

**8 класс****Вариант 1-1**

Задача 1 (5 баллов). Найти значение выражения $\frac{x}{y}$, если $\frac{9x^2 - 11xy + 16y^2}{2x^2 - 3y^2} = 4$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\frac{9x^2 - 11xy + 16y^2}{2x^2 - 3y^2} - 4 = 0,$$

$$\frac{x^2 - 11xy + 28y^2}{2x^2 - 3y^2} = 0.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на y^2 (заметим, что при $y = 0$ равенство неверно), обозначим $\frac{x}{y} = t$, тогда уравнение примет вид: $\frac{t^2 - 11t + 28}{2t^2 - 3} = 0$. Корнями являются числа $t_1 = 4, t_2 = 7$.

Ответ: 4 или 7.

Задача 2 (7 баллов). Доказать, что при любом натуральном n число $\frac{10^{2n} + 10^n + 7}{9}$ – целое.

Доказательство. Число $10^{2n} + 10^n + 7$ состоит из $2n+1$ цифр, цифра 1 (на первом месте), 1 (между первой и последней) и 7 на конце, остальные нули. Таким образом, сумма цифр этого числа равна 9, значит, оно делится на 9 без остатка, а число $\frac{10^{2n} + 10^n + 7}{9}$ – целое.

Задача 3 (10 баллов). В олимпиаде по математике участвовали ученики 8а и 8б классов. Какое наименьшее число участников может быть, если известно, что ученики 8а класса составляют в нем меньше 44%, но больше 43%?

Решение. Пусть в олимпиаде участвовали n учеников, из них m – из 8а. Необходимо найти наименьшее натуральное n , при котором существует такое натуральное m , что $\frac{43}{100} < \frac{m}{n} < \frac{44}{100}$.

Перевернем все дроби и вычтем их общую целую часть:

$$2\frac{14}{43} > \frac{n}{m} > 2\frac{3}{11},$$

$$\frac{14}{43} > \frac{n-2m}{m} > \frac{3}{11}.$$

То же самое сделаем еще раз:



$$3\frac{1}{14} < \frac{m}{n-2m} < 3\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{14} < \frac{m-3(n-2m)}{n-2m} = \frac{7m-3n}{n-2m} < \frac{2}{3},$$

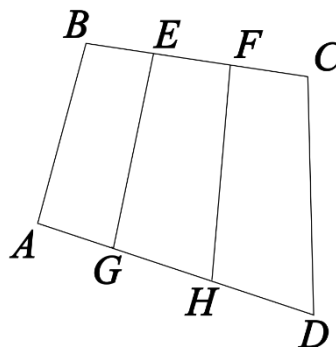
и еще раз:

$$14 > \frac{n-2m}{7m-3n} > \frac{3}{2}.$$

Заметим, что здесь впервые между границами неравенства встречаются целые числа. Наименьшее из них – число 2. Система уравнений $n-2m=2$, $7m-3n=1$ имеет решение в натуральных числах $n=16$, $m=7$.

Ответ: 16.

Задача 4 (13 баллов). При добыче руды открытым способом планируется проведение взрывных работ на участке $ABCD$ площадью 900 кв. ед., где $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Заряды расположены в точках E , F , G , H , которые делят его противоположные стороны на 3 равные части, и между собой соединены иницирующими проводами, как показано на рисунке. Найти площадь участка $EFGH$.



Решение. Докажем, что площадь четырехугольника $EFGH$ равна трети площади $ABCD$. Сделаем дополнительное построение: проведем во всех четырехугольниках диагонали, как показано на рис.1.

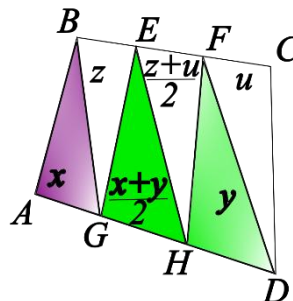


Рис. 1

Пусть площади крайних из заштрихованных на рисунке треугольников равны x и y соответственно. Тогда площадь среднего равна $(x+y)/2$. Действительно, их основания одинаковы, а высота среднего равна полусумме высот крайних (это следует из того, что высота среднего является средней линией трапеции, основаниями которой служат высоты двух крайних треугольников – см. рис. 2).

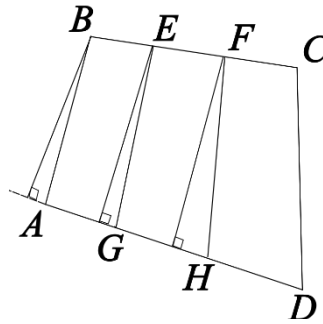


Рис. 2

Такое же рассуждение можно провести и для трех незаштрихованных на рис. 1 треугольников. Итак, площадь всего четырехугольника равна $3(x + y + z + u) / 2$, а площадь заключенной между прямыми части четырехугольника равна $(x + y + z + u) / 2$, т.е. в 3 раза меньше.

Ответ: 300 кв.ед.

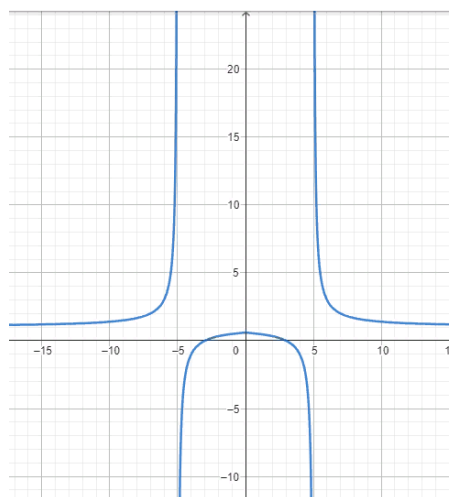
Задача 5 (15 баллов). Используя только знак модуля, изменить функцию $y = \frac{3-x}{x-5}$ так, чтобы она обладала следующим свойством:

- а) график функции симметричен относительно оси ординат; (4 балла)
- б) функция ограничена сверху; (5 баллов)
- в) множество значений функции – вся числовая ось. (6 баллов)

Построить графики полученных функций.

Решение: а) Если график симметричен относительно оси ординат, то функция – четная:

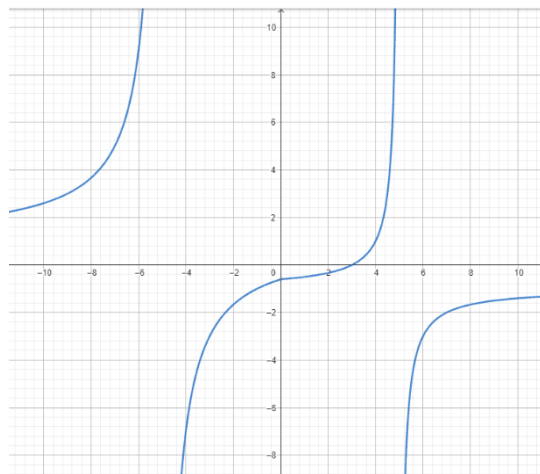
$y(-x) = y(x)$. Чтобы выполнялось это условие можно функцию изменить так: $y = \frac{3-|x|}{|x|-5}$.



б) $y = \frac{3-x}{|x-5|}$.



в) $y = \frac{3-x}{|x|-5}$.



Задача 6. Юный экстремал решил подняться на воздушном шаре на предельную высоту. Заполнив оболочку гелий-неоновой смесью, он вдруг обнаружил, что забыл прикрепить к ней кабину. Сколько минут будет падать с этой высоты камушек, если пролетающий мимо белоголовый гриф Руппеля заметил, что оболочка всего 1175 м не добрала до его предельной высоты полёта? Силой сопротивления воздуха при расчётах пренебречь. Во сколько раз изменилась подъёмная сила такого шара по отношению к подъёмной силе одной оболочки? Предельная высота полёта белоголового грифа Руппеля составляет 11300 м. Плотность воздуха $1,29 \text{ кг/м}^3$, плотность гелий-неоновой смеси $0,35 \text{ кг/м}^3$, масса оболочки 120 кг, объём оболочки 3000 м^3 , масса корзины 45 кг. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 . (7 баллов)

Решение:

Сначала будем искать высоту. Для этого вспомним о движении с ускорением свободного падения:



$$h = \frac{gt^2}{2}$$

Здесь h – высота тела над поверхностью Земли, t – время падения тела.

Тогда, можем выразить время падения:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (11300 - 1175)}{10}} = 45 \text{ с} = 0,75 \text{ мин}$$

Теперь определим, во сколько раз меньше подъёмная сила такого шара по отношению к подъёмной силе одной оболочки. Сама подъёмная сила является разностью между выталкивающей силой и силой тяжести:

$$F_{\text{под}} = F_A - F_T = \rho_v gV - \rho_r gV - m_i g$$

Здесь $F_{\text{под}}$ – подъёмная сила; F_A – архимедова сила; F_T – сила тяжести; ρ_v – плотность воздуха; ρ_r – плотность газовой смеси; V – объём оболочки; m_i – масса оболочки или воздушного шара.

$$\frac{F'_{\text{под}}}{F_{\text{под}}} = \frac{\rho_v gV - \rho_r gV - m_{\text{ш}} g}{\rho_v gV - \rho_r gV - m_{\text{об}} g} = \frac{\rho_v gV - \rho_r gV - m_{\text{об}} g - m_{\text{к}} g}{\rho_v gV - \rho_r gV - m_{\text{об}} g}$$

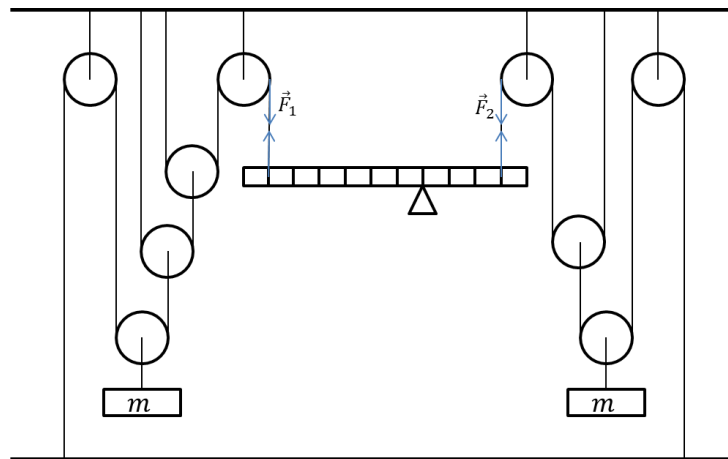
$$\frac{F'_{\text{под}}}{F_{\text{под}}} = 1 - \frac{m_{\text{к}} g}{(\rho_v - \rho_r) gV - m_{\text{об}} g}$$

$$\frac{F'_{\text{под}}}{F_{\text{под}}} = 1 - \frac{45 \cdot 10}{(1,29 - 0,35) \cdot 10 \cdot 3000 - 120 \cdot 10} = 1 - \frac{450}{28200 - 1200}$$

$$\frac{F'_{\text{под}}}{F_{\text{под}}} = 1 - \frac{450}{27000} = 1 - \frac{1}{60} \approx 0,98$$

Ответ: камушек будет падать 0,75 мин, подъёмная сила изменилась в 0,98 раз.

Задача 7. Валера купил в магазине шкаф и кошачий уголок. Однако дома покупки перемешались. Он попытался сам рассортировать покупки, но в итоге собрал вместо шкафа и кошачьего уголка систему, изображённую на рисунке ниже. Валера решил заменить крайний левый шнур пружиной жёсткостью 50 Н/м. Чему будет равно удлинение пружины, если общая масса грузов 200 г? (5 баллов)

**Решение:**

В левой части системы три подвижных блока и два неподвижных. Неподвижный блок не даёт выигрыша в силе, но позволяет изменить направление действия силы. Подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза. На груз действует сила тяжести. Подвижный блок уменьшает эту силу в 2 раза, в результате на крайний левый шнур действует сила, равная половине силы тяжести, действующей на груз. Если мы заменим шнур пружиной, то сила упругости будет определяться законом Гука:

$$F_y = k\Delta l$$

Учитывая силу, действующую на шнур, можем записать:

$$F_y = \frac{mg}{2} = k\Delta l$$

Из рисунка видно, что массы грузов равны, поэтому масса одного груза будет равна половине суммарной, то есть 100 г.

Тогда удлинение будет равно

$$\Delta l = \frac{mg}{2k} = \frac{0,1 \cdot 10}{2 \cdot 50} = 0,01 \text{ м}$$

Ответ: пружина удлинится на 1 см (0,01 м).

Задача 8. Для подъёма угля в шахте используется специальная платформа массой 0,53 т, грузоподъёмность которой в 4 раза превышает её массу. В движение платформа приводится тепловым двигателем с КПД 30%. Сколько литров дизельного топлива надо сжечь в двигателе, чтобы поднять 7 т угля с глубины 0,6 км. Удельная теплота сгорания дизельного топлива равна 42 МДж/кг, а плотность – 850 кг/м³. (15 баллов)

**Решение:**

Введём обозначения: m – грузоподъёмность платформы; $m_{\text{п}}$ – масса платформы; M – общая масса груза; Δh – высота подъёма; q – удельная теплота сгорания дизельного топлива; ρ – плотность дизельного топлива; η – КПД теплового двигателя.

КПД теплового двигателя определяется через отношение полезной работы к теплоте, полученной от нагревателя:

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{Q}$$

Полезная работа идёт на изменение высоты груза:

$$A_{\text{п}} = \Delta E_{\text{п}} = m_i g \Delta h$$

Теплота, которая идёт от нагревателя, получается при сжигании дизельного топлива:

$$Q = q m_{\text{т}}$$

Таким образом, для массы сжигаемого топлива получаем:

$$\begin{aligned} \eta Q &= A_{\text{п}} \\ \eta q m_{\text{т}} &= m_i g \Delta h \\ m_{\text{т}} &= \frac{m_i g \Delta h}{\eta q} \end{aligned}$$

Всего масса груза превышает грузоподъёмность платформы более чем в 3 раза. Значит, платформа 4 раза отправится туда с грузом и 3 раза обратно порожняком.

Для однократного подъёма платформы с грузом нужно сжечь топлива:

$$m_{\text{т1}} = \frac{(m_{\text{п}} + m) g \Delta h}{\eta q}$$

Для однократного спуска платформы обратно нужно сжечь топлива:

$$m_{\text{т2}} = \frac{m_{\text{п}} g \Delta h}{\eta q}$$

Для подъёма остатков груза нужно сжечь топлива:

$$m_{\text{т3}} = \frac{(m_{\text{п}} + M - 3m) g \Delta h}{\eta q}$$

Таким образом, всего будет потрачено топлива:

$$\begin{aligned} m_{\text{т}} &= 3m_{\text{т1}} + 3m_{\text{т2}} + m_{\text{т3}} \\ m_{\text{т}} &= 3 \frac{(m_{\text{п}} + m) g \Delta h}{\eta q} + 3 \frac{m_{\text{п}} g \Delta h}{\eta q} + \frac{(m_{\text{п}} + M - 3m) g \Delta h}{\eta q} \\ m_{\text{т}} &= \frac{g \Delta h}{\eta q} (3m_{\text{п}} + 3m + 3m_{\text{п}} + m_{\text{п}} + M - 3m) = \frac{(M + 7m_{\text{п}}) g \Delta h}{\eta q} \end{aligned}$$

Чтобы найти объём затраченного топлива, надо вспомнить о связи массы и объёма:



$$m = \rho V$$

Тогда получим:

$$V = \frac{(M + 7m_{\text{п}})g\Delta h}{\eta q \rho}$$

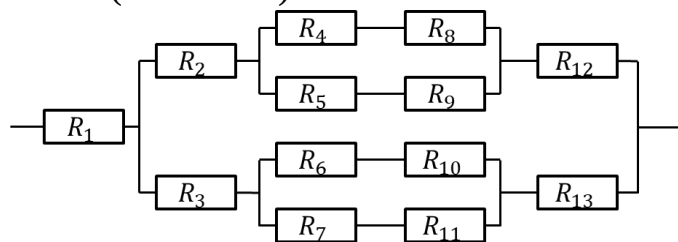
Подставляя численные значения:

$$V = \frac{(M + 7m_{\text{п}})g\Delta h}{\eta q \rho} = \frac{(7 \cdot 10^3 + 7 \cdot 0,53 \cdot 10^3) \cdot 10 \cdot 600}{0,3 \cdot 42 \cdot 10^6 \cdot 850} = \frac{10,71 \cdot 10^6 \cdot 6}{0,3 \cdot 42 \cdot 10^6 \cdot 850}$$

$$V = \frac{35,7}{7 \cdot 850} = \frac{5,1}{850} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 6 \text{ дм}^3 = 6 \text{ л}$$

Ответ: надо сжечь 6 л дизельного топлива.

Задача 9. Студент купил набор для изучения электроники и электротехники. Помогите ему рассчитать, какое количество теплоты выделится в собранной им схеме за 5 минут. Сила тока, текущего по цепи, равна 2 А. $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = R_4 = R_5 = R_8 = R_9 = R_{12} = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = R_6 = R_7 = R_{10} = R_{11} = R_{13} = 2 \text{ Ом}$. Схема приведена ниже. (13 баллов)



Решение:

Количество теплоты, выделившееся в схеме, можно найти по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t$$

Для расчёта по формуле нужно найти эквивалентное сопротивление цепи R . Для этого воспользуемся формулами для поиска общего сопротивления цепи с последовательно или параллельно соединёнными сопротивлениями:

$$R_{48} = R_4 + R_8$$

$$R_{59} = R_5 + R_9$$

$$R_{610} = R_6 + R_{10}$$

$$R_{711} = R_7 + R_{11}$$

$$\frac{1}{R_{4859}} = \frac{1}{R_{48}} + \frac{1}{R_{59}}$$

$$R_{4859} = \frac{(R_4 + R_8) \cdot (R_5 + R_9)}{R_4 + R_8 + R_5 + R_9}$$



$$\frac{1}{R_{610711}} = \frac{1}{R_{610}} + \frac{1}{R_{711}}$$

$$R_{610711} = \frac{(R_6 + R_{10}) \cdot (R_7 + R_{11})}{R_6 + R_{10} + R_7 + R_{11}}$$

$$R_B = R_2 + R_{4859} + R_{12} = R_2 + \frac{(R_4 + R_8) \cdot (R_5 + R_9)}{R_4 + R_8 + R_5 + R_9} + R_{12}$$

$$R_H = R_3 + R_{4859} + R_{13} = R_3 + \frac{(R_6 + R_{10}) \cdot (R_7 + R_{11})}{R_6 + R_{10} + R_7 + R_{11}} + R_{13}$$

$$\frac{1}{R_{BH}} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_H}$$

$$R_{BH} = \frac{R_B \cdot R_H}{R_B + R_H}$$

$$R = R_1 + \frac{R_B \cdot R_H}{R_B + R_H}$$

Подставив численные значения, получим:

$$R_B = R_2 + \frac{(R_4 + R_8) \cdot (R_5 + R_9)}{R_4 + R_8 + R_5 + R_9} + R_{12} = 1 + \frac{(1 + 1) \cdot (1 + 1)}{1 + 1 + 1 + 1} + 1 = 3 \text{ Ом}$$

$$R_H = R_3 + \frac{(R_6 + R_{10}) \cdot (R_7 + R_{11})}{R_6 + R_{10} + R_7 + R_{11}} + R_{13} = 2 + \frac{(2 + 2) \cdot (2 + 2)}{2 + 2 + 2 + 2} + 2 = 6 \text{ Ом}$$

$$R = 3 + \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 3 + 2 = 5 \text{ Ом}$$

$$Q = I^2 R t = 2^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 60 = 4 \cdot 5 \cdot 300 = 6000 \text{ Дж} = 6 \text{ кДж}$$

Ответ: выделится 6 Дж тепла.

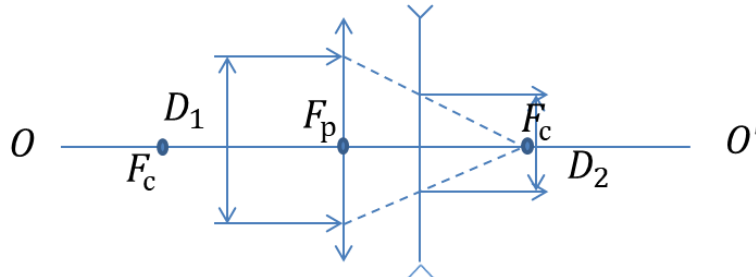
Задача 10. Ученик восьмого класса для опытов по оптике проделал дырку в занавеске. Используя свои знания по оптике и набор линз и призм, он сумел изменить ширину пучка с 50 мм до 2,5 см на расстоянии в 1/8 долю дм. Каким образом он сумел это сделать? В качестве ответа однозначно опишите использованную им систему. (10 баллов)

Решение:

Для успешного решения этой задачи надо вспомнить свойства оптических линз. Собирающие линзы преобразуют падающий на них параллельный пучок в сходящийся, а падающий на них расходящийся пучок в параллельный. Рассеивающие линзы преобразуют падающий на них параллельный пучок в расходящийся, а падающий на них сходящийся пучок в параллельный.



Таким образом, нам надо поставить друг за другом собирающую и рассеивающую линзы. В фокусе собирающей линзы пучок будет сфокусирован. То есть его ширина уменьшится до нуля. Следовательно, нам надо поставить рассеивающую линзу до фокуса собирающей. Если направить сходящийся пучок на рассеивающую линзу, то продолжения лучей пересекутся в точке фокуса. Нарисуем схему хода лучей:



Согласно условию пучок изменил свою ширину с 50 мм до 2,5 см. То есть с 0,05 м до 0,025 м. Получается, что пучок стал уже в два раза.

На рисунке можно чётко выделить четыре прямоугольных треугольника. Два верхних равны двум нижним в силу симметрии картины (и того, что оптическую ось OO' мы провели посередине пучка). При этом два верхних (и аналогично им два нижних) подобны друг другу по двум углам. Это значит, что фокусные расстояния (которые являются в них катетами) относятся друг к другу так же, как половины ширин пучка (которые являются в них другими катетами).

Нам известно по условию, что пучок сузился в два раза на расстоянии, равном $1/8$ дм, то есть 0,125 дм. Таким образом:

$$\frac{F_p}{F_c} = \frac{D_2/2}{D_1/2} = \frac{0,0125}{0,025} = \frac{1}{2}$$
$$F_p = \frac{1}{2} F_c$$

Расстояние, на котором пучок сузился вдвое как равно половине фокуса собирающей линзы, то есть фокусу рассеивающей. Тогда:

$$F_p = 0,125 \text{ дм} = 1,25 \text{ см} = 12,5 \text{ мм} = 0,0125 \text{ м}$$

$$F_c = 0,25 \text{ дм} = 2,5 \text{ см} = 25 \text{ мм} = 0,025 \text{ м}$$

Оптическая сила является величиной, обратной фокусному расстоянию:

$$\frac{1}{F_p} = \frac{1}{0,0125} = 80 \text{ дптр}$$
$$\frac{1}{F_c} = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ дптр}$$

Ответ: система состоит из собирающей линзы с оптической силой 40 дптр и рассеивающей линзы с оптической силой 80 дптр, которые стоят последовательно друг за другом на расстоянии 12,5 мм (0,0125 м).

**Вариант 1-2**

Задача 1 (5 баллов). Найти значение выражения $\frac{x}{y}$, если $\frac{30x^2 + 9xy - 12y^2}{4x^2 - y^2} = 7$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\frac{30x^2 + 9xy - 12y^2}{4x^2 - y^2} - 7 = 0,$$

$$\frac{2x^2 + 9xy - 5y^2}{4x^2 - y^2} = 0.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на y^2 (заметим, что при $y = 0$ равенство неверно), обозначим $\frac{x}{y} = t$, тогда уравнение примет вид: $\frac{2t^2 + 9t - 5}{4t^2 - 1} = 0$. Корнями являются числа $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -5$. Корень $t_1 = \frac{1}{2}$ не подходит, так как при этом значении t знаменатель обращается в ноль.

Ответ: -5 .

Задача 2 (7 баллов). Винни Пух наугад выбирает три разные цифры, отличные от нуля, и составляет всевозможные трехзначные числа. Пятачок находит их сумму и утверждает, что она каждый раз делится на 37. Прав ли он?

Решение. Из цифр a, b, c , отличных от нуля, можно составить 6 различных трехзначных чисел, их сумма $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cba} + \overline{cab} = 222(a + b + c)$. Правая часть этого равенства делится на 37: $222 = 6 \cdot 37$, значит левая часть также кратна 37.

Ответ: да.

Задача 3 (10 баллов). В лабораторию для проведения высокотехнологичного исследования доставили ящики с образцами минералов с различных месторождений. Ящик с содержащимися в нем образцами считается приоритетным для проведения анализа, если в нем находится более пятидесяти образцов. Лаборант Золотов подсчитал процент приоритетных ящиков, а лаборант Хрусталёв подсчитал процент образцов, находящихся в приоритетных ящиках. У кого процент больше?

Решение. Пусть всего оказалось k приоритетных и l обычных ящиков. Обозначим количество образцов, находящихся в приоритетных ящиках, через A , а количество остальных – через B .

Тогда $A > 50k, B \leq 50l$ и, значит, $\frac{A}{k} > 50, \frac{B}{l} \leq 50$, поэтому $\frac{A}{k} > \frac{B}{l}$. Из последнего неравенства вытекает следующие:

$$\frac{B}{A} < \frac{l}{k}, \frac{A+B}{A} < \frac{l+k}{k}, \text{ откуда } \frac{A}{A+B} \cdot 100\% > \frac{k}{l+k} \cdot 100\%.$$



В последнем неравенстве слева стоит процент образцов, находящихся в приоритетных ящиках, а справа – процент приоритетных ящиков.

Ответ: у лаборанта Хрусталёва.

Задача 4 (13 баллов). Для проведения буровых работ на участке $ABCD$, имеющем форму выпуклого четырехугольника площадью 120 кв. ед., рабочими была выделена зона для транспорта, ограниченная прямыми MN и PQ , где M, N лежат на стороне AB , а P, Q – на CD , причем $AM = NB = \frac{1}{3}AB$, $CP = DQ = \frac{1}{3}CD$. Найти площадь участка $MNPQ$.

Решение. Докажем, что площадь четырехугольника $MNPQ$ равна трети площади $ABCD$. Сделаем дополнительное построение: проведем во всех четырехугольниках диагонали, как показано на рис.1.

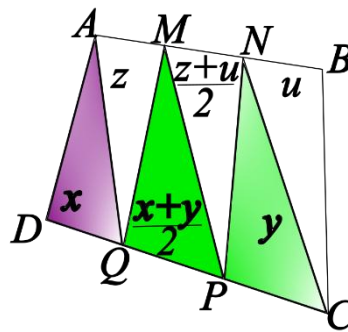


Рис. 1

Пусть площади крайних из заштрихованных на рисунке треугольников равны x и y соответственно. Тогда площадь среднего равна $(x+y)/2$. Действительно, их основания одинаковы, а высота среднего равна полусумме высот крайних (это следует из того, что высота среднего является средней линией трапеции, основаниями которой служат высоты двух крайних треугольников – см. рис. 2).

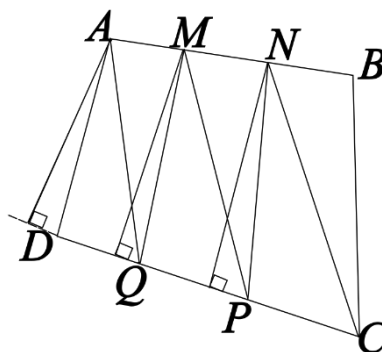


Рис. 2

Такое же рассуждение можно провести и для трех незаштрихованных на рис. 1 треугольников. Итак, площадь всего четырехугольника равна $3(x+y+z+u)/2$, а площадь заключенной между прямыми части четырехугольника равна $(x+y+z+u)/2$, т.е. в 3 раза меньше.

Ответ: 40 кв. ед.

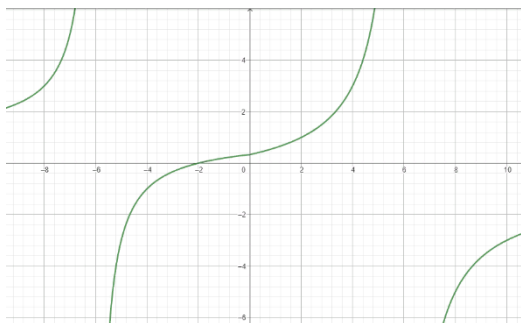


Задача 5 (15 баллов). Используя только знак модуля, изменить функцию $y = \frac{-x-2}{x-6}$ так, чтобы она обладала следующим свойством:

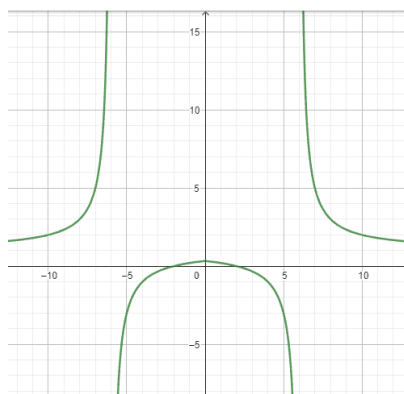
- а) область определения функции – вся числовая ось, за исключением двух точек; (4 балла)
- б) график функции имеет вертикальную ось симметрии; (5 баллов)
- в) $y(x) \leq 0$ при $x \in (-6; 6)$. (6 баллов)

Построить графики полученных функций.

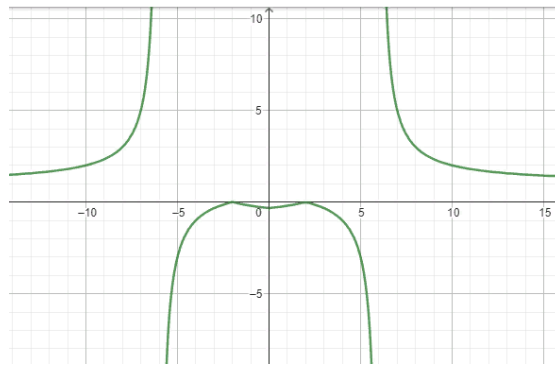
Решение: а) Область определения исходной функции – $(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$. Чтобы функция не была определена в точке $x = -6$ функцию можно изменить так: $y = \frac{-x-2}{|x|-6}$.



б) $y = \frac{|-x|-2}{|x|-6}$ – график четной функции симметричен относительно оси ординат.



в) $y = \frac{||-x|-2|}{|x|-6}$



Задача 6. Путешественник решил подняться на воздушном шаре на предельную высоту. Заполнив оболочку гелий-неоновой смесью, он вдруг обнаружил, что забыл прикрепить к ней кабину. Сколько секунд будет падать с этой высоты камушек, если пролетающий мимо горный гусь заметил, что оболочка всего 30 м не добрала до средней высоты его обычного полёта? Силой сопротивления воздуха при расчётах пренебречь. Во сколько раз изменилась подъёмная сила такого шара по отношению к подъёмной силе одной оболочки? Обычно горный гусь летает на высоте от 6000 м до 8500 м. Плотность воздуха $1,29 \text{ кг/м}^3$, плотность гелий-неоновой смеси $0,35 \text{ кг/м}^3$, масса оболочки 70 кг, объём оболочки 1300 м^3 , масса корзины 45 кг. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 . (7 баллов)

Решение:

Сначала будем искать высоту. Для этого вспомним о движении с ускорением свободного падения:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

Здесь h – высота тела над поверхностью Земли, t – время падения тела.

Тогда, можем выразить время падения:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(\frac{8500 + 6000}{2} - 30 \right)}{10}} = 38 \text{ с}$$

Теперь определим, во сколько раз меньше подъёмная сила такого шара по отношению к подъёмной силе одной оболочки. Сама подъёмная сила является разностью между выталкивающей силой и силой тяжести:

$$F_{\text{под}} = F_A - F_T = \rho_{\text{в}} g V - \rho_{\text{г}} g V - m_i g$$

Здесь $F_{\text{под}}$ – подъёмная сила; F_A – архимедова сила; F_T – сила тяжести; $\rho_{\text{в}}$ – плотность воздуха; $\rho_{\text{г}}$ – плотность газовой смеси; V – объём оболочки; m_i – масса оболочки или воздушного шара.



$$\frac{F'_{\text{под}}}{F_{\text{под}}} = \frac{\rho_{\text{в}}gV - \rho_{\text{г}}gV - m_{\text{ш}}g}{\rho_{\text{в}}gV - \rho_{\text{г}}gV - m_{\text{об}}g} = \frac{\rho_{\text{в}}gV - \rho_{\text{г}}gV - m_{\text{об}}g - m_{\text{к}}g}{\rho_{\text{в}}gV - \rho_{\text{г}}gV - m_{\text{об}}g}$$

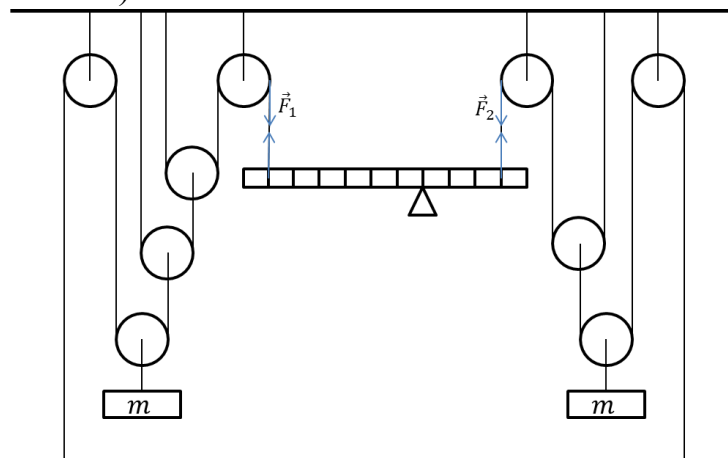
$$\frac{F'_{\text{под}}}{F_{\text{под}}} = 1 - \frac{m_{\text{к}}g}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{г}})gV - m_{\text{об}}g}$$

$$\frac{F'_{\text{под}}}{F_{\text{под}}} = 1 - \frac{45 \cdot 10}{(1,29 - 0,35) \cdot 10 \cdot 1300 - 70 \cdot 10} = 1 - \frac{450}{28200 - 1200}$$

$$\frac{F'_{\text{под}}}{F_{\text{под}}} = 1 - \frac{450}{11520} = 1 - \frac{1}{25,6} \approx 0,96$$

Ответ: камушек будет падать 38 с, подъёмная сила изменилась в 0,96 раз.

Задача 7. Сеня попытался самостоятельно собрать купленный им в интернет-магазине диван-кровать. Однако в итоге собрал систему, изображённую на рисунке ниже. Сеня заменил крайний правый шнур пружиной, которая удлинилась на 0,25 см. Чему равна жёсткость пружины, если общая масса грузов 200 г? (5 баллов)



Решение:

В правой части системы два подвижных блока и два неподвижных. Неподвижный блок не даёт выигрыша в силе, но позволяет изменить направление действия силы. Подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза. На груз действует сила тяжести. Подвижный блок уменьшает эту силу в 2 раза, в результате на крайний правый шнур действует сила, равная половине силы тяжести, действующей на груз. Если мы заменим шнур пружиной, то сила упругости будет определяться законом Гука:

$$F_y = k\Delta l$$

Учитывая силу, действующую на шнур, можем записать:



$$F_y = \frac{mg}{2} = k\Delta l$$

Из рисунка видно, что массы грузов равны, поэтому масса одного груза будет равна половине суммарной, то есть 100 г.

Тогда жёсткость будет равна

$$k = \frac{mg}{2\Delta l} = \frac{0,1 \cdot 10}{2 \cdot 0,0025} = 200 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Ответ: жёсткость пружины равна 200 Н/м.

Задача 8. Для подъёма грузов на стройке используется специальная платформа массой 0,5 т, грузоподъёмность которой в 4 раза превышает её массу. В движение платформа приводится тепловым двигателем с КПД 30%. Сколько литров бензина надо сжечь в двигателе, чтобы поднять 7 т груза на высоту 115 м. Удельная теплота сгорания дизельного топлива равна 46 МДж/кг, а плотность – 700 кг/м³. (15 баллов)

Решение:

Введём обозначения: m – грузоподъёмность платформы; $m_{\text{п}}$ – масса платформы; M – общая масса груза; Δh – высота подъёма; q – удельная теплота сгорания дизельного топлива; ρ – плотность дизельного топлива; η – КПД теплового двигателя.

КПД теплового двигателя определяется через отношение полезной работы к теплоте, полученной от нагревателя:

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{Q}$$

Полезная работа идёт на изменение высоты груза:

$$A_{\text{п}} = \Delta E_{\text{п}} = m_i g \Delta h$$

Теплота, которая идёт от нагревателя, получается при сжигании дизельного топлива:

$$Q = qm_{\text{т}}$$

Таким образом, для массы сжигаемого топлива получаем:

$$\eta Q = A_{\text{п}}$$

$$\eta q m_{\text{т}} = m_i g \Delta h$$

$$m_{\text{т}} = \frac{m_i g \Delta h}{\eta q}$$

Всего масса груза превышает грузоподъёмность платформы более чем в 3 раза. Значит, платформа 4 раза отправится туда с грузом и 3 раза обратно порожняком.

Для однократного подъёма платформы с грузом нужно сжечь топлива:



$$m_{T1} = \frac{(m_{\Pi} + m)g\Delta h}{\eta q}$$

Для однократного спуска платформы обратно нужно сжечь топлива:

$$m_{T2} = \frac{m_{\Pi}g\Delta h}{\eta q}$$

Для подъёма остатков груза нужно сжечь топлива:

$$m_{T3} = \frac{(m_{\Pi} + M - 3m)g\Delta h}{\eta q}$$

Таким образом, всего будет потрачено топлива:

$$\begin{aligned} m_T &= 3m_{T1} + 3m_{T2} + m_{T3} \\ m_T &= 3 \frac{(m_{\Pi} + m)g\Delta h}{\eta q} + 3 \frac{m_{\Pi}g\Delta h}{\eta q} + \frac{(m_{\Pi} + M - 3m)g\Delta h}{\eta q} \\ m_T &= \frac{g\Delta h}{\eta q} (3m_{\Pi} + 3m + 3m_{\Pi} + m_{\Pi} + M - 3m) = \frac{(M + 7m_{\Pi})g\Delta h}{\eta q} \end{aligned}$$

Чтобы найти объём затраченного топлива, надо вспомнить о связи массы и объёма:

$$m = \rho V$$

Тогда получим:

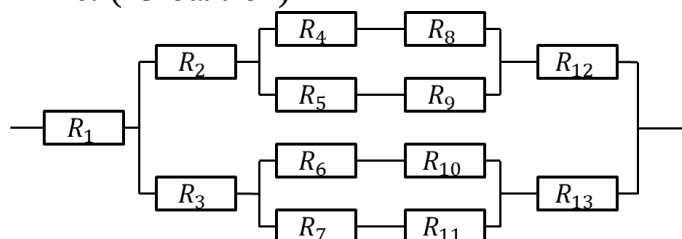
$$V = \frac{(M + 7m_{\Pi})g\Delta h}{\eta q \rho}$$

Подставляя численные значения:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(M + 7m_{\Pi})g\Delta h}{\eta q \rho} = \frac{(7 \cdot 10^3 + 7 \cdot 0,5 \cdot 10^3) \cdot 10 \cdot 115}{0,3 \cdot 46 \cdot 10^6 \cdot 700} = \frac{10,5 \cdot 10^6 \cdot 1,15}{0,3 \cdot 46 \cdot 10^6 \cdot 700} \\ V &= \frac{35}{0,025 \cdot 700} = \frac{35}{17,5} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2 \text{ дм}^3 = 2 \text{ л} \end{aligned}$$

Ответ: надо сжечь 2 л бензина.

Задача 9. Студент купил набор для изучения электроники и электротехники. Помогите ему рассчитать, какое количество теплоты выделится в собранной им схеме за 6 минут 40 с. Сила тока, текущего по цепи, равна 3 А. $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = R_4 = R_9 = R_3 = R_6 = R_{11} = 1 \text{ Ом}$, $R_5 = R_8 = R_{12} = R_7 = R_{10} = R_{13} = 2 \text{ Ом}$. Схема приведена ниже. (13 баллов)



**Решение:**

Количество теплоты, выделившееся в схеме, можно найти по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t$$

Для расчёта по формуле нужно найти эквивалентное сопротивление цепи R . Для этого воспользуемся формулами для поиска общего сопротивления цепи с последовательно или параллельно соединёнными сопротивлениями:

$$\begin{aligned} R_{48} &= R_4 + R_8 \\ R_{59} &= R_5 + R_9 \\ R_{610} &= R_6 + R_{10} \\ R_{711} &= R_7 + R_{11} \\ \frac{1}{R_{4859}} &= \frac{1}{R_{48}} + \frac{1}{R_{59}} \\ R_{4859} &= \frac{(R_4 + R_8) \cdot (R_5 + R_9)}{R_4 + R_8 + R_5 + R_9} \\ \frac{1}{R_{610711}} &= \frac{1}{R_{610}} + \frac{1}{R_{711}} \\ R_{610711} &= \frac{(R_6 + R_{10}) \cdot (R_7 + R_{11})}{R_6 + R_{10} + R_7 + R_{11}} \\ R_B &= R_2 + R_{4859} + R_{12} = R_2 + \frac{(R_4 + R_8) \cdot (R_5 + R_9)}{R_4 + R_8 + R_5 + R_9} + R_{12} \\ R_H &= R_3 + R_{4859} + R_{13} = R_3 + \frac{(R_6 + R_{10}) \cdot (R_7 + R_{11})}{R_6 + R_{10} + R_7 + R_{11}} + R_{13} \\ \frac{1}{R_{BH}} &= \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_H} \\ R_{BH} &= \frac{R_B \cdot R_H}{R_B + R_H} \\ R &= R_1 + \frac{R_B \cdot R_H}{R_B + R_H} \end{aligned}$$

Подставив численные значения, получим:

$$\begin{aligned} R_B &= R_2 + \frac{(R_4 + R_8) \cdot (R_5 + R_9)}{R_4 + R_8 + R_5 + R_9} + R_{12} = 1 + \frac{(1 + 2) \cdot (1 + 2)}{1 + 2 + 1 + 2} + 2 = 4,5 \text{ Ом} \\ R_H &= R_3 + \frac{(R_6 + R_{10}) \cdot (R_7 + R_{11})}{R_6 + R_{10} + R_7 + R_{11}} + R_{13} = 1 + \frac{(1 + 2) \cdot (1 + 2)}{1 + 2 + 1 + 2} + 2 = 4,5 \text{ Ом} \\ R &= 3 + \frac{4,5 \cdot 4,5}{4,5 + 4,5} = 3 + 2,25 = 5,25 \text{ Ом} \\ Q &= I^2 R t = 3^2 \cdot 5,25 \cdot 6 \frac{2}{3} \cdot 60 = 9 \cdot 5,25 \cdot 400 = 18900 \text{ Дж} = 18,9 \text{ кДж} \end{aligned}$$



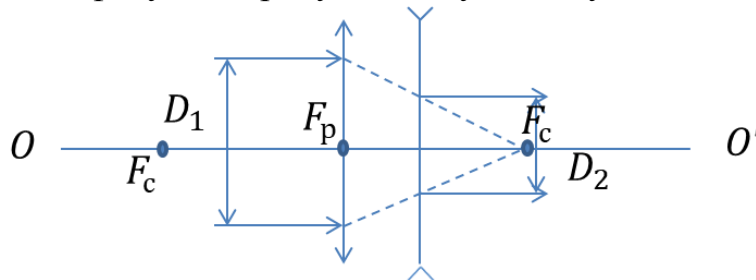
Ответ: выделится 18900 Дж тепла.

Задача 10. Ученик восьмого класса для опытов по оптике проделал дырку в занавеске. Используя свои знания по оптике и набор линз и призм, он сумел изменить ширину пучка с 3 см до 15 мм на расстоянии в $1/4$ долю дм. Каким образом он сумел это сделать? В качестве ответа однозначно опишите использованную им систему. (10 баллов)

Решение:

Для успешного решения этой задачи надо вспомнить свойства оптических линз. Собирающие линзы преобразуют падающий на них параллельный пучок в сходящийся, а падающий на них расходящийся пучок в параллельный. Рассеивающие линзы преобразуют падающий на них параллельный пучок в расходящийся, а падающий на них сходящийся пучок в параллельный.

Таким образом, нам надо поставить друг за другом собирающую и рассеивающую линзы. В фокусе собирающей линзы пучок будет сфокусирован. То есть его ширина уменьшится до нуля. Следовательно, нам надо поставить рассеивающую линзу до фокуса собирающей. Если направить сходящийся пучок на рассеивающую линзу, то продолжения лучей пересекутся в точке фокуса. Нарисуем схему хода лучей:



Согласно условию пучок изменил свою ширину с 3 см до 15 мм. То есть с 0,03 м до 0,015 м. Получается, что пучок стал уже в два раза.

На рисунке можно чётко выделить четыре прямоугольных треугольника. Два верхних равны двум нижним в силу симметрии картины (и того, что оптическую ось OO' мы провели посередине пучка). При этом два верхних (и аналогично им два нижних) подобны друг другу по двум углам. Это значит, что фокусные расстояния (которые являются в них катетами) относятся друг к другу так же, как половины ширин пучка (которые являются в них другими катетами).

Нам известно по условию, что пучок сузился в два раза на расстоянии, равном $1/4$ дм, то есть 0,25 дм. Таким образом:



$$\frac{F_p}{F_c} = \frac{D_2/2}{D_1/2} = \frac{0,0075}{0,015} = \frac{1}{2}$$
$$F_p = \frac{1}{2} F_c$$

Расстояние, на котором пучок сузился вдвое как равно половине фокуса собирающей линзы, то есть фокусу рассеивающей. Тогда:

$$F_p = 0,25 \text{ дм} = 2,5 \text{ см} = 25 \text{ мм} = 0,025 \text{ м}$$

$$F_c = 0,5 \text{ дм} = 5 \text{ см} = 50 \text{ мм} = 0,05 \text{ м}$$

Оптическая сила является величиной, обратной фокусному расстоянию:

$$\frac{1}{F_p} = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ дптр}$$

$$\frac{1}{F_c} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ дптр}$$

Ответ: система состоит из собирающей линзы с оптической силой 20 дптр и рассеивающей линзы с оптической силой 40 дптр, которые стоят последовательно друг за другом на расстоянии 25 мм (0,025 м).

**Вариант 2-1**

Задача 1 (5 баллов). Найти значение выражения $\frac{x}{y}$, если $\frac{9x^2 - 11xy + 16y^2}{2x^2 - 3y^2} = 4$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\frac{9x^2 - 11xy + 16y^2}{2x^2 - 3y^2} - 4 = 0,$$

$$\frac{x^2 - 11xy + 28y^2}{2x^2 - 3y^2} = 0.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на y^2 (заметим, что при $y = 0$ равенство неверно), обозначим $\frac{x}{y} = t$, тогда уравнение примет вид: $\frac{t^2 - 11t + 28}{2t^2 - 3} = 0$. Корнями являются числа $t_1 = 4, t_2 = 7$.

Ответ: 4 или 7.

Задача 2 (7 баллов). Доказать, что при любом натуральном n число $\frac{10^{2n} + 10^n + 7}{9}$ – целое.

Доказательство. Число $10^{2n} + 10^n + 7$ состоит из $2n+1$ цифр, цифра 1 (на первом месте), 1 (между первой и последней) и 7 на конце, остальные нули. Таким образом, сумма цифр этого числа равна 9, значит, оно делится на 9 без остатка, а число $\frac{10^{2n} + 10^n + 7}{9}$ – целое.

Задача 3 (10 баллов). В олимпиаде по математике участвовали ученики 8а и 8б классов. Какое наименьшее число участников может быть, если известно, что ученики 8а класса составляют в нем меньше 44%, но больше 43%?

Решение. Пусть в олимпиаде участвовали n учеников, из них m – из 8а. Необходимо найти наименьшее натуральное n , при котором существует такое натуральное m , что $\frac{43}{100} < \frac{m}{n} < \frac{44}{100}$.

Перевернем все дроби и вычтем их общую целую часть:

$$2\frac{14}{43} > \frac{n}{m} > 2\frac{3}{11},$$

$$\frac{14}{43} > \frac{n - 2m}{m} > \frac{3}{11}.$$

То же самое сделаем еще раз:



$$3\frac{1}{14} < \frac{m}{n-2m} < 3\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{14} < \frac{m-3(n-2m)}{n-2m} = \frac{7m-3n}{n-2m} < \frac{2}{3},$$

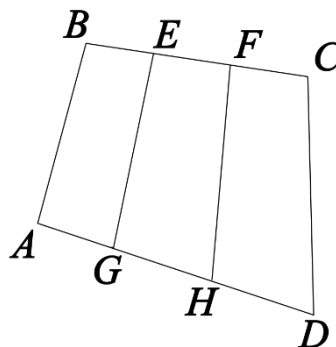
и еще раз:

$$14 > \frac{n-2m}{7m-3n} > \frac{3}{2}.$$

Заметим, что здесь впервые между границами неравенства встречаются целые числа. Наименьшее из них – число 2. Система уравнений $n-2m=2$, $7m-3n=1$ имеет решение в натуральных числах $n=16$, $m=7$.

Ответ: 16.

Задача 4 (13 баллов). При добыче руды открытым способом планируется проведение взрывных работ на участке $ABCD$ площадью 900 кв. ед., где $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Заряды расположены в точках E , F , G , H , которые делят его противоположные стороны на 3 равные части, и между собой соединены иницирующими проводами, как показано на рисунке. Найти площадь участка $EFGH$.



Решение. Докажем, что площадь четырехугольника $EFGH$ равна трети площади $ABCD$. Сделаем дополнительное построение: проведем во всех четырехугольниках диагонали, как показано на рис.1.

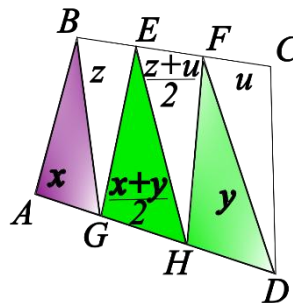


Рис. 1

Пусть площади крайних из заштрихованных на рисунке треугольников равны x и y соответственно. Тогда площадь среднего равна $(x+y)/2$. Действительно, их основания одинаковы, а высота среднего равна полусумме высот крайних (это следует из того, что высота среднего является средней линией трапеции, основаниями которой служат высоты двух крайних треугольников – см. рис. 2).

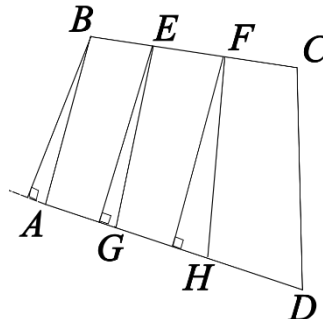


Рис. 2

Такое же рассуждение можно провести и для трех незаштрихованных на рис. 1 треугольников. Итак, площадь всего четырехугольника равна $3(x + y + z + u) / 2$, а площадь заключенной между прямыми части четырехугольника равна $(x + y + z + u) / 2$, т.е. в 3 раза меньше.

Ответ: 300 кв.ед.

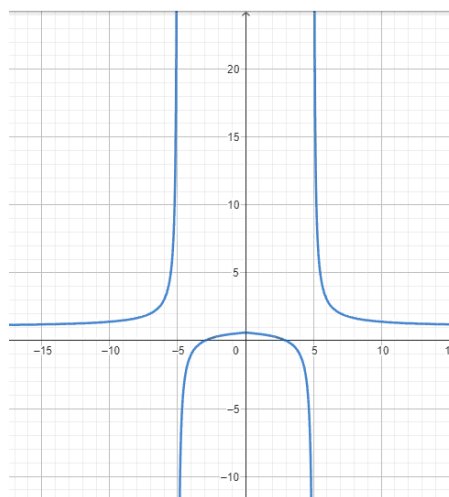
Задача 5 (15 баллов). Используя только знак модуля, изменить функцию $y = \frac{3-x}{x-5}$ так, чтобы она обладала следующим свойством:

- а) график функции симметричен относительно оси ординат; (4 балла)
- б) функция ограничена сверху; (5 баллов)
- в) множество значений функции – вся числовая ось. (6 баллов)

Построить графики полученных функций.

Решение: а) Если график симметричен относительно оси ординат, то функция – четная:

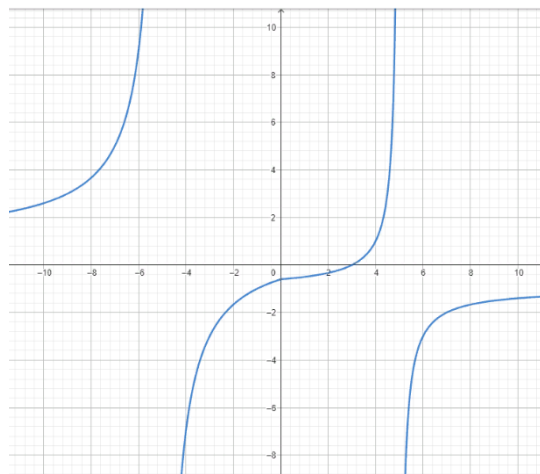
$y(-x) = y(x)$. Чтобы выполнялось это условие можно функцию изменить так: $y = \frac{3-|x|}{|x|-5}$.



б) $y = \frac{3-x}{|x-5|}$.



в) $y = \frac{3-x}{|x|-5}$.



Задача 6. Подводная лодка опустилась на некоторую глубину. Проплывающий мимо кашалот заметил, что давление воды на него увеличилось в 104 раза по сравнению с поверхностью. На какую глубину опустилась подводная лодка? Помогите кашалоту посчитать, сколько секунд он бы падал в море, если бы поднялся над ним на такую высоту? Плотность морской воды 1030 кг/м³? Атмосферное давление принять равным 10⁵ Па. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с². (5 баллов)

Решение:

Давление воды на некоторой глубине определяется по следующей формуле:

$$p = p_{\text{атм}} + \rho gh$$

Здесь ρ – плотность морской воды. Тогда из отношения давления на глубине к давлению на поверхности можно найти глубину погружения:

$$k = \frac{p}{p_{\text{атм}}} = \frac{p_{\text{атм}} + \rho gh}{p_{\text{атм}}} = 1 + \frac{\rho gh}{p_{\text{атм}}}$$
$$(k - 1)p_{\text{атм}} = \rho gh$$



$$h = \frac{(k-1)p_{\text{атм}}}{\rho g} = \frac{(104-1) \cdot 10^5}{1030 \cdot 10} = \frac{103 \cdot 10^5}{103 \cdot 10^2} = 10^{5-2} = 10^3 \text{ м} = 1 \text{ км}$$

Теперь будем искать время. Для этого вспомним о движении с ускорением свободного падения:

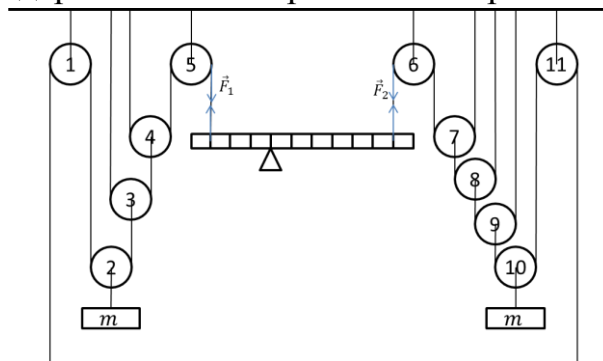
$$h = \frac{gt^2}{2}$$

Здесь h – высота тела над поверхностью моря, t – время падения тела. Тогда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{10}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14.1 \text{ с}$$

Ответ: глубина погружения 1 км, время падения 14,1 с.

Задача 7. Ворон залетел в сарай и обнаружил рядом со странной конструкцией из трубочек разной формы и бутылок уравновешенную систему подвесов, приведённую на схему ниже. Он быстро сообразил, как нужно уравновесить рычаг, чтобы блоки с 1 по 4 можно было заменить грузом в 6 раз меньшим, чем там висит сейчас. В каком положении был рычаг, после того как ворон улетел с добычей? Ответ приведите, указав сколько делений l содержат левое и правое плечи рычага. (7 баллов)



Решение:

Для начала запишем правило равновесия рычага:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Здесь l_1 и l_2 – плечи уравновешенного воронком рычага.

По условию масса m' , которой ворон заменил блоки с 1 по 4, равна:

$$m' = \frac{m}{6}$$

В правой части системы два неподвижных блока и четыре подвижных. Неподвижный блок не даёт выигрыша в силе, но позволяет изменить



направление действия силы. Подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза. На груз действует сила тяжести. Подвижный блок уменьшает эту силу в 2 раза, в результате на рычаг действует сила, которая в 16 раз меньше силы тяжести, действующей на груз справа.

Левая часть системы заменена на массу m' , поэтому слева на рычаг действует сила, равная силе тяжести, действующей на эту массу.

Таким образом, можем записать:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{m'g}{mg/16} = \frac{mg}{6} \div \frac{mg}{16} = \frac{mg \cdot 16}{6 \cdot mg} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$
$$8l_1 = 3l_2$$

Всего в рычаге 11 делений l . Сумма плеч равна общему количеству делений. Тогда:

$$l_{\text{общ}} = l_1 + l_2 = \frac{3}{8}l_2 + l_2 = \frac{11}{8}l_2 \Rightarrow l_2 = \frac{8}{11}l_{\text{общ}} = 8l$$
$$l_{\text{общ}} = l_1 + l_2 = l_1 + \frac{8}{3}l_1 = \frac{11}{3}l_1 \Rightarrow l_1 = \frac{3}{11}l_{\text{общ}} = 3l$$

Ответ: $l_1 = 3l, l_2 = 8l$.

Задача 8. Сколько литров воды можно вскипятить, используя теплоту, которая тратится на нагревание алюминиевого провода длиной 1 м и площадью поперечного сечения 1 мм² при протекании через него электрического тока величиной 3,5 А в течение 1 часа? Плотность воды 1000 кг/м³, удельное сопротивление алюминия $2,8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·К). (13 баллов)

Решение:

Количество теплоты, которое требуется для нагрева воды, можно посчитать по следующей формуле:

$$Q = cm\Delta t^\circ$$

Здесь c – удельная теплоёмкость воды; m – масса воды; Δt° – температура, на которую нагрелась вода.

Количество теплоты, выделившееся в проводе, можно найти по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t$$

Здесь I – сила тока, текущего в проводе; t – время, в течение которого ток тѣк по проводу. Сопротивление R можно выразить через параметры провода:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



Здесь l – длина провода; S – площадь поперечного сечения; ρ – удельное сопротивление материала, из которого сделан провод.

Из этих соотношений можно выразить массу:

$$cm\Delta t^\circ = I^2 \rho \frac{l}{S} t$$
$$m = \frac{I^2 \rho l t}{c \Delta t^\circ S}$$

Объём воды связан с массой воды через плотность $\rho_{\text{пл}}$:

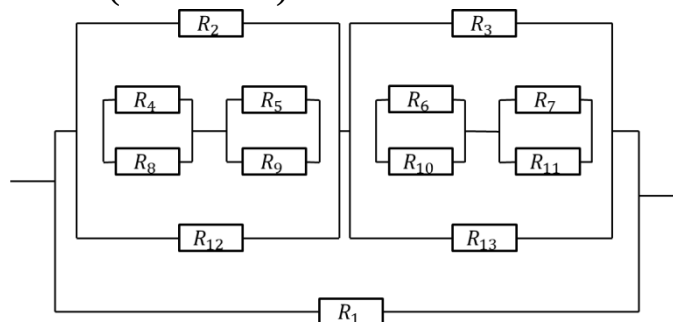
$$m = \rho_{\text{пл}} V = \frac{I^2 \rho l t}{c \Delta t^\circ S}$$
$$V = \frac{I^2 \rho l t}{c \Delta t^\circ S \rho_{\text{пл}}}$$

Подставив численные значения, можем вычислить объём воды:

$$V = \frac{I^2 \rho l t}{c \Delta t^\circ S \rho_{\text{пл}}} = \frac{(3,5)^2 \cdot 2,8 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 3600}{4200 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} = \frac{12,25 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 36}{42 \cdot 10}$$
$$V = \frac{12,25 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 36}{42 \cdot 10} = \frac{12,25 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 6}{7 \cdot 10} = \frac{7 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 6}{4 \cdot 10}$$
$$V = \frac{7 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 6}{4 \cdot 10} = \frac{7 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 6}{10} = 2,94 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$
$$V = 2,94 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ дм}^3 = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ л} = 2,94 \text{ мл}$$

Ответ: можно вскипятить 2,94 мл воды.

Задача 9. Студент купил набор для изучения электроники и электротехники. Помогите ему рассчитать, какое количество теплоты выделится в собранной им схеме за 5 минут. Сила тока, текущего по цепи, равна 2 А. $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = R_4 = R_5 = R_8 = R_9 = R_{12} = 1$ Ом, $R_3 = R_6 = R_7 = R_{10} = R_{11} = R_{13} = 2$ Ом. Схема приведена ниже. (10 баллов)



Решение:

Количество теплоты, выделившееся в схеме, можно найти по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t$$



Для расчёта по формуле нужно найти эквивалентное сопротивление цепи R . Для этого воспользуемся формулами для поиска общего сопротивления цепи с последовательно или параллельно соединёнными сопротивлениями:

$$\frac{1}{R_{48}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_8}$$

$$R_{48} = \frac{R_4 \cdot R_8}{R_4 + R_8}$$

$$\frac{1}{R_{59}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_9}$$

$$R_{59} = \frac{R_5 \cdot R_9}{R_5 + R_9}$$

$$\frac{1}{R_{610}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_{10}}$$

$$R_{610} = \frac{R_6 \cdot R_{10}}{R_6 + R_{10}}$$

$$\frac{1}{R_{711}} = \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_{11}}$$

$$R_{711} = \frac{R_7 \cdot R_{11}}{R_7 + R_{11}}$$

$$R_{4859} = R_{48} + R_{59} = \frac{R_4 \cdot R_8}{R_4 + R_8} + \frac{R_5 \cdot R_9}{R_5 + R_9}$$

$$R_{610711} = R_{610} + R_{711} = \frac{R_6 \cdot R_{10}}{R_6 + R_{10}} + \frac{R_7 \cdot R_{11}}{R_7 + R_{11}}$$

$$\frac{1}{R_{\text{л}}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{4859}} + \frac{1}{R_{12}}$$

$$R_{\text{л}} = \frac{R_2 R_{4859} R_{12}}{R_2 R_{12} + R_2 R_{4859} + R_{4859} R_{12}}$$

$$\frac{1}{R_{\text{пр}}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{610711}} + \frac{1}{R_{13}}$$

$$R_{\text{пр}} = \frac{R_3 R_{610711} R_{13}}{R_3 R_{13} + R_3 R_{610711} + R_{610711} R_{13}}$$

$$R_{\text{в}} = R_{\text{л}} + R_{\text{пр}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\text{в}}} + \frac{1}{R_1}$$

$$R = \frac{R_{\text{в}} \cdot R_1}{R_{\text{в}} + R_1} = \frac{(R_{\text{л}} + R_{\text{пр}}) \cdot R_1}{R_{\text{л}} + R_{\text{пр}} + R_1}$$

Подставив численные значения, получим:

$$R_{48} = \frac{R_4 \cdot R_8}{R_4 + R_8} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \text{ Ом}$$



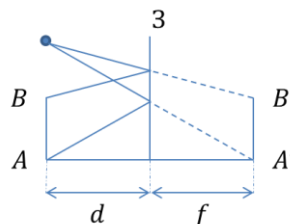
$$\begin{aligned}R_{59} &= \frac{R_5 \cdot R_9}{R_5 + R_9} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \text{ Ом} \\R_{610} &= \frac{R_6 \cdot R_{10}}{R_6 + R_{10}} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \text{ Ом} \\R_{711} &= \frac{R_7 \cdot R_{11}}{R_7 + R_{11}} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \text{ Ом} \\R_{4859} &= R_{48} + R_{59} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ Ом} \\R_{610711} &= R_{610} + R_{711} = 1 + 1 = 2 \text{ Ом} \\R_{\text{л}} &= \frac{R_2 R_{4859} R_{12}}{R_2 R_{12} + R_2 R_{4859} + R_{4859} R_{12}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{1}{3} \text{ Ом} \\R_{\text{пр}} &= \frac{R_3 R_{610711} R_{13}}{R_3 R_{13} + R_3 R_{610711} + R_{610711} R_{13}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2} = \frac{2}{3} \text{ Ом} \\R &= \frac{(R_{\text{л}} + R_{\text{пр}}) \cdot R_1}{R_{\text{л}} + R_{\text{пр}} + R_1} = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \cdot 3}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 3} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ Ом} \\Q &= I^2 R t = 2^2 \cdot 0,75 \cdot 5 \cdot 60 = 4 \cdot 0,75 \cdot 300 = 900 \text{ Дж} = 0,9 \text{ кДж}\end{aligned}$$

Ответ: выделится 900 Дж тепла.

Задача 10. Ученик смотрит в плоское зеркало и видит в нём изображение предмета, поставленного на расстояние 0,3 м от него. Он взял собирающую линзу с оптической силой 20 дптр и увеличением 0,5 раз. Где надо расположить эту линзу и какую взять ей в пару, чтобы заменить зеркало и получить такое же изображение на том же месте? В ответе привести расстояние от предмета до первой линзы и расстояние между линзами, а также оптическую силу второй линзы. (15 баллов)

Решение:

Для начала нарисует схематичный рисунок к условию задачи:



Плоское зеркало даёт нам мнимое, прямое изображение, равное по размерам предмету. Так как по условию у нас собирающая линза с увеличением в 0,5 раз (то есть меньшим, чем 1), то расстояние от линзы до предмета больше,



чем два фокусных, а изображение уменьшено. Значит, нам нужна линза, которая даст действительное, увеличенное изображение. Это собирающая линза, расстояние от предмета до которой больше фокусного, но меньше двух фокусных. При этом для увеличений линз должно действовать следующее соотношение:

$$\Gamma_1 \Gamma_2 = 1$$

Расстояние от предмета до зеркала равно расстоянию от зеркала до изображения. Также на расстоянии L между предметом и его изображением в зеркале умещаются:

- расстояние от предмета до первой линзы;
- расстояние от первой линзы до изображения первой линзы, которое является предметом второй линзы;
- расстояние от предмета второй линзы до второй линзы;
- расстояние от второй линзы до изображения второй линзы.

Тогда можем записать:

$$L = d + f = 2d = 2f = d_1 + f_1 + d_2 + f_2$$

Вспомним связь увеличения с расстояниями между предметом и линзой и линзой и изображением, а потом найдём все четыре расстояния, указанных в списке выше, с помощью формулы тонкой линзы:

$$\Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1} = \frac{1}{\Gamma_2} = \frac{d_2}{f_2}$$

$$f_1 = \Gamma_1 d_1$$

$$d_1 = \frac{f_1}{\Gamma_1}$$

$$D_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$$

$$D_1 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{\Gamma_1 d_1} = \frac{1}{d_1} \left(1 + \frac{1}{\Gamma_1} \right) = \frac{1}{d_1} \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1}$$

$$d_1 = \frac{1}{D_1} \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1}$$

$$D_1 = \frac{\Gamma_1}{f_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_1} (\Gamma_1 + 1)$$

$$f_1 = \frac{1}{D_1} (\Gamma_1 + 1)$$

$$L = d + f = 2d = 2f = d_1 + f_1 + d_2 + f_2$$

$$d_2 + f_2 = 2d - (d_1 + f_1)$$

$$d_2 + \Gamma_2 d_2 = 2d - (d_1 + f_1) = 2d - d_1 - f_1$$

$$d_2 = \frac{2d}{1 + \Gamma_2} - \frac{d_1}{1 + \Gamma_2} - \frac{f_1}{1 + \Gamma_2} = \frac{2d}{1 + \frac{1}{\Gamma_1}} - \frac{d_1}{1 + \frac{1}{\Gamma_1}} - \frac{f_1}{1 + \frac{1}{\Gamma_1}}$$



$$d_2 = \frac{2d\Gamma_1}{\Gamma_1 + 1} - \frac{d_1\Gamma_1}{\Gamma_1 + 1} - \frac{f_1\Gamma_1}{\Gamma_1 + 1} = \frac{2d\Gamma_1}{\Gamma_1 + 1} - \frac{1}{D_1} - \frac{\Gamma_1}{D_1}$$
$$f_2 = \Gamma_2 d_2 = \frac{d_2}{\Gamma_1} = \frac{2d}{\Gamma_1 + 1} - \frac{1}{\Gamma_1 D_1} - \frac{1}{D_1}$$

Теперь подставим численные значения:

$$d_1 = \frac{1}{D_1} \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} = \frac{1}{20} \frac{0,5 + 1}{0,5} = \frac{3}{20} = 0,15 \text{ м}$$

$$f_1 = \frac{1}{D_1} (\Gamma_1 + 1) = \frac{1}{20} (0,5 + 1) = \frac{1,5}{20} = 0,075 \text{ м}$$

$$d_2 = \frac{2d\Gamma_1}{\Gamma_1 + 1} - \frac{1}{D_1} - \frac{\Gamma_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 0,5}{0,5 + 1} - \frac{1}{20} - \frac{0,5}{20} = \frac{1}{5} - \frac{1}{20} - \frac{1}{40} = 0,125 \text{ м}$$

$$f_2 = \frac{2d}{\Gamma_1 + 1} - \frac{1}{\Gamma_1 D_1} - \frac{1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,3}{0,5 + 1} - \frac{1}{0,5 \cdot 20} - \frac{1}{20} = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = 0,25 \text{ м}$$

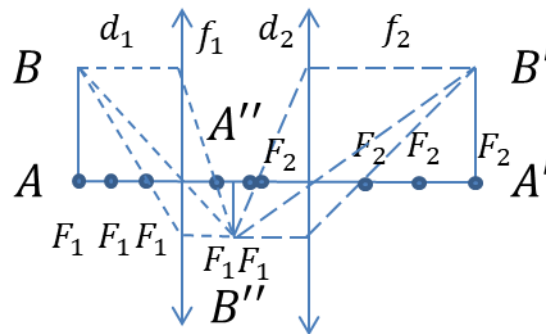
Таким образом, мы видим, что расстояние от предмета до заданной линзы равно 0,15 м. Расстояние между линзами определяется через расстояние от первой линзы до изображения первой линзы и расстояние от предмета второй линзы до линзы:

$$r = f_1 + d_2 = 0,075 + 0,125 = 0,2 \text{ м}$$

Теперь найдём оптическую силу второй линзы:

$$D_2 = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0,125} + \frac{1}{0,25} = 8 + 4 = 12 \text{ дптр}$$

Теперь нарисует оптическую схему для нашей задачи:



Ответ: расстояние от предмета до первой линзы равно 0,15 м, расстояние между линзами равно 0,2 м, оптическая сила второй линзы равна 12 дптр.

**Вариант 2-2**

Задача 1 (5 баллов). Найти значение выражения $\frac{x}{y}$, если $\frac{30x^2 + 9xy - 12y^2}{4x^2 - y^2} = 7$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\frac{30x^2 + 9xy - 12y^2}{4x^2 - y^2} - 7 = 0,$$

$$\frac{2x^2 + 9xy - 5y^2}{4x^2 - y^2} = 0.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на y^2 (заметим, что при $y = 0$ равенство неверно), обозначим $\frac{x}{y} = t$, тогда уравнение примет вид: $\frac{2t^2 + 9t - 5}{4t^2 - 1} = 0$. Корнями являются числа $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -5$. Корень $t_1 = \frac{1}{2}$ не подходит, так как при этом значении t знаменатель обращается в ноль.

Ответ: -5 .

Задача 2 (7 баллов). Винни Пух наугад выбирает три разные цифры, отличные от нуля, и составляет всевозможные трехзначные числа. Пятачок находит их сумму и утверждает, что она каждый раз делится на 37. Прав ли он?

Решение. Из цифр a, b, c , отличных от нуля, можно составить 6 различных трехзначных чисел, их сумма $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cba} + \overline{cab} = 222(a + b + c)$. Правая часть этого равенства делится на 37: $222 = 6 \cdot 37$, значит левая часть также кратна 37.

Ответ: да.

Задача 3 (10 баллов). В лабораторию для проведения высокотехнологичного исследования доставили ящики с образцами минералов с различных месторождений. Ящик с содержащимися в нем образцами считается приоритетным для проведения анализа, если в нем находится более пятидесяти образцов. Лаборант Золотов подсчитал процент приоритетных ящиков, а лаборант Хрусталёв подсчитал процент образцов, находящихся в приоритетных ящиках. У кого процент больше?

Решение. Пусть всего оказалось k приоритетных и l обычных ящиков. Обозначим количество образцов, находящихся в приоритетных ящиках, через A , а количество остальных – через B .

Тогда $A > 50k, B \leq 50l$ и, значит, $\frac{A}{k} > 50, \frac{B}{l} \leq 50$, поэтому $\frac{A}{k} > \frac{B}{l}$. Из последнего неравенства вытекает следующие:

$$\frac{B}{A} < \frac{l}{k}, \frac{A+B}{A} < \frac{l+k}{k}, \text{ откуда } \frac{A}{A+B} \cdot 100\% > \frac{k}{l+k} \cdot 100\%.$$



В последнем неравенстве слева стоит процент образцов, находящихся в приоритетных ящиках, а справа – процент приоритетных ящиков.

Ответ: у лаборанта Хрусталёва.

Задача 4 (13 баллов). Для проведения буровых работ на участке $ABCD$, имеющем форму выпуклого четырехугольника площадью 120 кв. ед., рабочими была выделена зона для транспорта, ограниченная прямыми MN и PQ , где M, N лежат на стороне AB , а P, Q – на CD , причем $AM = NB = \frac{1}{3}AB$, $CP = DQ = \frac{1}{3}CD$. Найти площадь участка $MNPQ$.

Решение. Докажем, что площадь четырехугольника $MNPQ$ равна трети площади $ABCD$. Сделаем дополнительное построение: проведем во всех четырехугольниках диагонали, как показано на рис.1.

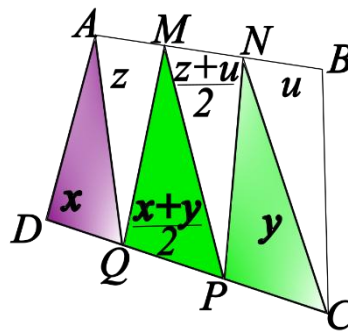


Рис. 1

Пусть площади крайних из заштрихованных на рисунке треугольников равны x и y соответственно. Тогда площадь среднего равна $(x+y)/2$. Действительно, их основания одинаковы, а высота среднего равна полусумме высот крайних (это следует из того, что высота среднего является средней линией трапеции, основаниями которой служат высоты двух крайних треугольников – см. рис. 2).

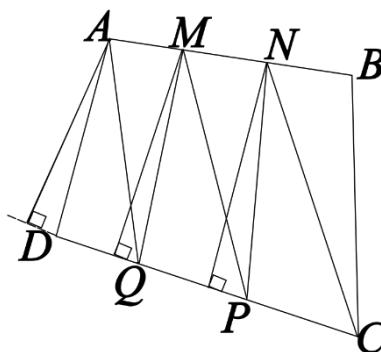


Рис. 2

Такое же рассуждение можно провести и для трех незаштрихованных на рис. 1 треугольников. Итак, площадь всего четырехугольника равна $3(x+y+z+u)/2$, а площадь заключенной между прямыми части четырехугольника равна $(x+y+z+u)/2$, т.е. в 3 раза меньше.

Ответ: 40 кв. ед.

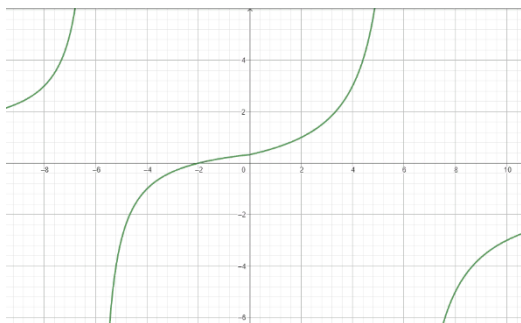


Задача 5 (15 баллов). Используя только знак модуля, изменить функцию $y = \frac{-x-2}{x-6}$ так, чтобы она обладала следующим свойством:

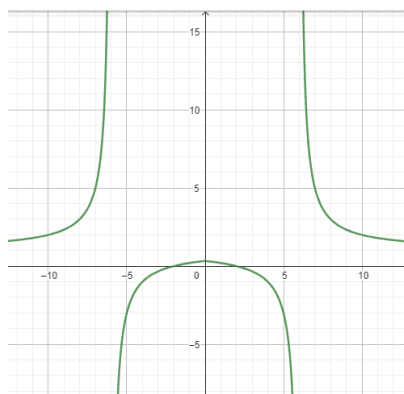
- а) область определения функции – вся числовая ось, за исключением двух точек; (4 балла)
- б) график функции имеет вертикальную ось симметрии; (5 баллов)
- в) $y(x) \leq 0$ при $x \in (-6; 6)$. (6 баллов)

Построить графики полученных функций.

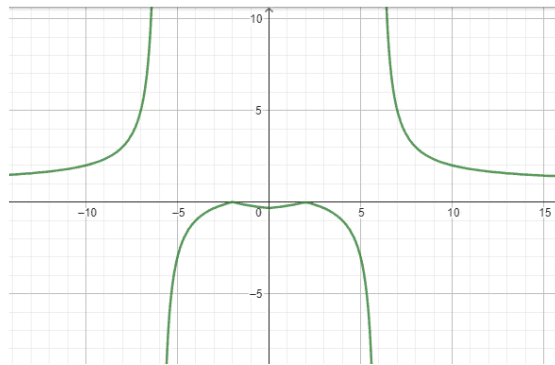
Решение: а) Область определения исходной функции – $(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$. Чтобы функция не была определена в точке $x = -6$ функцию можно изменить так: $y = \frac{-x-2}{|x|-6}$.



б) $y = \frac{|-x|-2}{|x|-6}$ – график четной функции симметричен относительно оси ординат.



в) $y = \frac{||-x|-2|}{|x|-6}$



Задача 6. Подводная лодка опустилась на некоторую глубину. Проплывающая мимо касатка заметила, что давление воды на неё увеличилось в 52,5 раза по сравнению с поверхностью. На какую глубину опустилась подводная лодка? Помогите касатке посчитать, сколько секунд она бы падала в море, если бы поднялась над ним на такую высоту? Плотность морской воды 1030 кг/м^3 ? Атмосферное давление принять равным 10^5 Па . Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 . (5 баллов)

Решение:

Давление воды на некоторой глубине определяется по следующей формуле:

$$p = p_{\text{атм}} + \rho gh$$

Здесь ρ – плотность морской воды. Тогда из отношения давления на глубине к давлению на поверхности можно найти глубину погружения:

$$k = \frac{p}{p_{\text{атм}}} = \frac{p_{\text{атм}} + \rho gh}{p_{\text{атм}}} = 1 + \frac{\rho gh}{p_{\text{атм}}}$$
$$(k - 1)p_{\text{атм}} = \rho gh$$
$$h = \frac{(k - 1)p_{\text{атм}}}{\rho g} = \frac{(52,5 - 1) \cdot 10^5}{1030 \cdot 10} = \frac{51,5 \cdot 10^5}{103 \cdot 10^2} = \frac{1}{2} \cdot 10^3 = 500 \text{ м} = 0,5 \text{ км}$$

Теперь будем искать время. Для этого вспомним о движении с ускорением свободного падения:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

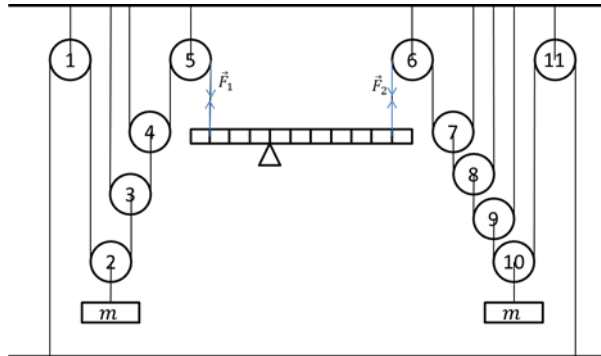
Здесь h – высота тела над поверхностью моря, t – время падения тела. Тогда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{10}} = \sqrt{100} = 10 \text{ с}$$

Ответ: глубина погружения 500 м, время падения 10 с.



Задача 7. Ворон залетел в сарай и обнаружил рядом со странной конструкцией из трубочек разной формы и бутылок уравновешенную систему подвесов, приведённую на схему ниже. Он быстро сообразил, как нужно уравновесить рычаг, чтобы блоки с 7 по 11 можно было заменить грузом меньшим, чем там висит сейчас. Чему равна масса груза, которым ворон заменил блоки с 7 по 11, если в новом положении равновесия плечи рычага относятся друг к другу в соотношении 5:6? Масса груза, который там висел раньше, равна 120 г. (7 баллов)



Решение:

Для начала запишем правило равновесия рычага:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Здесь l_1 и l_2 – плечи уравновешенного воронком рычага.

В левой части системы два неподвижных блока и три подвижных. Неподвижный блок не даёт выигрыша в силе, но позволяет изменить направление действия силы. Подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза. На груз действует сила тяжести. Подвижный блок уменьшает эту силу в 2 раза, в результате на рычаг действует сила, которая в 8 раз меньше силы тяжести, действующей на груз слева.

Правая часть системы заменена на массу m' , поэтому справа на рычаг действует сила, равная силе тяжести, действующей на эту массу.

Плечи рычага относятся друг к другу как 5:6. Поэтому можем записать:

$$l_1 = 5l$$

$$l_2 = 6l$$

Таким образом, можем записать:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

$$\frac{mg}{8} \cdot 5l = m'g \cdot 6l$$

$$m' = \frac{5m}{8 \cdot 6} = \frac{5m}{48}$$

Подставим численное значение массы:



$$m' = \frac{5m}{48} = \frac{5 \cdot 120}{48} = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12,5 \text{ г} = 0,0125 \text{ кг}$$

Ответ: масса нового груза 12,5 г (0,0125 кг).

Задача 8. Какой длины алюминиевый провод площадью поперечного сечения 1 мм^2 надо взять, чтобы теплоты, которая тратится на его нагревание при протекании по нему электрического тока величиной $3,5 \text{ А}$ в течение 1 часа, хватило на нагревание $0,35 \text{ л}$ воды? Плотность воды 1000 кг/м^3 , удельное сопротивление алюминия $2,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, удельная теплоёмкость воды $4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$. Ответ записать в км и округлить до целых. (13 баллов)

Решение:

Количество теплоты, которое требуется для нагрева воды, можно посчитать по следующей формуле:

$$Q = cm\Delta t^\circ$$

Здесь c – удельная теплоёмкость воды; m – масса воды; Δt° – температура, на которую нагрелась вода.

Количество теплоты, выделившееся в проводе, можно найти по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t$$

Здесь I – сила тока, текущего в проводе; t – время, в течение которого ток тѣк по проводу. Сопротивление R можно выразить через параметры провода:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Здесь l – длина провода; S – площадь поперечного сечения; ρ – удельное сопротивление материала, из которого сделан провод.

Из этих соотношений можно выразить массу:

$$cm\Delta t^\circ = I^2 \rho \frac{l}{S} t$$
$$l = \frac{cm\Delta t^\circ S}{I^2 \rho t}$$

Объѣм воды связан с массой воды через плотность $\rho_{\text{пл}}$:

$$m = \rho_{\text{пл}} V$$
$$l = \frac{c \rho_{\text{пл}} V \Delta t^\circ S}{I^2 \rho t}$$

Подставив численные значения, можем вычислить длину провода:

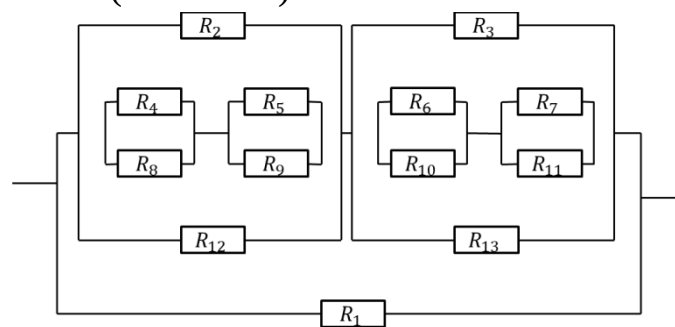
$$l = \frac{c \rho_{\text{пл}} V \Delta t^\circ S}{I^2 \rho t} = \frac{4200 \cdot 1000 \cdot 0,35 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(3,5)^2 \cdot 2,8 \cdot 10^{-8} \cdot 3600} = \frac{42 \cdot 0,35 \cdot 10}{12,25 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 36}$$



$$l = \frac{42 \cdot 0,35 \cdot 10}{12,25 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 36} = \frac{7 \cdot 0,35 \cdot 10}{12,25 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 6} = \frac{4 \cdot 0,35 \cdot 10}{7 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 6}$$
$$l = \frac{4 \cdot 0,35 \cdot 10}{7 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 6} = \frac{0,35 \cdot 10}{7 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot 6} \approx 119048 \text{ м} \approx 119 \text{ км}$$

Ответ: понадобится примерно 119 км провода.

Задача 9. Студент купил набор для изучения электроники и электротехники. Помогите ему рассчитать, какое количество теплоты выделится в собранной им схеме за 6 минут 40 с. Сила тока, текущего по цепи, равна 3 А. $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = R_4 = R_9 = R_3 = R_6 = R_{11} = 1 \text{ Ом}$, $R_5 = R_8 = R_{12} = R_7 = R_{10} = R_{13} = 3 \text{ Ом}$. Схема приведена ниже. (10 баллов)



Решение:

Количество теплоты, выделившееся в схеме, можно найти по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t$$

Для расчёта по формуле нужно найти эквивалентное сопротивление цепи R . Для этого воспользуемся формулами для поиска общего сопротивления цепи с последовательно или параллельно соединёнными сопротивлениями:

$$\frac{1}{R_{48}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_8}$$
$$R_{48} = \frac{R_4 \cdot R_8}{R_4 + R_8}$$
$$\frac{1}{R_{59}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_9}$$
$$R_{59} = \frac{R_5 \cdot R_9}{R_5 + R_9}$$
$$\frac{1}{R_{610}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_{10}}$$
$$R_{610} = \frac{R_6 \cdot R_{10}}{R_6 + R_{10}}$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{711}} &= \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_{11}} \\ R_{711} &= \frac{R_7 \cdot R_{11}}{R_7 + R_{11}} \\ R_{4859} &= R_{48} + R_{59} = \frac{R_4 \cdot R_8}{R_4 + R_8} + \frac{R_5 \cdot R_9}{R_5 + R_9} \\ R_{610711} &= R_{610} + R_{711} = \frac{R_6 \cdot R_{10}}{R_6 + R_{10}} + \frac{R_7 \cdot R_{11}}{R_7 + R_{11}} \\ \frac{1}{R_{\text{л}}} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{4859}} + \frac{1}{R_{12}} \\ R_{\text{л}} &= \frac{R_2 R_{4859} R_{12}}{R_2 R_{12} + R_2 R_{4859} + R_{4859} R_{12}} \\ \frac{1}{R_{\text{пр}}} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{610711}} + \frac{1}{R_{13}} \\ R_{\text{пр}} &= \frac{R_3 R_{610711} R_{13}}{R_3 R_{13} + R_3 R_{610711} + R_{610711} R_{13}} \\ R_{\text{в}} &= R_{\text{л}} + R_{\text{пр}} \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_{\text{в}}} + \frac{1}{R_1} \\ R &= \frac{R_{\text{в}} \cdot R_1}{R_{\text{в}} + R_1} = \frac{(R_{\text{л}} + R_{\text{пр}}) \cdot R_1}{R_{\text{л}} + R_{\text{пр}} + R_1}\end{aligned}$$

Подставив численные значения, получим:

$$\begin{aligned}R_{48} &= \frac{R_4 \cdot R_8}{R_4 + R_8} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{3}{4} \text{ Ом} \\ R_{59} &= \frac{R_5 \cdot R_9}{R_5 + R_9} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{3}{4} \text{ Ом} \\ R_{610} &= \frac{R_6 \cdot R_{10}}{R_6 + R_{10}} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{3}{4} \text{ Ом} \\ R_{711} &= \frac{R_7 \cdot R_{11}}{R_7 + R_{11}} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{3}{4} \text{ Ом} \\ R_{4859} &= R_{48} + R_{59} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} \text{ Ом} \\ R_{610711} &= R_{610} + R_{711} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} \text{ Ом} \\ R_{\text{л}} &= \frac{R_2 R_{4859} R_{12}}{R_2 R_{12} + R_2 R_{4859} + R_{4859} R_{12}} = \frac{1 \cdot \frac{6}{4} \cdot 3}{1 \cdot 3 + 1 \cdot \frac{6}{4} + \frac{6}{4} \cdot 3} = \frac{1}{2} \text{ Ом}\end{aligned}$$



$$R_{\text{пр}} = \frac{R_3 R_{610711} R_{13}}{R_3 R_{13} + R_3 R_{610711} + R_{610711} R_{13}} = \frac{1 \cdot \frac{6}{4} \cdot 3}{1 \cdot 3 + 1 \cdot \frac{6}{4} + \frac{6}{4} \cdot 3} = \frac{1}{2} \text{ Ом}$$

$$R = \frac{(R_{\text{л}} + R_{\text{пр}}) \cdot R_1}{R_{\text{л}} + R_{\text{пр}} + R_1} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot 2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ Ом}$$

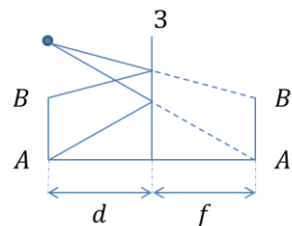
$$Q = I^2 R t = 3^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \frac{2}{3} \cdot 60 \cdot 60 = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 400 = 2400 \text{ Дж} = 2,4 \text{ кДж}$$

Ответ: выделится 2400 Дж тепла.

Задача 10. Ученик смотрит в плоское зеркало и видит в нём изображение предмета, поставленного на расстояние 0,3 м от него. Он взял две линзы и поставил между предметом и изображением. Вторая линза была собирающей с оптической силой 12 дптр и увеличением 2 раза. Где надо расположить эту линзу и какую взять ей в пару, чтобы заменить зеркало и получить такое же изображение на том же месте? В ответе привести расстояние от предмета до второй линзы и расстояние между линзами, а также оптическую силу первой линзы. (15 баллов)

Решение:

Для начала нарисует схематичный рисунок к условию задачи:



Плоское зеркало даёт нам мнимое, прямое изображение, равное по размерам предмету. Так как по условию вторая линза у нас собирающая с увеличением в 2 раза (то есть больше, чем 1), то расстояние от линзы до предмета больше фокусного, но меньше двух фокусных, а изображение увеличено. Значит, нам нужна линза, которая даст действительное, уменьшенное изображение. Это собирающая линза, расстояние от предмета до которой больше двух фокусных. При этом для увеличений линз должно действовать следующее соотношение:

$$\Gamma_1 \Gamma_2 = 1$$



Расстояние от предмета до зеркала равно расстоянию от зеркала до изображения. Также на расстоянии L между предметом и его изображением в зеркале уместятся:

- расстояние от предмета до первой линзы;
- расстояние от первой линзы до изображения первой линзы, которое является предметом второй линзы;
- расстояние от предмета второй линзы до второй линзы;
- расстояние от второй линзы до изображения второй линзы.

Тогда можем записать:

$$L = d + f = 2d = 2f = d_1 + f_1 + d_2 + f_2$$

Вспомним связь увеличения с расстояниями между предметом и линзой и линзой и изображением, а потом найдём все четыре расстояния, указанных в списке выше, с помощью формулы тонкой линзы:

$$\Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1} = \frac{1}{\Gamma_2} = \frac{d_2}{f_2}$$

$$f_2 = \Gamma_2 d_2$$

$$d_2 = \frac{f_2}{\Gamma_2}$$

$$D_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}$$

$$D_2 = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{\Gamma_2 d_2} = \frac{1}{d_2} \left(1 + \frac{1}{\Gamma_2} \right) = \frac{1}{d_2} \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2}$$

$$d_2 = \frac{1}{D_2} \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2}$$

$$D_2 = \frac{\Gamma_2}{f_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_2} (\Gamma_2 + 1)$$

$$f_2 = \frac{1}{D_2} (\Gamma_2 + 1)$$

$$L = d + f = 2d = 2f = d_1 + f_1 + d_2 + f_2$$

$$d_1 + f_1 = 2d - (d_2 + f_2)$$

$$d_1 + \Gamma_1 d_1 = 2d - (d_2 + f_2) = 2d - d_2 - f_2$$

$$d_1 = \frac{2d}{1 + \Gamma_1} - \frac{d_2}{1 + \Gamma_1} - \frac{f_2}{1 + \Gamma_1} = \frac{2d}{1 + \frac{1}{\Gamma_2}} - \frac{d_2}{1 + \frac{1}{\Gamma_2}} - \frac{f_2}{1 + \frac{1}{\Gamma_2}}$$

$$d_1 = \frac{2d\Gamma_2}{\Gamma_2 + 1} - \frac{d_2\Gamma_2}{\Gamma_2 + 1} - \frac{f_2\Gamma_2}{\Gamma_2 + 1} = \frac{2d\Gamma_2}{\Gamma_2 + 1} - \frac{1}{D_2} - \frac{\Gamma_2}{D_2}$$

$$f_1 = \Gamma_1 d_1 = \frac{d_1}{\Gamma_2} = \frac{2d}{\Gamma_2 + 1} - \frac{1}{\Gamma_2 D_2} - \frac{1}{D_2}$$

Теперь подставим численные значения:



$$d_2 = \frac{1}{D_2} \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2} = \frac{1}{12} \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{24} = 0,125 \text{ м}$$

$$f_2 = \frac{1}{D_2} (\Gamma_2 + 1) = \frac{1}{12} (2 + 1) = \frac{3}{12} = 0,25 \text{ м}$$

$$d_1 = \frac{2d\Gamma_2}{\Gamma_2 + 1} - \frac{1}{D_2} - \frac{\Gamma_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 2}{2 + 1} - \frac{1}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1,2}{3} - \frac{1}{12} - \frac{2}{12} = 0,15 \text{ м}$$

$$f_1 = \frac{2d}{\Gamma_2 + 1} - \frac{1}{\Gamma_2 D_2} - \frac{1}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,3}{2 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 12} - \frac{1}{12} = \frac{0,6}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{12} = 0,075 \text{ м}$$

Таким образом, мы видим, что расстояние от предмета до заданной линзы равно

$$s = d_1 + f_1 + d_2 = 0,15 + 0,075 + 0,125 = 0,35 \text{ м}$$

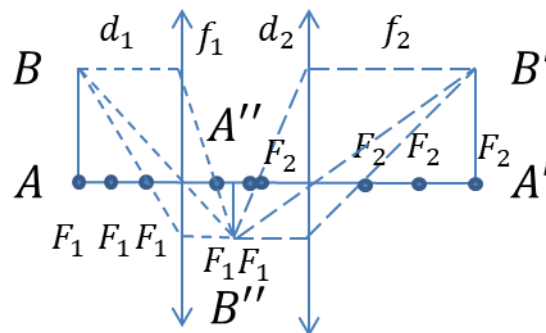
Расстояние между линзами определяется через расстояние от первой линзы до изображения первой линзы и расстояние от предмета второй линзы до линзы:

$$r = f_1 + d_2 = 0,075 + 0,125 = 0,2 \text{ м}$$

Теперь найдём оптическую силу первой линзы:

$$D_1 = \frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{0,15} + \frac{1}{0,075} = 6, (6) + 13, (3) = 20 \text{ дптр}$$

Теперь нарисуем оптическую схему для нашей задачи:



Ответ: расстояние от предмета до второй линзы равно 0,35 м, расстояние между линзами равно 0,2 м, оптическая сила первой линзы равна 20 дптр.