

**ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМПЕРАТРИЦЫ ЕКАТЕРИНЫ II»**



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОТБОРОЧНОМУ ТУРУ ОЛИМПИАДЫ
2023/2024 ГОДА
(10-11 классы)**

Ф И З И К А

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю «Естественные науки» (предмет олимпиады – физика) проходит с использованием интернет-технологий (заочно).

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовленность участников олимпиады в соответствии с Кодификатором элементов содержания по физике 2020 года, помещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений» <http://www.fipi.ru>.

В олимпиадные задания отборочного тура включены элементы содержания из следующих разделов (тем) курса физики.

- **Механика.** (кинематика, динамика, статика, законы сохранения в механике, механические колебания и волны).
- **Молекулярная физика. Термодинамика. Гидростатика.** (молекулярно-кинетическая теория, законы идеального газа, законы термодинамики, гидростатика).
- **Электростатика.** (электростатическое поле, проводники и диэлектрики, постоянный ток, энергия системы зарядов и электрического поля).
- **Электромагнетизм. Оптика и Квантовая физика** (магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны, оптика, основы СТО, корпускулярно-волновой дуализм, физика атома, физика атомного ядра).

Для конструирования вариантов олимпиадной работы отборочного тура использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки). Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый блок содержит тестовые задания с выбором правильного ответа из четырех представленных. Второй блок содержит тестовые задания с открытым ответом в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим повышенный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи более двух физических законов, относящихся к одной или нескольким темам, комбинировать известные алгоритмы действий.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления достаточно высокой степени самостоятельности мышления, творческих способностей, более глубоких знаний и смекалки.

На задания из третьего блока необходим краткий ответ в виде числового значения и единиц искомой физической величины.

Участник олимпиады получает индивидуальный вариант олимпиадной работы отборочного этапа, состоящий из 25 заданий: десять задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий; пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за выполненные задания, суммируются.

РАЗДЕЛЫ ДИСЦИПЛИНЫ И ТЕМЫ, ВКЛЮЧЕННЫЕ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2023

Раздел 1. Механика

1.1. КИНЕМАТИКА

1.1.1. Механическое движение и его виды. Относительность механического движения. Система отсчета.

1.1.2. Материальная точка и ее радиус-вектор. Траектория, перемещение, путь. Сложение перемещений.

- 1.1.3. Скорость материальной точки. Сложение скоростей.
- 1.1.4. Ускорение материальной точки.
- 1.1.5. Равномерное прямолинейное движение.
- 1.1.6. Равноускоренное прямолинейное движение.
- 1.1.7. Свободное падение. Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом α к горизонту.
- 1.1.8. Движение точки по окружности. Линейная и угловая скорость точки соответственно. Центростремительное ускорение.
- 1.1.9 Твердое тело. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

1.2 ДИНАМИКА

- 1.2.1 Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея.
- 1.2.2. Масса тела. Плотность вещества.
- 1.2.3. Сила. Принцип суперпозиции сил.
- 1.2.4. Второй и третий законы Ньютона.
- 1.2.5. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты над поверхностью планеты. Вес тела. Невесомость.
- 1.2.6. Движение небесных тел и их искусственных спутников. Первая космическая скорость. Вторая космическая скорость.
- 1.2.7. Сила упругости. Закон Гука.
- 1.2.8. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения. Сила трения покоя. Коэффициент трения.
- 1.2.9. Давление.

1.3. СТАТИКА

- 1.3.1. Момент силы относительно оси вращения.
- 1.3.2. Условия равновесия твердого тела.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

- 1.4.1. Импульс материальной точки. Импульс системы тел.
- 1.4.2. Закон изменения и сохранения импульса.
- 1.4.3. Работа силы. Мощность силы.
- 1.4.4. Кинетическая энергия материальной точки. Закон изменения кинетической энергии системы материальных точек.
- 1.4.5. Потенциальная энергия для потенциальных сил. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.
- 1.4.6. Закон изменения и сохранения механической энергии.
- 1.4.9. Закон сохранения механической энергии.

1.5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

- 1.5.1. Гармонические колебания. Амплитуда и фаза колебаний. Кинематическое, динамическое и энергетическое (закон сохранения механической энергии) описание. Связь амплитуды колебаний исходной величины с амплитудами колебаний её скорости и ускорения.
- 1.5.2. Период и частота колебаний.
- 1.5.3. Период малых свободных колебаний математического и пружинного маятника.
- 1.5.4. Вынужденные колебания. Резонанс.
- 1.5.5. Поперечные и продольные волны. Скорость, распространения и длина волны.

Раздел 2. Молекулярная физика. Термодинамика

2.1. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

- 2.1.1. Модели строения газов, жидкостей и твердых тел.
- 2.1.2. Тепловое движение атомов и молекул вещества.
- 2.1.3. Взаимодействие частиц вещества. Диффузия. Броуновское движение.

2.1.4. Модель идеального газа в МКТ: частицы газа движутся хаотически и не взаимодействуют друг с другом.

2.1.5. Абсолютная температура. Связь температуры газа со средней кинетической энергией поступательного теплового движения его частиц.

2.1.6. Модель идеального газа в термодинамике.

2.1.7. Уравнение Менделеева – Клапейрона. Выражение для внутренней энергии одноатомного идеального газа.

2.1.8. Закон Дальтона для давления смеси разреженных газов.

2.1.9. Изопроцессы: изотермический, изохорный, изобарный, адиабатный процессы.

2.1.10. Изменение агрегатных состояний вещества: испарение и конденсация, плавление и кристаллизация, кипение жидкости. Преобразование энергии в фазовых переходах.

2.2. ТЕРМОДИНАМИКА

2.2.1. Тепловое равновесие и температура.

2.2.2. Внутренняя энергия.

2.2.3. Теплопередача.

2.2.4. Количество теплоты. Удельная теплоемкость вещества. Удельная теплота парообразования. Удельная теплота плавления. Удельная теплота сгорания топлива.

2.2.5. Элементарная работа в термодинамике. Вычисление работы по графику процесса на pV -диаграмме.

2.2.6. Первый закон термодинамики.

2.2.7. Второй закон термодинамики.

2.2.8. Принципы действия и КПД тепловой машины. Цикл Карно.

2.2.9. Уравнение теплового баланса.

2.3. ГИДРОСТАТИКА

2.3.1. Закон Паскаля. Сообщающиеся сосуды.

2.3.2. Давление в жидкости, покоящейся в ИСО. Гидравлический пресс.

2.3.3. Закон Архимеда. Условия плавания тел.

Раздел 3. Электростатика

3.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

3.1.1. Электризация тел. Электрический заряд. Два вида заряда. Закон сохранения электрического заряда.

3.1.2. Взаимодействие зарядов. Точечные заряды. Закон Кулона.

3.1.3. Электрическое поле. Его действие на электрические заряды.

3.1.4. Напряженность электрического поля. Поле точечного заряда. Однородное поле. Картины линий поля.

3.1.5. Потенциальность электростатического поля. Разность потенциалов и напряжение. Связь напряженности поля и разности потенциалов для однородного электростатического поля.

3.1.6. Принцип суперпозиции электрических полей.

3.1.7. Проводники в электростатическом поле.

3.1.8. Диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества.

3.1.9. Конденсатор. Емкость конденсатора. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.

3.1.10. Энергия заряженного конденсатора.

3.2. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

3.2.1. Постоянный электрический ток. Сила тока.

3.2.2. Напряжение и электродвижущая сила (ЭДС).

3.2.3. Закон Ома для участка цепи.

3.2.4. Электрическое сопротивление. Удельное сопротивление вещества.

3.2.5. Источники тока. ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

3.2.6. Закон Ома для полной (замкнутой) электрической цепи.

3.2.7. Параллельное и последовательное соединение проводников.

- 3.2.8. Работа электрического тока. Закон Джоуля – Ленца.
- 3.2.9. Мощность электрического тока. Тепловая мощность, выделяемая на резисторе. Мощность источника тока.
- 3.2.10. Носители свободных электрических зарядов в металлах, жидкостях и газах.

Раздел 4. Электромагнетизм. Оптика. Квантовая физика

4.1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

- 4.1.1. Механическое взаимодействие магнитов. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Принцип суперпозиции магнитных полей. Линии магнитного поля.
- 4.1.2. Магнитное поле проводника с током.
- 4.1.3. Сила Ампера.
- 4.1.4. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле.

4.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

- 4.2.1. Поток вектора магнитной индукции.
- 4.2.2. Явление электромагнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея.
- 4.2.3. Правило Ленца.
- 4.2.4. Индуктивность.
- 4.2.5. Самоиндукция. ЭДС самоиндукции.
- 4.2.6. Энергия магнитного поля катушки с током.

4.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

- 4.3.1. Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания. Формула Томсона. Закон сохранения энергии в колебательном контуре.
- 4.3.2. Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс.
- 4.3.3. Гармонические электромагнитные колебания.
- 4.3.4. Переменный ток. Производство, передача и потребление электрической энергии.
- 4.3.5. Электромагнитное поле. Свойства электромагнитных волн. Взаимная ориентация векторов в электромагнитной волне в вакууме. Шкала электромагнитных волн.

4.4. ОПТИКА

- 4.4.1. Прямолинейное распространение света в однородной среде. Луч света.
- 4.4.2. Закон отражения света.
- 4.4.3. Построение изображений в плоском зеркале.
- 4.4.4. Закон преломления света. Абсолютный показатель преломления. Относительный показатель преломления. Ход лучей в призме. Соотношение частот и длин волн при переходе монохроматического света через границу раздела двух оптических сред.
- 4.4.5. Полное внутреннее отражение.
- 4.4.6. Собирающие и рассеивающие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила тонкой линзы.
- 4.4.7. Формула тонкой линзы. Увеличение, даваемое линзой. Построение изображений в линзах.
- 4.4.8. Фотоаппарат как оптический прибор. Глаз как оптическая система.
- 4.4.9. Интерференция света. Когерентные источники. Условия наблюдения максимумов и минимумов в интерференционной картине от двух синфазных когерентных источников.
- 4.4.10. Дифракция света. Дифракционная решетка. Условия наблюдения главных максимумов при нормальном падении монохроматического света.
- 4.4.11. Дисперсия света.

4.5. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ

- 4.5.1. Гипотеза М. Планка о квантах. Формула Планка.
- 4.5.2. Фотоны. Энергия, импульс и масса фотона.
- 4.5.3. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

4.6. ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

- 4.6.1. Планетарная модель атома.
- 4.6.2. Постулаты Бора. Излучение и поглощение фотонов при переходе атома с одного уровня энергии на другой.
- 4.6.3. Линейчатые спектры.
- 4.6.4. Нуклонная модель ядра. Заряд.
ядра. Массовое число ядра. Изотопы. Энергия связи нуклонов в ядре. Ядерные силы.
Дефект массы ядра.
- 4.6.5. Радиоактивность. Альфа-распад. Бета-распад. Электронный β -распад. Позитронный β -распад. Гамма-излучение. Закон радиоактивного распада.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса физики.
Каждый блок заданий состоит из четырех частей

Часть 1. Кинематика. Динамика. Статика. Законы сохранения в механике. Механические колебания и волны.

Часть 2. Молекулярно-кинетическая теория. Законы идеального газа. Законы термодинамики. Гидростатика.

Часть 3. Электростатическое поле, проводники и диэлектрики, постоянный ток, энергия системы зарядов и электрического поля.

Часть 4. Магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны. Оптика. Фотоны. Физика атома. Физика атомного ядра.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ И ИХ РЕШЕНИЯ ИЗ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ ПРОШЛЫХ ЛЕТ.

Пример 1

Уравнения движения двух материальных точек имеют вид: $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ - для первой точки и $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$ - для второй. Определите в какой момент времени скорости точек сравниваются, если $A_1 = 5\text{ м}$, $B_1 = 2\text{ м/с}$, $C_1 = 3\text{ м/с}^2$, $A_2 = 1\text{ м}$, $B_2 = -0,5\text{ м/с}$, $C_2 = 0,5\text{ м/с}^2$. Найти ускорения точек через 5 секунд после начала движения.

Дано:

$$x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$$

$$x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$$

$$A_1 = 5\text{ м},$$

$$B_1 = 2\text{ м/с}, C_1 = 3\text{ м/с}^2,$$

$$A_2 = 1\text{ м},$$

$$B_2 = -0,5\text{ м/с}, C_2 = 0,5\text{ м/с}^2$$

Найти: $t = ?$ (при $v_1 = v_2$)

$$a_1 = ? a_2 = ?$$

Решение:

Для определения скорости и ускорения в определенный момент времени необходимо определить мгновенные их мгновенные значения.

Первая производная координаты по времени и есть проекция мгновенной скорости. Для v_1 и v_2 получим выражения:

$$\vec{v} = \frac{dx_1}{dt} = B_1 + 2C_1t, \quad (1)$$

$$\vec{v} = \frac{dx_2}{dt} = B_2 + 2C_2t \quad (2)$$

Для того чтобы найти нужный момент времени t (при $v_1 = v_2$) приравняем правые части уравнений (1) и (2).

$$B_1 + 2C_1t = B_2 + 2C_2t$$

Откуда получим

$$t = \frac{B_1 - B_2}{2(C_1 - C_2)} = \frac{2 - (-0,5)}{2(3 - 0,5)} = 0,5\text{ с} \quad (3)$$

Мгновенные ускорения найдем как первую производную по скорости от времени:

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2C_1 \text{ и } a_2 = \frac{dv_2}{dt} = 2C_2 \quad (4) \text{ и } (5)$$

По уравнениям (4) и (5) видно, что ускорения не зависят от времени. Подставим значения в эти уравнения

$$a_1 = 2C_1 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ м/с}^2$$

$$a_2 = 2C_2 = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $t = 0,5 \text{ с}$, $a_1 = 6 \text{ м/с}^2$, $a_2 = 1 \text{ м/с}^2$

Пример 2

Строители поднимают груз на крышу с помощью стальной проволоки некоторого диаметра, которая выдерживает силу натяжения до 3,5 кН. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой 0,3 тонны, чтобы проволока не разорвалась.

Дано:

$$T = 3,5 \text{ кН} = 3500 \text{ Н}$$

$$m = 0,3 \text{ т} = 300 \text{ кг}$$

Найти:

$$a = ?$$

Решение:

Запишем второй

закон Ньютона в

векторной форме

(согласно силам

расставленным на

чертеже):

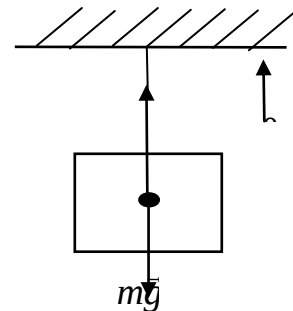
$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Проецируем данные силы на вертикальную ось, принимая за «положительное» направление ускорения:

$$T - mg = ma$$

(1)

Из уравнения (1) выражаем и считаем ускорение:



$$a = \frac{T - mg}{m} = \frac{3500 - 300 \cdot 9,8}{300} = 1,87 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $a = 1,87 \text{ м/с}^2$

Пример 3

Какова будет масса воздуха в помещении при атмосферном давлении и температуре $T = 290 \text{ К}$? Высота потолков в помещении составляет 5м, а площадь 200 м². Молярная масса воздуха $\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$.

Дано:

$$T = 290 \text{ К}$$

$$p = 10^5 \text{ Па}$$

$$h = 5 \text{ м}$$

$$S = 200 \text{ м}^2$$

$$\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$$

Решение:

Запишем уравнение Клайперона-Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

(1)

Объем комнаты можно посчитать:

$$V = hS$$

Найти:

(2)

$$m = ?$$

Подставляем (2) в (1) и выражаем массу

воздуха:

$$m = \frac{phS\mu}{RT} = \frac{10^5 \cdot 5 \cdot 200 \cdot 0,029}{8,31 \cdot 290} = 1203 \text{ кг}$$

Ответ: $m = 1203 \text{ кг}$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Груз массой 200г аккуратно подвесили к свободному концу вертикальной пружины. Затем, не убирая груз, к середине пружины подвесили еще один такой же груз. Длина недеформируемой пружины 23см, жесткость пружины 100 Н/м. Чему равна длина растянутой пружины?

- 1 . 13 см 2 . 26 см 3,3 см 4. 38 см

Ответ: 2

2. Импульс материальной точки изменяется по закону

$$\vec{p} = 10t\vec{i} + 3t^2\vec{j} \text{ (кг·м/с)}.$$

Модуль силы, действующей на точку в момент времени $t = 4$ с, равен ...

1. 22 Н. 2. 24 Н. 3. 26 Н. 4. 28 Н.

Ответ: 3

3. Три резистора 40 Ом, 60 Ом и 120 Ом соединены параллельно в группу, которая включена последовательно резисторам сопротивлением 15 Ом и 25 Ом. ЭДС источника 240 В. Найдите силу тока, протекающего через сопротивление 25 Ом.

1. 4А 2. 1А 3. 2А 4. 20А

Ответ: 1

4. Два одинаковых одноимённых заряда расположены на расстоянии ℓ друг от друга. Ось x проходит через середину отрезка, соединяющего заряды, перпендикулярно ему. Как будут изменяться модуль и направление напряжённости электрического поля вдоль оси x ?

1. Модуль будет увеличиваться. Направление не изменяется.
2. Модуль сначала будет увеличиваться, затем уменьшаться. Направление не изменяется.
3. Модуль будет уменьшаться, затем увеличиваться. Направление изменится на противоположное в точке минимума напряжённости.
4. Модуль будет уменьшаться. Направление не изменяется.

Ответ: 2

5. Две заряженные частицы ($m_2 > m_1$) с одинаковыми зарядами влетают с одинаковыми скоростями перпендикулярно однородному электрическому полю. Какая из частиц за одно и то же время пройдет больший путь у перпендикулярно электрическому полю и больший путь x вдоль поля?

1. $x_1 = x_2$ и $y_1 > y_2$. 2. $x_1 > x_2$ и $y_1 = y_2$.
3. $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. 4. $x_1 < x_2$ и $y_1 = y_2$.

Ответ: 2

6. Радиус-вектор материальной точки, движущейся в поле тяготения Земли, описывается уравнением $\vec{r} = v_0 t \vec{i} - \frac{gt^2}{2} \vec{j}$, где $v_0 = 76$ м/с, g - ускорение свободного падения; $\vec{i}$, $\vec{j}$ - орты координатных осей x и y . Определите модуль скорости материальной точки, для момента времени после начала движения, когда вектор скорости $\vec{v}$ точки направлен под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. (Ответ округлить до целого числа)

Ответ: $V_{cp} = 93$ м/с.

7. Плавающий в ртути однородный шар погружен в ртуть на 1/4 своего объёма. Какая часть объёма шара будет погружена в ртуть, если поверх неё налить слой воды, полностью закрывающий шар? Плотность ртути $13,6$ г/см³, плотность воды 1 г/см³. (Ответ представить с точностью до 0,01).

Ответ: 0,19

8. В колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, происходят гармонические колебания. Энергия магнитного поля катушки индуктивности изменяется по закону $W_L(t) = 25 \cdot 10^{-3} (1 - \cos(2\omega t))$ (Дж). В некоторый момент времени энергия катушки составила 30 мДж. Найдите значение заряда конденсатора в этот момент времени, если ёмкость конденсатора равна 1 мкФ. (Ответ представить в мКл, округлив до 0,1).

Ответ: 0,2 мКл

9. Капля воды объемом 0,2 мл нагревается светом с длиной волны 0,75 мкм, поглощая каждую секунду 10^{10} фотонов. Определить скорость нагревания воды. (Ответ представить в нК/с, округлив до 0,1)

Ответ: 3,2 нК/с.

10. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрываются. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (длина волны 400 нм) спектра третьего порядка?

Ответ: 600 нм.

Составитель

доц. кафедры Общей и технической физики,

к.х.н., *М.О. Силиванов*

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю Естественные науки (предмет олимпиады – математика) проходит с использованием интернет-технологий (дистанционно).

На решение задач отборочного тура Олимпиады отводится 2 (два) астрономических часа (120 минут). Отсчет времени начинается с момента начала выполнения заданий. Место и время выполнения заданий определяются участниками самостоятельно. Для выполнения заданий необходим компьютер с доступом в сеть Интернет. Оргкомитет не несет ответственности за сбои электропитания и связи в момент решения задач отборочного тура.

Каждый вариант олимпиадной работы отборочного тура включает в себя задания, предполагающие подготовленность участников олимпиады в рамках программы, соответствующей Кодификатору элементов содержания по математике 2023 года, размещенному на сайте ФГБ НУ «Федеральный институт педагогических измерений».

В олимпиадные задания отборочного тура включены <https://fipi.ru/ege/demoversii-spezifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2> элементы следующих разделов (тем) курса математики:

- арифметика, алгебра;
- уравнения и неравенства;
- функции;
- начала математического анализа;
- геометрия;
- элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных ниже, разделов курса математики. **Участник олимпиады получает** индивидуальный вариант олимпиадной работы отборочного тура, состоящий из **25 заданий**: десять задач из первого блока заданий, десять задач из второго блока заданий; пять задач из третьего блока заданий.

Каждое задание оценивается в зависимости от уровня его сложности и правильности полученного результата. Баллы, полученные участником олимпиады за выполненные задания, суммируются.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ОТБОРОЧНОГО ТУРА 2023/2024

ЧИСЛА, ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Натуральные и целые числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, делимость. Степень с натуральным показателем. Обыкновенные дроби. Проценты. Пропорции. Степень с целым показателем. Корень степени $n > 1$ и его свойства. Степень с рациональным показателем. Десятичные дроби. Основы тригонометрии: градусная и радианная меры угла; определения и основные свойства тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, котангенс); основные тригонометрические формулы. Логарифмы.

Преобразование алгебраических выражений. Формулы сокращенного умножения. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Модуль (абсолютная величина) числа.

Текстовые задачи.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Квадратные уравнения. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на

множители. Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена. Рациональные уравнения

Иррациональные уравнения. Тригонометрические уравнения. Показательные уравнения. Логарифмические уравнения. Простейшие системы алгебраических уравнений, основные методы их решений. Квадратные неравенства. Рациональные неравенства. Тригонометрические неравенства. Показательные неравенства. Логарифмические неравенства. Простейшие системы неравенств. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.

Уравнения и неравенства с параметром.

ФУНКЦИИ

Понятие функции, области определения и значений функции. График функции; четность, нечетность, периодичность функции. Нули функции. Ограниченность функции.

Основные элементарные функции и их свойства.

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Понятие о производной. Производные от элементарных функций, основные формулы и правила дифференцирования. Производная произведения и частного функций. Определение касательной к графику функции. Монотонность и экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

ГЕОМЕТРИЯ

Планиметрия. Прямая, луч, отрезок, ломаная, длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые, их свойства.

Треугольник. Медиана, высота, биссектриса, средняя линия треугольника и их свойства. Равенство треугольников. Свойства равнобедренного треугольника. Свойства прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема синусов. Теорема косинусов. Сумма углов треугольника. Площадь треугольника.

Четырехугольники, свойства выпуклых четырехугольников. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр и радиус окружности. Касательная к окружности. Дуга окружности. Круговой сектор. Центральные и вписанные углы. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь кругового сектора.

Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Формулы площадей треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника.

Стереометрия. Призма, параллелепипед, пирамида, правильные многогранники. Цилиндр. Конус. Шар. Объёмы и площади поверхности тел.

СТРУКТУРА ВАРИАНТА ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Общая база включает три блока заданий из всех, указанных выше, разделов курса математики.

Для конструирования вариантов олимпиадной работы использованы различные способы представления информации в текстах заданий (графики, таблицы, схемы и схематические рисунки).

Содержательные элементы представлены в каждом варианте заданиями, различающимися по уровню сложности и форме выполнения.

Первый и второй блоки содержат задания закрытой формы с выбором одного верного ответа из предложенного списка вариантов или открытой формы с вводом краткого ответа. Для выполнения этих заданий участникам олимпиады необходим достаточный уровень подготовки, умение использовать в рамках задачи знания, относящиеся к одной или нескольким темам, умение обобщать знания, комбинировать известные алгоритмы действий, делать выводы, особенно в задачах, имеющих прикладную направленность или политехнический характер.

Третий блок содержит расчётные задания высокого уровня сложности, позволяющие оценить способность участников олимпиады применять свои знания и умения в сложных ситуациях, требующих проявления значительной степени самостоятельности мышления, творческих способностей, глубоких знаний, смекалки и эрудиции.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

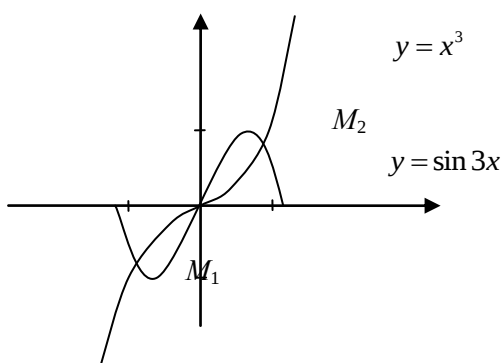
Блок 1

1. Упростить выражение $\left[\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} \right) \left(\frac{1}{a^2 - b\sqrt{ab}} \right)^{-1} \right]^{-1}$ и вычислить его значение при $a = 101$, $b = 99$.

Ответ: 0,5.

2. Определить количество решений уравнения $x^3 = \sin 3x$.

Решение. Построим графики левой и правой частей уравнения $x^3 = \sin 3x$.



Очевидно, что графики этих функций пересекаются в начале координат и еще в двух симметричных относительно начала координат точках M_1 и M_2 .

Так как функция $y = x^3$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а функция $y = \sin 3x$ ограничена ($|y| = |\sin 3x| \leq 1$) и периодична (период $T = \frac{2\pi}{3}$), других точек пересечения графиков функций нет.

Ответ: 3.

3. Найти наибольшее решение уравнения $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$.

Решение. Уравнение определено для любых значений x . Преобразуем уравнение

$$\text{к виду } (5^x)^2 - 7 \cdot (5^x) + 10 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим:

$$(5^x)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \begin{cases} 5; \\ 2, \end{cases} \quad \text{откуда } \begin{cases} x = 1; \\ x = \log_5 2. \end{cases}$$

Так как $\log_5 2 < 1$, искомое решение $x = 1$.

Ответ: 1.

4. Два бассейна наполняют водой. В одном из них уже имеется 200 м^3 воды, а в другом – 112 м^3 . Через сколько часов количество воды в бассейнах станет одинаковым, если во второй бассейн в час вливается на 22 м^3 воды больше, чем в первый?

Ответ: 4.

5. Решить систему $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18; \\ \log_9 (x+y) = 0,5. \end{cases}$ В ответ записать сумму $x+y$.

Решение:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18, \\ \log_9 (x+y) = \frac{1}{2}, \end{cases} \begin{cases} x+y > 0, \\ x+y = 3 \\ 3^x \cdot 2^y = 18, \end{cases} \begin{cases} y = 3-x, \\ 3^x \cdot 2^y = 18, \end{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}, \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: 3.

Блок 2

1. Вычислить значение выражения $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{13\pi}{10}$.

Ответ: 0,5.

2. Три числа, третьим из которых является 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получим арифметическую прогрессию. Найти наибольшее из этих чисел.

Решение. Воспользуемся свойствами прогрессий: если три числа (a, b, c) образуют геометрическую прогрессию, то $ac = b^2$; если три числа (a, b, c) образуют арифметическую прогрессию, то $a+c = 2b$. Обозначим x и y – первые два числа. Тогда

$$\begin{cases} 12x = y^2 \\ x+9 = 2y \end{cases} \Rightarrow x = 2y-9 \Rightarrow (2y-9)12 = y^2 \Rightarrow y^2 - 24y + 108 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = 18, y_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 27, x_2 = 3.$$

Таким образом, получили две геометрические прогрессии: 3, 6, 12 и 27, 18, 12; две арифметические: 3, 6, 9 и 27, 18, 9. Наибольшее из этих чисел 27.

Ответ: 27.

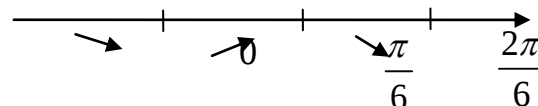
3. Найти наибольшее значение функции $y = \sin^2 3x$ на интервале $(0; 0,6)$.

Решение. Найдем производную функции:

$$y' = 2 \sin 3x \cos 3x = \sin 6x,$$

которая

обращается в 0 при $x = \frac{\pi k}{6}$, откуда $y_{\max} \left(\frac{\pi}{6} \right) = 1$.



Замечание. Задачу можно решить и графически.

Ответ: 1.

4. На окружности радиуса 9 см отмечена дуга AB , содержащая 120° . Через концы этой дуги из одной точки проведены две касательные к окружности. В фигуру, ограниченную дугой AB и касательными, вписана меньшая окружность. Найти ее радиус.

Ответ: 3.

5. Громоотвод защищает от молнии все предметы, расстояние от которых до его основания не превышает его удвоенной высоты. Найти наименьшую высоту громоотвода, необходимую для защиты прямоугольного участка 30 на 40 метров.

Решение. Громоотвод высоты h защищает круглую площадь радиуса $2h$, следовательно, задача сводится к отысканию радиуса наименьшего круга, в который можно вписать данный прямоугольник. Очевидно, диаметр такого круга должен совпадать с диагональю прямоугольника $d = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$, и необходимая высота $h = \frac{d}{4} = \frac{25}{4} = 6,25$.

Ответ: 6,25.

Блок 3

1. Найти наименьшее значение выражения $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^3 + \left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)^3$

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\sin x \neq 0$, $\sin y \neq 0$.

Заметим, что $u + \frac{1}{u} \geq 2$ для любых положительных u , так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2 + 1}{u} \geq 2 \Leftrightarrow u^2 + 1 \geq 2u \Leftrightarrow u^2 + 1 - 2u \geq 0 \Leftrightarrow (u - 1)^2 \geq 0,$$

причем равенство достигается при $u = 1$.

Таким образом, наименьшее значение выражения достигается при $\sin x = \sin y = 1$ и равно $2^3 + 2^3 = 16$.

Ответ. 16.

2. Оптовая торговая компания приобрела у производителя товар по цене x рублей за единицу, где x – натуральное число. Цену каждой единицы товара умножили на 1,7, затем округлили до целого (по обычному правилу) и отправили в магазин. В магазине цену опять умножили на 1,7 и округлили до целого. Получилось число 515. Какова цена производителя?

Решение. Последнее число $x_2 = 515$ получилось в результате округления числа x_1 , которое должно принадлежать интервалу $[514,5; 515,5)$. Разделив границы интервала на 1,7, получим: $514,5 \div 1,7 \approx 302,6$, $515,5 \div 1,7 \approx 303,2$. Таким образом, $x_1 = 303$. Следовательно, $x \cdot 1,7 \in [302,5; 303,5)$. В этом случае $x \in [177,9; 178,5)$, то есть, $x = 178$.

Ответ: 178.

3. Найти количество девяток, составляющих число $1000^{2023} - 1$.

Решение.

Число 1000^{2023} содержит 1 и 6069 нулей, при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6069 девяток.

Ответ: 6069.

4. Найти количество всех натуральных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей. (8 баллов)

Решение. Наибольшее возможное число, удовлетворяющее условию задачи 9876543210. Кроме того, число должно быть не менее чем двузначным. Все остальные

такие числа могут быть получены из 9876543210 вычеркиванием одной, двух, трех, четырех, пяти, шести, семи или восьми цифр из десяти. Тогда общее количество

$$1 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 = \\ = 1 + C_{10}^1 + (C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4) \cdot 2 + C_{10}^8 = 1 + 10 + (45 + 120 + 210) \cdot 2 + 252 = 1013.$$

Ответ. 1013.

5. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой правильные треугольники со стороной 1, образуют двугранный угол 60 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. В ответ записать квадрат полученного числа.

Ответ: 0,1875.

Составитель: доцент А.А. Яковлева

Научный редактор

заведующий кафедрой высшей математики профессор А.П. Господариков