdot 3}$$

Нужн 2 бонуса ; 1 бонус ; 1 бонус ; 2 бонуса

D – событие, что сертификат получен

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) \geq \frac{3}{4} ; \frac{n(n-1)}{32 \cdot 31} + \frac{(32-n)(31-n)}{9 \cdot 32 \cdot 31} + \frac{2 \cdot (32-n) \cdot n}{3 \cdot 32 \cdot 31} =$$

$$= \frac{9n^2 - 9n + 32 \cdot 31 - 63n + n^2 + 6 \cdot 32n - 6n^2}{9 \cdot 32 \cdot 31} = \frac{4n^2 + 138n + 32 \cdot 31}{9 \cdot 32 \cdot 31} \geq \frac{3}{4}$$

$$4n^2 + 138n + 32 \cdot 31 \geq 3^3 \cdot 2^3 \cdot 31 ; 4n^2 + 138n + 992 - 6656 \geq 0 ; 4n^2 + 138n - 5664 \geq 0$$

$$4n^2 + 138n - 5664 = 0$$

$$D = 65^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2852 = 4761 + 22816 = 27577 \approx 166^2$$

$$n = \frac{-69 \pm 166}{4} ; n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = \frac{-69 + 166}{4} = \frac{97}{4} = 24,25 \approx 25$$

ответ: 25

~~3n^2 - 7n - 4n^2 + 12n~~
~~9n^2 - 4n^2 - 8n + 12n~~
~~5n^2 - 4n~~
~~5n^2 - 4n~~

145
верно. ошибка

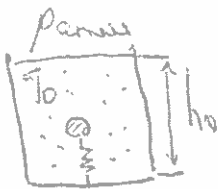


Вариант № 1-3

N 8.

Дано:
 $V_{m1} = 10^{-6} \text{ м}^3$
 $T_0 = 290 \text{ К}$
 $T_K = 360 \text{ К}$
 $h_0 = 4 \text{ м}$
 $h_K = \frac{h_0}{2}$
 $\Delta z = 5.63 \text{ м}$
 $P_0 = 10^5 \text{ Па}$
 $k = \frac{H}{\text{м}}$

Рисунок:



Закон Клапейрона-Менделеева:

$$PV = \nu RT$$

Сила Архимеда: $F_A = \rho_K \cdot g \cdot V_m$

Шарик маленький, масса шарика не 2 м =>
=> не берем ($V_1 = V_m$)

Закон Гука: $F_y = k \Delta z$

$$\Delta F_A = \Delta F_y (1)$$

Сила упругости удерживает шарик (воздух не)
от всплывания

Состояние воздуха в шарике в начале и конце:

$$P_0 \cdot V_{m1} = \nu R T_0$$

$$P_K \cdot V_{m2} = \nu R T_K, \text{ где } P_0 = P_0 + \rho_K g \cdot h_0 \text{ и } P_K = P_0 + \rho_K g \cdot \frac{h_0}{2}$$

(1) из этого след.
2 выразили
(2) = $\frac{1}{337.29 \text{ м}^3}$

$$V_{m2} = \frac{\nu R T_K}{P_K} = \frac{\nu R T_K}{P_0 + \rho_K g \cdot \frac{h_0}{2}}, V_{m1} = \frac{\nu R T_0}{P_0 + \rho_K g h_0}; \Delta V = V_{m1} - V_{m2} (2)$$

Из (1) и (2) получаем: $\rho_K g \Delta V = k \Delta z \Rightarrow k = \frac{\rho_K g \Delta V}{\Delta z}$, подставляем (2):

$$k = \frac{\rho_K g \nu R T_K}{\Delta z} \cdot \frac{1}{P_0 + \rho_K g \cdot \frac{h_0}{2}}$$

$$\text{Подставляем: } k = \frac{1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot \left(\frac{1}{831.29} \cdot \frac{1}{337.29} \right) \text{ м}^3}{5.63 \text{ м}} = \frac{10^4 \cdot 3 \text{ Н}}{235.63 \text{ м}} = 0.006 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$= 20600 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right)$$

$$\text{Ответ: } 20600 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$