

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**



**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ГРАНИТ НАУКИ»**

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ (ФИЗИКА)

**Методические указания для подготовки к
заключительному туру олимпиады в 2023/2024
учебном году
для 8-9 класса**

Санкт-Петербург
2024

Оглавление

ФИЗИКА.....	4
Структура билета и методические указания к выполнению заданий олимпиады.....	4
Примерный план решения задач.....	5
Примеры решения задач	5
Задачи для самостоятельного решения.....	11

ФИЗИКА

Заключительный тур олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю Естественные науки (предмет олимпиады – физика) проводится в письменной форме.

Задания, включенные в билеты олимпиады, предполагают подготовленность участников по вопросам из следующих разделов курса физики.

1. Механика (*кинематика, динамика, статика, законы сохранения в механике, механические колебания и волны*).

Кинематика. Механическое движение и его виды. Относительность механического движения. Система отсчета. Материальная точка и ее радиус-вектор. Траектория, перемещение, путь. Сложение перемещений. Скорость материальной точки. Сложение скоростей. Ускорение материальной точки. Равномерное прямолинейное движение. Равноускоренное прямолинейное движение. Свободное падение. Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом α к горизонту. Движение точки по окружности. Линейная и угловая скорость точки соответственно. Центробежное ускорение. Твердое тело. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

Динамика. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея. Масса тела. Плотность вещества. Сила. Принцип суперпозиции сил. Второй и третий законы Ньютона. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты над поверхностью планеты. Вес тела. Невесомость. Движение небесных тел и их искусственных спутников. Первая космическая скорость. Вторая космическая скорость. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения. Сила трения покоя. Коэффициент трения. Давление.

Статика. Момент силы относительно оси вращения. Условия равновесия твердого тела. Закон Паскаля. Давление в жидкости, покоящейся в ИСО. Закон Архимеда. Условия плавания тел.

Законы сохранения в механике. Импульс материальной точки. Импульс системы тел. Закон изменения и сохранения импульса. Работа силы. Мощность силы. Кинетическая энергия материальной точки. Закон изменения кинетической энергии системы материальных точек. Потенциальная энергия для потенциальных сил. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Потенциальная энергия упруго деформированного тела. Закон изменения и сохранения механической энергии. Закон сохранения механической энергии.

Механические колебания и волны. Гармонические колебания. Амплитуда и фаза колебаний. Кинематическое, динамическое и энергетическое (закон сохранения механической энергии) описание. Связь амплитуды колебаний исходной величины с амплитудами колебаний её скорости и ускорения. Период и частота колебаний. Период малых свободных колебаний математического и пружинного маятника. Вынужденные колебания. Резонанс. Поперечные и продольные волны. Скорость распространения и длина волны. Интерференция и дифракция волн.

2. Молекулярная физика. Термодинамика (*молекулярно-кинетическая теория, законы идеального газа и термодинамики*).

Молекулярная физика. Модели строения газов, жидкостей и твердых тел. Тепловое движение атомов и молекул вещества. Взаимодействие частиц вещества. Диффузия. Броуновское движение. Модель идеального газа в МКТ: частицы газа движутся хаотически и не взаимодействуют друг с другом. Абсолютная температура. Связь температуры газа со средней кинетической энергией поступательного теплового движения его частиц. Модель идеального газа в термодинамике. Изменение агрегатных состояний вещества: испарение и конденсация, плавление и кристаллизация, кипение жидкости. Преобразование энергии в фазовых переходах.

Термодинамика. Тепловое равновесие и температура. Внутренняя энергия. Теплопередача. Количество теплоты. Удельная теплоемкость вещества. Удельная теплота парообразования. Удельная теплота плавления. Удельная теплота сгорания топлива. Первый закон термодинамики. Второй закон термодинамики. Принципы действия и КПД тепловой машины. Цикл Карно. Уравнение теплового баланса.

3. Электродинамика (*электрическое поле, постоянный ток, магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны*)

Электрическое поле. Электризация тел. Электрический заряд. Два вида заряда. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие зарядов. Точечные заряды. Закон Кулона. Электрическое поле. Его действие на электрические заряды. Напряженность электрического поля. Поле точечного заряда. Однородное поле. Картины линий поля. Потенциальность электростатического поля. Разность потенциалов и напряжение. Связь напряженности поля и разности потенциалов для однородного

электростатического поля. Принцип суперпозиции электрических полей. Проводники в электростатическом поле. Диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Конденсатор. Емкость конденсатора. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Законы постоянного тока. Постоянный электрический ток. Сила тока. Напряжение и электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для участка цепи. Электрическое сопротивление. Удельное сопротивление вещества. Источники тока. ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока. Закон Ома для полной (замкнутой) электрической цепи. Параллельное и последовательное соединение проводников. Работа электрического тока. Закон Джоуля – Ленца. Мощность электрического тока. Тепловая мощность, выделяемая на резисторе. Мощность источника тока. Носители свободных электрических зарядов в металлах, жидкостях и газах.

Магнитное поле. Механическое взаимодействие магнитов. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Принцип суперпозиции магнитных полей. Линии магнитного поля. Магнитное поле проводника с током. Сила Ампера. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле.

Электромагнитная индукция. Поток вектора магнитной индукции. Явление электромагнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца. Индуктивность. Самоиндукция. ЭДС самоиндукции. Энергия магнитного поля катушки с током.

Электромагнитные колебания и волны. Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания. Формула Томсона. Закон сохранения энергии в колебательном контуре. Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс. Гармонические электромагнитные колебания. Переменный ток. Производство, передача и потребление электрической энергии. Электромагнитное поле. Свойства электромагнитных волн. Взаимная ориентация векторов в электромагнитной волне в вакууме. Шкала электромагнитных волн.

4. Геометрическая, волновая и квантовая оптика. Прямолинейное распространение света в однородной среде. Луч света. Закон отражения света. Построение изображений в плоском зеркале. Закон преломления света. Абсолютный показатель преломления. Относительный показатель преломления. Ход лучей в призме. Соотношение частот и длин волн при переходе монохроматического света через границу раздела двух оптических сред. Полное внутреннее отражение. Собирающие и рассеивающие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила тонкой линзы. Формула тонкой линзы. Увеличение, даваемое линзой. Построение изображений в линзах. Фотоаппарат как оптический прибор. Глаз как оптическая система. Интерференция света. Когерентные источники. Условия наблюдения максимумов и минимумов в интерференционной картине от двух синфазных когерентных источников. Дифракция света. Дифракционная решетка. Условия наблюдения главных максимумов при нормальном падении монохроматического света. Дисперсия света. Гипотеза М. Планка о квантах. Формула Планка. Фотоны. Энергия, импульс и масса фотона. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

5. Физика атома и атомного ядра. Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Излучение и поглощение фотонов при переходе атома с одного уровня энергии на другой. Линейчатые спектры. Нуклонная модель ядра. Заряд ядра. Массовое число ядра. Изотопы. Энергия связи нуклонов в ядре. Ядерные силы. Дефект массы ядра. Радиоактивность. Альфа-распад. Бета-распад. Электронный β -распад. Позитронный β -распад. Гамма-излучение. Закон радиоактивного распада.

СТРУКТУРА БИЛЕТА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДЫ

В билет участника олимпиады включено пять заданий по физике. Задачи в билете расположены в порядке возрастания уровня их сложности. Максимальное значение баллов за решение задачи выставляется при условии, что приведено полное решение задачи, включающее следующие элементы:

а) кратко записано условие задачи, записаны положения теории и физические законы, закономерности, применение которых необходимо для решения задачи выбранным способом, в случае необходимости приведены грамотные рисунки и пояснения к ним;

б) описаны все вводимые в решении буквенные обозначения физических величин (за исключением обозначений используемых в условии задачи и основных констант) с пояснениями; описания физических величин, встречающихся в задачах, может производиться с помощью математических соотношений, текстуально или с помощью рисунков;

в) проведены все необходимые математические преобразования (допускаются пояснения на их проведение) и расчеты, приводящие к правильному числовому ответу;

г) представлен правильный ответ в общем виде и в численном значении с указанием единиц измерения искомой величины. Если задача решена не полностью, то этапы ее решения оцениваются в соответствии с критериями оценок по данной задаче. (Следует отметить, что если правильно записано краткое условие, но решение отсутствует, то за задачу выставляется 0 баллов, также наличие правильного ответа при полном отсутствии текста решения тоже 0 баллов). Итоговый результат каждого участника подсчитывается как сумма баллов за выполнение каждой задачи.

Олимпиадные задачи не требуют знания такого материала, который не предусмотрен в школьной программе по физике и математике, однако предполагают умения строить физические модели, анализировать условия, глубоко понимать сущность законов физики, самостоятельно применять их в различных ситуациях, а также безупречно владеть математическим аппаратом.

У нас нет возможности в ходе олимпиады провести реальный эксперимент. Но физика — наука экспериментальная, и мы предлагаем вам мысленный физический эксперимент. Вот пример такого задания. Предложите способ определения плотности материалов двух жетонов с маленькими отверстиями в них. У Вас в наличии два жетона, изготовленные из различных материалов, тонкая нить длиной 1 м, стакан с водой, миллиметровая бумага, штатив с горизонтальной деревянной рейкой длиной 0,7 м, ножницы, кнопки. Поверхность стола, на котором находится оборудование, горизонтальна. Плотность воды 1000 кг/м^3 .

Принимая участие в олимпиадах по физике - интеллектуальном соревновании, не стоит расстраиваться, если не получится стать победителем или призером олимпиады. В любом случае подготовка к олимпиаде позволяет глубже освоить школьную программу, изучить дополнительные вопросы курса физики, научиться решать различные типы задач (в том числе, весьма трудных). Все это принесет ощутимую пользу в плане получения хорошего образования и положительно скажется при сдаче ЕГЭ.

ПРИМЕРНЫЙ ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Работа над условием:
 - краткая запись условия и выяснение смысла терминов (рисунки, чертежи);
 - анализ физических явлений, процессов, описанных в задаче;
 - приведение всех данных к СИ (если это необходимо).
 - запись упрощающих предположений.
2. Поиск необходимых уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление, процесс.
3. Решение задачи в общем виде.
4. Анализ полученного результата (действие с наименованиями, проверка на частных случаях, решение другим способом).
5. Получение числового ответа.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1

Уравнения движения двух материальных точек имеют вид: $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ - для первой точки и $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$ - для второй. Определите, в какой момент времени скорости точек сравняются, если $A_1 = 5 \text{ м}$, $B_1 = 2 \text{ м/с}$, $C_1 = 3 \text{ м/с}^2$, $A_2 = 1 \text{ м}$, $B_2 = -0,5 \text{ м/с}$, $C_2 = 0,5 \text{ м/с}^2$. Найти ускорения точек через 5 секунд после начала движения.

Дано:

$$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$$

$$x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$$

$$A_1 = 5\text{ м}, B_1 = 2\text{ м/с},$$

$$C_1 = 3\text{ м/с}^2,$$

$$A_2 = 1\text{ м}, B_2 = -0,5\text{ м/с},$$

$$C_2 = 0,5\text{ м/с}^2$$

Найти: $t = ?$ (при $v_1 = v_2$)

$$a_1 = ? a_2 = ?$$

Решение:

Для определения скорости и ускорения в определенный момент времени необходимо определить мгновенные их значения.

Оба уравнения движения зависят от времени квадратично.

Такая зависимость соответствует равноускоренному или равнозамедленному движению. Запишем уравнение движения в общем виде:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Сравним уравнение в общем виде с двумя уравнениями, которые даны в условии задачи. Тогда очевидно, что:

$$v_{01} = B_1$$

$$v_{02} = B_2$$

$$a_1 = 2C_1, \quad (1)$$

$$a_2 = 2C_2, \quad (2)$$

Связь между начальной скоростью и мгновенной скоростью в некий момент времени задаётся для равноускоренного движения следующим уравнением:

$$v = v_0 + at$$

Тогда мгновенные скорости в некий момент времени равны:

$$v_1 = B_1 + 2C_1 t, \quad (3)$$

$$v_2 = B_2 + 2C_2 t, \quad (4)$$

Для того чтобы найти нужный момент времени t (при $v_1 = v_2$) приравняем правые части уравнений (3) и (4).

$$B_1 + 2C_1 t = B_2 + 2C_2 t$$

Откуда получим

$$t = \frac{B_1 - B_2}{2(C_1 - C_2)} = \frac{2 - (-0,5)}{2(3 - 0,5)} = 0,5\text{ с} \quad (5)$$

По уравнениям (1) и (2) видно, что ускорения не зависят от времени. Подставим значения в эти уравнения

$$a_1 = 2C_1 = 2 \cdot 3 = 6\text{ м/с}^2$$

$$a_2 = 2C_2 = 2 \cdot 0,5 = 1\text{ м/с}^2$$

Ответ: $t = 0,5\text{ с}$, $a_1 = 6\text{ м/с}^2$, $a_2 = 1\text{ м/с}^2$

Пример 2

Сделав 20 оборотов после начала вращения колесо достигло угловой скорости $\omega = 600 \text{ рад/мин}$, вращаясь равноускорено. Чему равно угловое ускорение ε колеса?

Дано:

$$N = 20 \text{ оборотов}$$

$$\omega = 600 \text{ рад/мин} = 10 \text{ рад/с}$$

Найти:

$$\varepsilon = ?$$

Решение:

Запишем уравнения для угла поворота и угловой скорости для равноускоренного вращательного движения:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (1)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2)$$

В начальный момент времени тело начинает вращаться, откуда имеем, что $\omega_0 = 0 \text{ рад/с}$.

С учетом этого получаем, что уравнения (1) и (2) принимают вид:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (3)$$

$$\omega = \varepsilon t, \quad (4)$$

Значение угла поворота можем выразить через количество оборотов:

$$\varphi = 2\pi N \quad (5)$$

Из уравнения (3) выразим ε , с учетом (5)

$$\varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2} \quad (6)$$

Из (4) уравнения выразим $t = \frac{\omega}{\varepsilon}$, подставим время в (6) и,

выразив оттуда ε , получим

$$\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi N} = \frac{10^2}{4\pi \cdot 20} = 0,4 \text{ рад/с}^2$$

Ответ: $\varepsilon = 0,4 \text{ рад/с}^2$

Пример 3

Мотоцикл, двигаясь равнозамедленно, прошел путь 150 метров до полной остановки за время 25 секунд. Масса мотоцикла 150 кг. Определите силу торможения и начальную скорость мотоцикла.

Дано:

$$S = 150 \text{ м}$$

$$t = 25 \text{ с}$$

$$m = 150 \text{ кг}$$

Найти:

$$v_0 = ?$$

$$F = ?$$

Решение:

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме и в проекции на ось:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

$$F = ma \quad (1)$$

Путь и скорость для

равнопеременного движения (в уравнениях выбираем минус, т.к. движение равнозамедленное):

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 - at \quad (2) \text{ и } (3)$$

Учитывая, что конечная скорость автомобиля $v = 0$ уравнение (3) примет вид:

$$v_0 = at \quad (4)$$

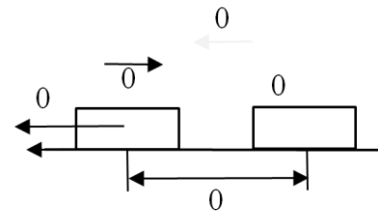
Подставим (4) в (2) и выразим ускорение:

$$a = \frac{2S}{t^2} \quad (5)$$

Подставим (5) в (1) для расчета силы и в (4) для нахождения начальной скорости:

$$F = \frac{2mS}{t^2} = \frac{2 \cdot 150 \cdot 150}{25^2} = 72 \text{ Н}$$

$$v_0 = \frac{2S}{t} = \frac{2 \cdot 150}{25} = 12 \text{ м/с}$$



Ответ: $v_0 = 12 \text{ м/с}$, $F = 72 \text{ Н}$

Пример 4

Два тела массами $m_1 = 3 \text{ кг}$ и $m_2 = 1 \text{ кг}$ движутся навстречу друг другу. После неупругого соударения тела продолжают двигаться вместе. Какое время потребуется для полной остановки тел, если скорости тел непосредственно перед ударом были $v_1 = 2 \text{ м/с}$ и $v_2 = 3 \text{ м/с}$, а коэффициент трения $\mu = 0,04$

Дано:

$$m_1 = 3 \text{ кг}$$

$$m_2 = 1 \text{ кг}$$

$$v_1 = 2 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 3 \text{ м/с}$$

$$\mu = 0,04$$

Решение:

Так как удар является абсолютно неупругим, можем записать закон сохранения импульса для данной системы и выразить из него скорость тел после соударения:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$v' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} \quad (1)$$

Так как конечная скорость тел, двигающихся вместе равна 0, то получим выражение для скорости тела:

$$0 = v' - at \rightarrow v' = at \quad (2)$$

Запишем II закон Ньютона для системы в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

Найти:

$$t = ?$$

$$F_{mp} = (m_1 + m_2)a \quad (3)$$

$$N = (m_1 + m_2)g \quad (4)$$

Учитывая, что $F_{mp} = \mu N$ подставим (4) в (3):

$$\mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \quad (5)$$

Выразив ускорение из (5) получаем:

$$a = \mu g \quad (6)$$

Выразим из (2) время и подставим в него (1) и (6):

$$t = \frac{v'}{a} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{\mu g (m_1 + m_2)} = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{0,04 \cdot 9,8(3+1)} = 1,91 \text{ с}$$

Ответ: $t = 1,91 \text{ с}$

Пример 5

Пуля попадает в висящий на нерастяжимой нити шар и застревает в нем. Масса m_2 шара в 1000 раз больше, чем масса m_1 пули. Расстояние от точки подвеса до центра шара составляет 1 м. С какой скоростью v двигалась пуля до столкновения, если шар отклонился от положения равновесия на угол $\alpha = 10^\circ$. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Дано:

$$l = 1 \text{ м}$$

$$1000m_1 = m_2$$

$$\alpha = 10^\circ$$

Найти:

$$v = ?$$

Решение:

Так как сопротивлением воздуха можно пренебречь, то систему можно считать замкнутой.

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v' \quad (1)$$

По закону сохранения механической энергии получим:

$$\frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} = (m_1 + m_2) gh \quad (2)$$

Выразим из уравнения (1) значение скорости тел после соударения:

$$v' = \frac{m_1 v}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v}{(m_1 + 1000m_1)} = \frac{v}{1001} \quad (3)$$

Преобразуя выражение (2) выразим из него v' :

$$v' = \sqrt{2gh} \quad (4)$$

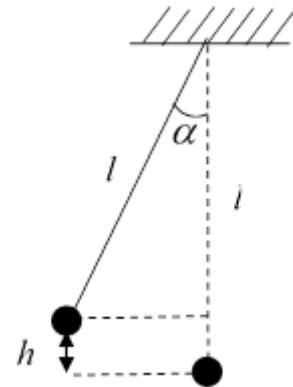
Из прямоугольного треугольника образованного отклонением нити от положения равновесия можем записать:

$$\cos \alpha = \frac{l - h}{l} \quad \text{откуда получаем}$$

$$h = l - l \cos \alpha \quad (5)$$

Приравняв левые части уравнение (3) и (4) и, подставив выражение (5), выразим начальную скорость пули:

$$v = 1001 \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 1001 \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot (1 - \cos 10^\circ)} \approx 546 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$



Ответ: $v \approx 546 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Пример 6

Как будут соотноситься кинетические энергии двух катящихся шаров, сделанных из одного материала при условии, что радиус первого шара в 3 раза больше второго.

Дано:

$$R_1 = 3R_2$$

Найти:

$$\frac{E_{\kappa 1}}{E_{\kappa 2}} = ?$$

Решение:

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения, состоит из энергии поступательного и вращательного движения:

$$E_{\kappa} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \quad (1)$$

Момент инерции шара:

$$J = \frac{2}{5}mR^2 \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) с учетом того, что $v = \omega R$:

$$E_{\kappa} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mv^2}{10} = \frac{7}{10}mv^2 \quad (3)$$

Учитывая массу шара $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, получим итоговое

выражение:

$$\frac{E_{\kappa 1}}{E_{\kappa 2}} = \frac{\frac{7}{10}m_1v^2}{\frac{7}{10}m_2v^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \left(\frac{3R_2}{R_2}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Ответ: $\frac{E_{\kappa 1}}{E_{\kappa 2}} = 27 \text{ раз}$

Пример 7

За один цикл идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно совершает работу $A = 73,5 \text{ кДж}$. Температура нагревателя $T = 100^\circ \text{C}$, температура холодильника $T = 0^\circ \text{C}$. Найти КПД, количество теплоты, получаемое от нагревателя и отдаваемое холодильнику за один цикл.

Дано:

$$A = 73,5 \text{ кДж} =$$

$$= 73500 \text{ Дж}$$

$$T_1 = 100^\circ \text{C} = 373 \text{ K}$$

$$T_2 = 0^\circ \text{C} = 273 \text{ K}$$

Найти:

$$\eta = ?$$

$$Q_1 = ?$$

$$Q_2 = ?$$

Решение:

КПД идеального цикла Карно можно найти:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{373 - 273}{373} = 0,268 (\approx 26,8\%)$$

С другой стороны КПД можно выразить:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \quad (1)$$

Из (1) выражаем значение количества теплоты, получаемое телом от нагревателя:

$$Q_1 = \frac{A}{\eta} = \frac{73500}{0,268} = 274253,7 \text{ Дж} \approx 274 \text{ кДж}$$

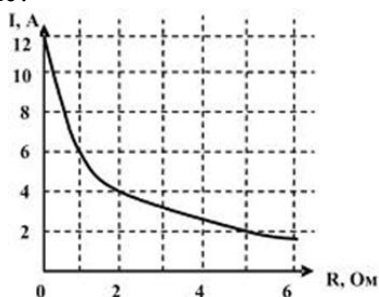
Т.к. $A = Q_1 - Q_2$ откуда получаем, что:

$$Q_2 = Q_1 - A = 274253 - 73500 = 200753 \text{ Дж} \approx 201 \text{ кДж}$$

Ответ: $\eta \approx 26,8\%$, $Q_1 \approx 274 \text{ кДж}$, $Q_2 \approx 201 \text{ кДж}$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Даны кинематические уравнения для двух точек $x = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$ и $x = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$ где $A_1 = 5 \text{ м/с}$, $A_2 = 2 \text{ м/с}$, $B_1 = 2 \text{ м/с}^2$, $B_2 = -1 \text{ м/с}^2$, $C_1 = -1,5 \text{ м/с}^3$, $C_2 = 0,5 \text{ м/с}^3$. Определить момент времени, когда их ускорения будут одинаковы. Ответ: $t = 0,5 \text{ с}$.
2. Частота вращения лопастей вентилятора уменьшилась с 300 об/мин до 180 об/мин за время $t = 1 \text{ мин}$. Учитывая, что вращения равнозамедленное, найдите угловое ускорение ε и число оборотов колеса за это время. Ответ: $\varepsilon = 0,21 \text{ рад/с}^2$, $N = 240$.
3. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью $v_1 = 500 \text{ м/с}$ попадает в вагон с песком и застревает в нем. Масса снаряда 100 кг , а вагона 10 т . Какова будет скорость вагона после столкновения, если он двигался со скоростью $v = 36 \text{ км/ч}$ в направлении, противоположном движению снаряда? Ответ: $v' = -5 \text{ м/с}$.
4. На одинаковых нитях висят два шара с массами $m_1 = 0,2 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,1 \text{ кг}$ так, что они соприкасаются. Первый шар отклоняют на высоту $h_0 = 4,5 \text{ см}$ и отпускают. Если считать удар абсолютно неупругим, то на какую высоту поднимутся шары? Ответ: $h = 0,02 \text{ м}$.
5. Определите момент времени, когда кинетическая энергия вращающегося колеса будет равна $E_{\text{кр}} = 3 \text{ кДж}$. Колесо массой $m = 2,8 \text{ кг}$ раскручивают постоянной касательной силой $F = 15 \text{ Н}$. Ответ: $t = 8,64 \text{ с}$.
6. Брошенная со скоростью $v = 10 \text{ м/с}$ граната разорвалась на 2 осколка, таким образом, что меньший осколок составил 0,4 массы всей гранаты. Найти скорость меньшего осколка, если большой продолжил двигаться в том же направлении, что и граната, но с большей скоростью $v_1' = 25 \text{ м/с}$. Ответ: $v_2' = -12,5 \text{ м/с}$.
7. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого равен $\eta = 20\%$. Теплота, которая передается за цикл от нагревателя $Q_1 = 4 \text{ кДж}$. Найдите работу, совершенную газом за цикл, и количество теплоты, отдаваемое холодильнику. Ответ: $A = 800 \text{ Дж}$, $Q_2 = 3,2 \text{ кДж}$.
8. Идеальный совершает цикл Карно, термический КПД которого $\eta = 18\%$. Температура нагревателя больше температуры холодильника в 1,2 раза. Какое количество тепло было получено от нагревателя, если газ совершил работу $A = 1500 \text{ Дж}$. Ответ: $Q_1 = 9 \text{ кДж}$.
9. Батарею конденсаторов, имеющую емкость $C = 2 \text{ Ф}$ и находящуюся под напряжением $U = 2 \text{ В}$, дополнительно заряжают до напряжения $U = 4 \text{ В}$. Насколько при этом увеличится энергия батареи? Ответ: На 12 Дж.
10. На рисунке представлены результаты экспериментального исследования зависимости силы тока в цепи от значения сопротивления, подключенного к источнику постоянного тока. Чему равны ЭДС источника и его внутреннее сопротивление?



Ответ: $\varepsilon = 12 \text{ В}$, $r = 1 \text{ Ом}$.

11. По двум бесконечно длинным, тонким проводникам, находящимся на расстоянии 2 м друг от друга, протекает ток в 2 А. Чему равна сила взаимодействия, приходящаяся на 1 м длины проводника? Ответ: $4 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$.

12. В LC – контуре максимальное значение колебаний напряжения $U_m = 2 \text{ В}$. Параметры контура $L = 0,5 \text{ Гн}$, $C = 2 \text{ Ф}$. Чему равно в этом случае максимальное значение колебаний силы тока I_m ? Ответ: 4 А.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**



**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ГРАНИТ НАУКИ»**

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ (МАТЕМАТИКА)

**Методические указания для подготовки к
заключительному туру олимпиады в
2023/2024 учебном году
для 8-9 класса**

Санкт-Петербург, 2024

МАТЕМАТИКА

Олимпиада по математике проводится только в письменной форме. Предлагаемые задачи, хотя и не выходят за рамки школьного курса математики, требуют творческого подхода, отличного владения материалом и определенной эрудиции. Разнообразие приемов и методов решения настолько велико, что собрать их в коротком пособии невозможно, подобранные задачи лишь позволяют увидеть уровень сложности и вспомнить некоторые наиболее распространенные моменты. Разделение задач по темам весьма условно, так как при решении задач из одной темы могут понадобиться сведения из других тем. Среди задач имеются как ставшие классическими задачи (задача Рамсея, задача про льва, задача Дирака и др.), так и относительно стандартные задачи, встречающиеся в большинстве сборников олимпиадных задач.

Каждый участник олимпиады получает вариант, содержащий пять заданий по математике. Они могут включать все темы школьного курса математики. При решении следует учитывать, что в вариант включены задания разной сложности в порядке возрастания их номера. Соответственно, выполнение более сложного задания оценивается большим числом баллов.

Все числовые ответы должны быть приведены точно, поэтому не следует переводить обыкновенные дроби в десятичные и заменять значения иррациональных чисел их приближенными значениями в виде десятичных дробей (то есть нельзя вместо $\sqrt{3}$ писать 1,7). В решениях также требуется выполнить все необходимые математические выкладки и строго обосновать все логические переходы.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Такие задачи обычно решаются элементарными приемами:

- применение формул сокращенного умножения;
- возведение в степень и извлечение корня;
- преобразование более общего выражения с последующим возвращением к исходному.

Задача 1. Представить в виде несократимой дроби

$$7 \frac{24}{2022} \cdot 6 \frac{24}{2023} - 13 \frac{1998}{2022} \cdot 2 \frac{1999}{2023} - 9 \cdot \frac{24}{2022}.$$

Решение. Обозначим $a = \frac{24}{2022}$, $b = \frac{24}{2023}$. Тогда данное выражение запишется в виде:

$$\begin{aligned} & (7+a)(6+b) - (14-a)(3-b) - 9a = \\ & = 42 + 6a + 7b + ab - 42 + 3a + 14b - ab - 9a = 21b = \frac{21 \cdot 24}{2023} = \frac{72}{289}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{72}{289}$.

Задача 2. Вычислить $\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}$.

Решение. Заметив, что данное выражение отрицательно, возведем его в квадрат:

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2 = 4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{4-\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{15}} = 8 - 2\sqrt{16-15} = 6.$$

Следовательно, $\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}} = -\sqrt{6}$.

Ответ: $-\sqrt{6}$.

Задача 3. Вычислить $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}} = A$. Тогда

$$\begin{aligned} A^3 &= 26 + \sqrt{675} + 3\left(\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}\right)^2 \sqrt[3]{26-\sqrt{675}} + \\ &+ 3\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} \left(\sqrt[3]{26-\sqrt{675}}\right)^2 + 26 - \sqrt{675} = \\ &= 52 + 3\sqrt{(26+\sqrt{675})(26-\sqrt{675})} \left[\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}\right] = \\ &= 52 + 3\sqrt{676-675} \cdot A = 52 + 3A. \end{aligned}$$

Один из корней кубического уравнения

$$A^3 - 3A - 52 = 0$$

находим среди делителей свободного члена:

$$52 : \pm 1; \pm 2; \pm 4; \dots \quad A = 4.$$

После разложения уравнения на множители можно сделать вывод, что других вещественных корней нет (дискриминант квадратного трехчлена меньше нуля):

$$(A-4)(A^2+4A+13)=0 \Rightarrow A=4.$$

Ответ. 4.

Задача 4. Упростить выражение

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right).$$

Решение. Чтобы упростить первый множитель, воспользуемся определением квадратного корня:

$$\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} = |p - q|.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right) = \\ & = |p - q| \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} + \frac{q}{p - q} + \frac{p}{p + q} \right) = \\ & = |p - q| \frac{2pq + pq + q^2 + p^2 - pq}{p^2 - q^2} = \\ & = \frac{|p - q|(p + q)^2}{(p - q)(p + q)} = \frac{|p - q|(p + q)}{(p - q)} = (p + q) \operatorname{sgn}(p - q) = \\ & = \begin{cases} p + q, & p > q; \\ -p - q, & p < q. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $p + q$ при $p > q$, $-p - q$ при $p < q$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Основные методы решения алгебраических уравнений:

- разложение на множители;
- тождественные преобразования;
- замена переменной;
- графическая интерпретация.

Решение уравнений в целых или натуральных числах рассматриваются в параграфе «Элементарная теория чисел».

Задача 5. Решить уравнение

$$\left(x - \frac{1}{x} \right) \cdot \left(x - \frac{4}{x} \right) \cdot \left(x - \frac{9}{x} \right) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3).$$

Решение. Уравнение имеет смысл при любых $x \neq 0$. Приведа к общему знаменателю, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{x^2 - 4}{x} \cdot \frac{x^2 - 9}{x} = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3); \\ & \frac{(x - 1)(x + 1)}{x} \cdot \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} \cdot \frac{(x - 3)(x + 3)}{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$

Значения $x = 1, 2, 3$ являются решениями данного уравнения. Сократим на общие множители:

$$\begin{aligned} (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) &= x^3; \quad x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3; \\ 6x^2 + 11x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Дискриминант $D = -23$, следовательно, других корней исходное уравнение не имеет.

Ответ: $x = 1, 2, 3$.

Задача 6. Решить уравнение

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Решение. В уравнении положим $x = 5/2 + y$. Тогда уравнение примет вид:

$$3 \left(\frac{1}{\frac{5}{2} + y} + \frac{1}{y - \frac{5}{2}} \right) + \left(\frac{1}{y + \frac{3}{2}} + \frac{1}{y - \frac{3}{2}} \right) + 4 \left(\frac{1}{y + \frac{1}{2}} + \frac{1}{y - \frac{1}{2}} \right) = 0$$

или $2y \left[\frac{3}{y^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{1}{y^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{4}{y^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right] = 0.$

Отсюда $y = 0 \Leftrightarrow x = 5/2$ или

$$3 \left(y^2 - \frac{9}{4} \right) \left(y^2 - \frac{1}{4} \right) + \left(y^2 - \frac{25}{4} \right) \left(y^2 - \frac{1}{4} \right) + 4 \left(y^2 - \frac{9}{4} \right) \left(y^2 - \frac{25}{4} \right) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$8y^4 - 48y^2 + \frac{119}{2} = 0,$$

откуда находим:

$$y^2 = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 119}}{8} = \frac{24 \pm 10}{8}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{5}{2}; \quad x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}; \quad x_{4,5} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении и доказательстве алгебраических неравенств следует обратить внимание на следующие распространенные приемы:

- доказательство неравенств на основе определения;
- выделение квадратов или других степеней;
- последовательные оценки;
- метод математической индукции;
- использование специальных и классических неравенств;
- использование элементов математического анализа;
- использование метода «оценка+пример»;
- использование геометрических аналогий.

Задача 7. Доказать, что $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$.

Доказательство. Используя очевидное неравенство $2 < \sqrt{6} < 3$, оценим левую часть:

$$\begin{aligned} & \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} < \\ & < \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + 3}} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + 3}} = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Задача 8. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Доказать, что

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

Решение. Используя неравенство треугольника $a + b > c$ и неравенство $a^2 - ab + b^2 \geq 0$, получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > \\ &> c(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c(a^2 + 2ab + b^2) = c(a + b)^2 > c^3. \end{aligned}$$

Задача 9. Найти наименьшее значение выражения

$$1 + \frac{\ln^2 x}{\ln^2 y} + \frac{\ln^2 y}{\ln^2 x}.$$

Решение. Выражение имеет смысл при $x > 0$, $x \neq 1$ и $y > 0$, $y \neq 1$.

Сначала выполним оценку выражения. Заметим, что $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$ для любых положительных u и v

(докажите самостоятельно). Полагая $u = \ln^2 x$, $v = \ln^2 y$, получим $1 + \frac{\ln^2 x}{\ln^2 y} + \frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} \geq 1 + 2 = 3$.

Покажем, что это значение достигается (приведем пример). Действительно, при $x = y = e$ имеем

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 10. Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c.$$

Доказать, что $a + b + c \geq 3abc$.

Доказательство.

Сначала докажем, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca) : \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0 ; \\ 2(a^2+b^2+c^2) &\geq 2(ab+bc+ac) ; \\ a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ac.\end{aligned}$$

Прибавив к обеим частям $2(ab+bc+ac)$, будем иметь:

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) &\geq 3(ab+bc+ac), \text{ что равносильно} \\ (a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ac).\end{aligned}$$

Умножая неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a+b+c$ на общий знаменатель (по условию он больше нуля, так как числа a, b, c – положительные), получаем равносильное неравенство:

$$bc+ac+ab \geq (a+b+c)abc.$$

По доказанному выше:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(bc+ac+ab) \geq 3(a+b+c)abc.$$

Сократив на общий множитель (по условию он также будет больше нуля), получим требуемый результат.

Задача 11. Доказать, что если $a+b+c \leq 3$ и $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, то справедливо неравенство:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Если $a \leq b \leq c, x \leq y \leq z$, то сумма произведений $cz + by + ax$ будет принимать максимальное значение из всех сумм, составленных из попарных произведений множителей a, b, c и x, y, z , а сумма $az + by + cx$, будет принимать минимальное значение из всех таких возможных сумм (почему?).

$$\text{Если } a \geq b \geq c, \text{ то } a+1 \geq b+1 \geq c+1 \Rightarrow \frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{b+1} \leq \frac{1}{c+1}.$$

$$S_{\min} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}.$$

Все остальные суммы, составленные из попарных произведений множителей a, b, c и $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}$, будут больше. Тогда

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1};$$

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{c}{b+1} + \frac{a}{c+1} + \frac{b}{a+1}.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$\begin{aligned}2S_{\min} &\leq \frac{a+c}{b+1} + \frac{a+b}{c+1} + \frac{b+c}{a+1} \leq \frac{3-b}{b+1} + \frac{3-c}{c+1} + \frac{3-a}{a+1} = \\ &= \frac{3+3b-3b-b}{b+1} + \frac{3+3a-3a-a}{a+1} + \frac{3+3c-3c-c}{c+1} = \\ &= \frac{3(b+1)-4b}{b+1} + \frac{3(a+1)-4a}{a+1} + \frac{3(c+1)-4c}{c+1} = \\ &= 3 - \frac{4b}{b+1} + 3 - \frac{4a}{a+1} + 3 - \frac{4c}{c+1} =\end{aligned}$$

$$= 9 - 4 \left(\frac{b}{b+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{c}{c+1} \right) = 9 - 4S_{\min} = 9 - 4S_{\min}$$

Таким образом, $2S_{\min} \leq 9 - 4S_{\min}$, $6S_{\min} \leq 9$. Следовательно, $S_{\min} \leq \frac{3}{2}$.

Задача 12. Пусть x, y вещественные неотрицательные числа, такие, что $x + y = 2$. Доказать, что $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$.

Доказательство. Известно, что среднее геометрическое не превосходит среднее арифметическое $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Так как x, y вещественные неотрицательные числа, то $\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$. По условию $x + y = 2$, следовательно, $\frac{4}{4} \geq xy$, то есть $xy \leq 1 \Rightarrow x^2 y^2 \leq 1$.

Кроме того,

$$x + y = 2 \Rightarrow x \leq 2, y \leq 2, x^2 \leq 4, y^2 \leq 4, x^4 \leq 16, y^4 \leq 16.$$

В этом случае (см. предыдущую задачу):

$$\begin{aligned} x^4 \cdot y^2 + x^2 y^4 &\leq x^4 y^4 + x^2 y^2, \\ x^2 y^2 \cdot (x^2 + y^2) &\leq (x^2 y^2 + 1) \cdot x^2 y^2 \leq (1+1) \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Задача 13. Для любых положительных чисел a, b, c доказать, что справедливо неравенство:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Доказательство:

Пусть $x = a + b$, $y = b + c$, $z = a + c$, тогда левая часть данного неравенства примет вид:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(\frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3 \right), \end{aligned}$$

а так как $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$, то $S \geq \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}$.

Задача 14. Верно ли, что для любых чисел $0 < a < b$ выполнено неравенство: $(a+b)^6 < 32(a^6 + b^6)$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{(a+b)^6}{32(a^6 + b^6)} < 1$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x+b)^6}{32(x^6 + b^6)}$, непрерывную на $x = (0; +\infty)$ при $x \in (0; b]$. Найдем производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6(x+b)^5 \cdot 32(x^6 + b^6) - 32 \cdot 6x^5(x+b)^6}{32^2(x^6 + b^6)^2} = \\ &= \frac{6(x+b)^5 \cdot ((x^6 + b^6) - x^5(x+b))}{32(x^6 + b^6)^2} = \frac{6(x+b)^5 \cdot ((x^6 + b^6) - x^5(x+b))}{32(x^6 + b^6)^2} = \\ &= \frac{6(x+b)^5 \cdot (b^6 - x^5 b)}{32(x^6 + b^6)^2} = \frac{6b(x+b)^5 \cdot (b^5 - x^5)}{32(x^6 + b^6)^2} > 0. \end{aligned}$$

Поскольку производная положительна, то функция возрастает, и $f(x) < f(b) = 1$. Следовательно,

$$\frac{(a+b)^6}{32(a^6+b^6)} < 1.$$

Задача 15. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$ справедливо двойное неравенство:

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Доказательство (метод математической индукции).

База: при $n = 2$ неравенство $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ очевидно.

Предположение индукции: пусть для $n = k$ утверждение верно, то есть

$$\sqrt{k} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}.$$

Индукционный переход: докажем истинность утверждения для $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ \frac{\sqrt{k^2 + k + 1}}{\sqrt{k+1}} &< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2\sqrt{k^2 + k + 1}}{\sqrt{k+1}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{k+1}{\sqrt{k+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2k+2}{\sqrt{k+1}}$$

(воспользовались неравенством $k < \sqrt{k^2 + k} < k + \frac{1}{2}$, которое можно проверить непосредственным возведением в квадрат). Сокращая, получаем требуемое неравенство:

$$\sqrt{k+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

Таким образом, утверждение верно для любых $n > 1$.

Задача 16. Доказать, что при $|x| < 1$ выполняется неравенство $(1-x)^{2023} + (1+x)^{2023} < 2^{2023}$.

Доказательство. По методу математической индукции, докажем, что при любом натуральном $n > 1$ будет справедливо неравенство $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$.

База. При $n = 2$ неравенство верно. Действительно,

$$(1-x)^2 + (1+x)^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 + 2x + x^2 = 2 + 2x^2 < 2^2.$$

Предположение. Пусть неравенство верно при $n = k$:

$$(1-x)^k + (1+x)^k < 2^k.$$

Индукционный переход. Докажем справедливость неравенства для $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} (1-x)^{k+1} + (1+x)^{k+1} &< ((1-x)^k + (1+x)^k) \cdot ((1-x) + (1+x)) < 2^k \cdot 2; \\ (1-x)^{k+1} + (1+x)^{k+1} &< 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Неравенство доказано для любого натурального $n > 1$, в частности, для $n = 2023$.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

В элементарной теории чисел существует богатейшее разнообразие задач и методов их решения, и перечислить их все не представляется возможным. К основным приемам относятся:

- разложение чисел на простые множители (основная теорема арифметики);
- изучение остатков от деления на некоторое число;
- перебор всех различных возможностей;
- метод математической индукции.

Задача 17. Доказать, что число $(1000^{2023} - 1)$ является составным.

Доказательство. Заметим, что число 1000^{2023} содержит 1 единицу и 6069 нулей; при вычитании из него 1 получим число, состоящее из 6069 девяток. Оно делится на 3, следовательно, является составным.

Задача 18. Вычислить $\left(\underset{n \text{ девяток}}{99\dots 9} \right)^2$.

Решение. $\underset{n \text{ девяток}}{99\dots 9} = \underset{n \text{ нулей}}{100\dots 0} - 1 = 10^n - 1$.

$$\left(\underset{n \text{ девяток}}{99\dots 9} \right)^2 = (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = \underset{n-1 \text{ девятка}}{99\dots 9} \underset{n-1 \text{ ноль}}{800\dots 01}$$

Замечание. Попробуйте доказать это по методу математической индукции.

Задача 19. Доказать, что сумма произведения четырех последовательных целых чисел и единицы есть точный квадрат.

Решение. Обозначим наименьшее из этих чисел n , тогда:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = \\ &= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

Задача 20. Существует ли представление числа 5^{2023} в виде произведения $x^{49} \cdot y^{41}$ для натуральных x, y ?

Решение. Такое представление существует (и не единственное). Для его построения представим 2023 в виде линейной комбинации чисел 49 и 41:

$$2023 = 12 \cdot 49 + 35 \cdot 41.$$

$$\text{Тогда } 5^{2023} = 5^{12 \cdot 49 + 35 \cdot 41} = 5^{12 \cdot 49} \cdot 5^{35 \cdot 41} = (5^{12})^{49} \cdot (5^{35})^{41}.$$

$$\text{Ответ: } x = 5^{12}; y = 5^{35}.$$

Замечание. Верно ли, что всякое натуральное число n можно представить в виде $n = ak + bl$ для любых $k, l \in \mathbb{N}$, если $a, b \in \mathbb{Z}$?

Задача 21. Решить в натуральных числах уравнение

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

Решение. Уравнение имеет очевидное решение $x=1, y=4, z=7$ (365 дней в году складываются из 28 дней февраля, 30 дней апреля, июня, сентября и ноября и 31 дня января, марта, мая, июля, августа, октября и декабря).

В силу натуральности неизвестных и условия $28x + 30y + 31z = 365$ выполнены неравенства $1 \leq x \leq 11, 1 \leq y \leq 10, 1 \leq z \leq 10$. Покажем, что сумма $x + y + z = 12$. Предположим противное, тогда $x + y + z \leq 11$ или $x + y + z \geq 13$.

Если $x + y + z \leq 11$, то

$$\begin{aligned} 28x + 30y + 31z &\leq 31x + 31y + 31z = \\ &= 31(x + y + z) \leq 31 \cdot 11 = 341 < 365. \end{aligned}$$

Если $x + y + z \geq 13$, то

$$28x + 30y + 31z = 28(x + y + z) + 2y + 3z \geq 28 \cdot 13 + 5 = 369 > 365.$$

Рассмотрим теперь остатки от деления на 5 левой и правой частей уравнения $28x + 30y + 31z = 365$. Так как 30 и 365 делятся на 5 без остатка, а коэффициенты 28 и 31 дают остатки 3 и 1, то $3x + z$ делится на 5, то есть $3x + z = 5k$.

Перебором значений x и k находим

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow z = 2; \quad 7, \text{ тогда} \begin{cases} x = 1, y = 10, z = 2; \\ x = 1, y = 4, z = 7; \end{cases} \\ x = 2 &\Rightarrow z = 4; \quad 9, \text{ тогда} \begin{cases} x = 2, y = 6, z = 4; \\ x = 2, y = 1, z = 9; \end{cases} \\ x = 3 &\Rightarrow z = 1; \quad 6, \text{ тогда} \begin{cases} x = 3, y = 8, z = 1; \\ x = 3, y = 3, z = 6; \end{cases} \end{aligned}$$

и так далее.

Учитывая, что z должно быть нечетным (коэффициенты 28 и 30 – четные, 31 и 365 – нечетные), и подставляя в исходное уравнение, получим второе решение $x = 2, y = 1, z = 9$.

Ответ: $x = 1, y = 4, z = 7$ или $x = 2, y = 1, z = 9$.

Задача 22. Решить в целых числах уравнение

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

Ответ: $(1, 4, 7), (2, 1, 9), (-1, 10, 3), (10, 8, -5), (0, 7, 5)$.

Задача 23. На круизном лайнере находится от 250 до 400 путешественников. Если рассадить их в спасательные шлюпки, вмещающие 15 человек, то семерым не хватит места, а если разместить путешественников на плотках, рассчитанных на 25 человек, то останется 8 свободных мест. Сколько всего путешественников на лайнере?

Решение: Пусть a – число путешественников. По условию

$$\begin{cases} a = 15k + 7 = 15(k + 1) - 8; \\ a = 25l - 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 8) : 15; \\ (a + 8) : 25. \end{cases} \Rightarrow (a + 8) : 75.$$

Число $a + 8$ следует искать среди чисел, кратных 75: 225, 300, 375, 450, ..., откуда $a = 292$ и 367.

Ответ: $a = 292; 367$.

Задача 24. Из книги объемом менее 500 страниц вырвали один лист. Сумма цифр номера страницы с одной стороны равна 10, а с другой – 11. Если из меньшего номера вычесть единицу, то оно будет делиться на 10, а если к большему добавить единицу, то оно будет делиться на 11. Найти номера страниц на вырванном листе.

Решение. Искомые номера – это подряд идущие натуральные числа, а значит, одно из них четное. По условию, если из меньшего числа вычесть 1, оно будет делиться на 10, следовательно, большее число четное и оканчивается на 2. Кроме того, после его увеличения на 1 оно будет делиться на 11 и оканчиваться цифрой 3. Рассмотрим числа, делящиеся на 11, оканчивающиеся цифрой 3 и меньшие 500. Такими числами будут 33 и 363, а по условию задачи в искомом числе сумма цифр равна 11, следовательно, номера страниц равны 361 и 362.

Ответ: 361 и 362.

Задача 25. В турнире участвовали ученики 8 и 9 классов. Каждый сыграл с каждым один раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш – 0 очков. Девятиклассников было в 10 раз больше, чем восьмиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, нежели все восьмиклассники. Сколько очков набрал самый успешный восьмиклассник?

Решение. Пусть в турнире приняло участие a восьмиклассников, которые заработали b очков. Тогда играли $10a$ девятиклассников, которые заработали $4,5b$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11a$ игроков играют $\frac{11a(11a-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение

$$11a(11a - 1) = 5,5b, \text{ откуда } b = 2a(11a - 1).$$

Каждый участник играет $11a - 1$ партий. Значит, каждый восьмиклассник может набрать максимум $2(11a - 1)$ очков, если выиграет все игры. Так как a восьмиклассников набрали $2a(11a - 1)$ очков, то есть они выиграли все свои игры.

Если в турнире участвовало хотя бы два десятиклассника, то в игре между собой один из них не выиграл – противоречие. Значит, был только один восьмиклассник, т. е. $a = 1$. Он набрал

$$2(11a - 1) = 20 \text{ очков.}$$

Ответ. 20.

Задача 26. На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к двум из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что, сделав не более 30 таких ходов, всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули?

Решение. Пусть сначала на доске были написаны числа 1, 8 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Изучим, как меняются разности между вторым и первым числом, а также между третьим и первым числом. Изначально они равны 7 и 8. При вычитании трёх единиц разности не меняются. Если единицы прибавляются к первым двум числам, то первая разность не меняется, а вторая уменьшается на 1. Аналогично, если единицы прибавляются к первому и третьему числам, то первая разность уменьшается на 1, а вторая не меняется. Наконец, при прибавлении к последним числам разности увеличиваются. Итак, поскольку первая разность уменьшилась на 7, а вторая – на 8, то к первому числу единица прибавлялась не меньше, чем $7 + 8 = 15$ раз. Значит, из него должны были хотя бы 16 раз вычитать единицу, так как в конце оно стало нулём. Поэтому итоговое количество операций не меньше, чем $15 + 16 = 31$.

Ответ: неверно.

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задача 27 (задача Рамсея). Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Решение. Выберем одного человека из шести и назовем его N . Среди оставшихся пяти обязательно найдутся либо трое знакомых с ним, либо трое незнакомых с N . Пусть среди оставшихся пяти человек есть трое знакомых с N . Среди этих троих людей либо найдутся двое знакомых – тогда они вместе с N образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы, и утверждение доказано. Второй случай разбирается аналогично.

Задача 28. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:

1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина – на третий;

2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.

На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа: на второй или на третий?

Решение. Обозначим n_{12} – количество поездок с первого этажа на второй. Аналогично определим числа n_{13} , n_{21} , n_{23} , n_{31} , n_{32} . Все поездки разобьём на три группы: поездки на третий этаж, поездки с третьего этажа и поездки между первым и вторым этажом. По условию задачи первая группа составляет менее трети всех поездок. С другой стороны, она количественно равна второй, так как число покупателей, приехавших на третий этаж равно числу уехавших с третьего этажа. Значит, последняя группа составляет более трети всех поездок:

$$(n_{31} + n_{32}) = (n_{13} + n_{23}) < (n_{12} + n_{21}).$$

Подставляя в это неравенство $n_{21} = n_{23}$, получим $n_{13} < n_{12}$, то есть с первого этажа чаще ездили на второй, нежели на третий.

Ответ: на второй.

Задача 29. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми

высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. А, В и С — жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. А и В сказали следующее:

А: «В по рангу выше, чем С.»

В: «С по рангу выше, чем А.»

Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу — А или В?» *Решение.* Переберем варианты, кем может быть житель А.

Если А — рыцарь, то В — обычный человек, а С — лжец и С ответит: «В».

Если А — лжец, то С — рыцарь, а В — обычный человек, и С также ответит: «В».

Наконец, если А — обычный человек, то В не может быть ни рыцарем (иначе С тоже был бы рыцарем, а это невозможно), ни обычным человеком, значит он лжец, но тогда С тоже лжец, что невозможно. Значит, А не может быть обычным человеком. Таким образом, С всегда ответит: «В».

Ответ: В.

ПРОГРЕССИИ

Задача 30. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение. Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Общий член прогрессии задается формулой: $a_n = 102 + (n-1) \cdot 6$. Так как все члены искомой суммы — трехзначные числа, то

$$102 + (n-1) \cdot 6 \leq 999; n \leq 1 + \frac{999-102}{6} = 1 + \frac{897}{6} = 150,5.$$

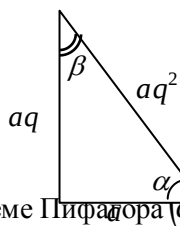
Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму, равно $n = 150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии:

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 150 \cdot 102 + \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot 6 = 82305.$$

Ответ: 82305.

Задача 31. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию (рис. 1). Найти острые углы этого треугольника.



Решение: по теореме Пифагора $(aq^4)^2 = a^2 + (aq)^2$, тогда $a^2 q^4 = a^2(1 + q^2)$ и $q^4 - q^2 - 1 = 0$.

Решая квадратное уравн

$$(q^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

$$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{aq^2} = \frac{1}{q^2} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\alpha \in \text{I четв.});$$

$$\cos \beta = \frac{aq}{aq^2} = \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\arccos \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 32. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет

50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5:4. Найти количество членов этой прогрессии.

Решение. Пусть a_1 – первый член арифметической прогрессии, d – разность, n – количество членов.

Тогда сумма первых тринадцати ее членов:

$$S_{1..13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = \frac{13(a_1 + a_1 + 12d)}{2} = \frac{13(2a_1 + 12d)}{2} = 13(a_1 + 6d),$$

сумма последних тринадцати членов:

$$\begin{aligned} S_{n-12..n} &= \frac{13(a_{n-12} + a_n)}{2} = \frac{13(a_1 + (n-13)d + a_1 + (n-1)d)}{2} = \\ &= \frac{13(2a_1 + (2n-14)d)}{2} = 13(a_1 + (n-7)d). \end{aligned}$$

Сумма всех членов без первых трех:

$$S_{4..n} = \frac{(n-3)(a_4 + a_n)}{2} = \frac{(n-3)(a_1 + 3d + a_1 + (n-1)d)}{2};$$

сумма всех членов без последних трех:

$$S_{1..n-3} = \frac{(n-3)(a_1 + a_{n-3})}{2} = \frac{(n-3)(2a_1 + (n-4)d)}{2}.$$

По условию $2S_{1..13} = S_{n-13..n}$, то есть

$$26(a_1 + 6d) = 13(a_1 + (n-7)d).$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \frac{S_{4..n}}{S_{1..n-3}} &= \frac{5}{4}, \quad 4S_{4..n} = 5S_{1..n-3}; \\ 4 \frac{(n-3)(2a_1 + (n+2)d)}{2} &= 5 \frac{(n-3)(2a_1 + (n-4)d)}{2}; \\ 4(2a_1 + (n+2)d) &= 5(2a_1 + (n-4)d). \end{aligned}$$

Решая систему

$$\begin{cases} 13a_1 + (247-13n)d = 0; \\ 2a_1 + (n-28)d = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (19-n)d = 0; \\ 2a_1 + (n-28)d = 0, \end{cases}$$

получим $(66-3n)d = 0$, откуда найдем $n = 22$ (так как по условию $d \neq 0$).

Ответ: 22.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Задача 33. Три пиццы диаметром 4 дециметра каждая упакованы в треугольную коробку. Найти наименьшую площадь коробки, если пиццы попарно соприкасаются, но не перекрывают друг друга.

Решение. Радиус $r = 2$ дм; круги равны (рис. 2) $\Rightarrow \triangle ABC$ – правильный треугольник

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

$DG \perp AC$ (радиус перпендикулярен касательной), $DG = r \Rightarrow$ из $\triangle ADG$ гипотенуза $AD = 2r$ (катет, лежащий против угла 30° , равен половине гипотенузы).

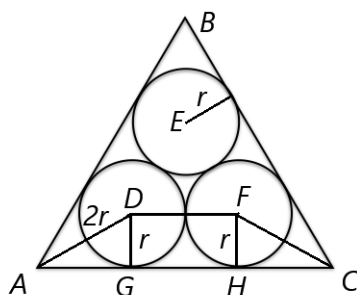


Рис. 2

$$AG = r\sqrt{3} \text{ (теорема Пифагора)} \Rightarrow \\ \Rightarrow AC = AG + GH + HC = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r(1 + \sqrt{3}).$$

Окончательно получим:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(AC)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2(1 + \sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 2r^2(2\sqrt{3} + 3).$$

Ответ: $8(2\sqrt{3} + 3) \text{ дм}^2$.

Задача 34. Через квадрат $ABCD$ проведены 9 прямых, каждая из которых проходит через противоположные стороны и разбивает его на пару четырехугольников, причем один из четырехугольников имеет площадь, в полтора раза большую, чем другой. Доказать, что внутри квадрата имеется хотя бы одна точка, через которую проходят три прямые.

Решение. По формуле площади трапеции (для прямоугольников эта формула также верна):

$$S_{ABEF} = \frac{BE + AF}{2} \cdot AB = GK \cdot AB;$$

$$S_{FECD} = \frac{FD + EC}{2} \cdot CD = KH \cdot AB;$$

$$\frac{S_{FECD}}{S_{ABEF}} = 1,5 \Rightarrow KH = 1,5GK.$$

Таким образом, каждая из прямых проходит через точку K , либо через симметричную ей относительно центра квадрата, либо через одну из двух таких точек на второй средней линии квадрата (рис. 3).

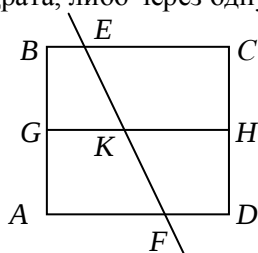


Рис. 3

Девять прямых проходят через четыре точки, следовательно, по принципу Дирихле хотя бы через одну из точек проходит не менее трех прямых.

Задача 35. По круглой цирковой арене радиуса 10 м, бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов его поворотов не меньше 2998 радиан.

Решение. Обозначая траекторию движения льва $A_1A_2...A_n$, распрямим ее следующим образом.

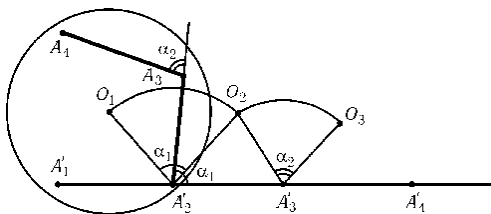


Рис. 4

Повернем относительно точки A_2 арены цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_3 попала на луч A_1A_2 . Затем повернем относительно точки A_3 арены цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_4 попала на луч A_1A_2 и т. д. Центр O арены цирка переходит при этом последовательно в точки $O_1 = O, O_2, \dots, O_{n-1}$; точки $A_1, \dots, A_n$ переходят в точки $A'_1, \dots, A'_n$, лежащие на одной прямой (рис. 4).

Если обозначить α_{i-1} – угол поворота льва в точке A'_i , то $\angle O_{i-1}A'_iO_i = \alpha_{i-1}$ и $A'_iO_{i-1} = A'_iO_i \leq 10$, поэтому $O_iO_{i-1} \leq 10\alpha_{i-1}$.

Следовательно, имеем

$$30000 = A'_1A'_n = A'_1O_1 + O_1O_2 + \dots + O_{n-2}O_{n-1} + O_{n-1}A'_n \leq \\ \leq 10 + 10(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2}) + 10,$$

откуда получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2} \leq \frac{29980}{10} = 2998.$$

Задача 36 (задача Фаньяно). Вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника.

Решение. С помощью движений плоскости попробуем выстроить стороны вписанного треугольника в ломаную линию. Тогда периметр будет не меньше отрезка, соединяющего концы этой ломаной. А наименьший периметр будет соответствовать случаю, когда стороны ломаной лежат на одной прямой.

Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC

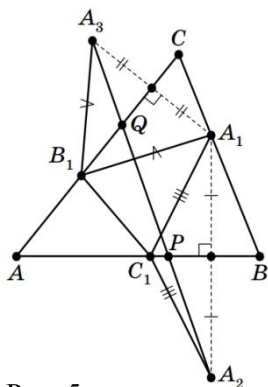


Рис. 5

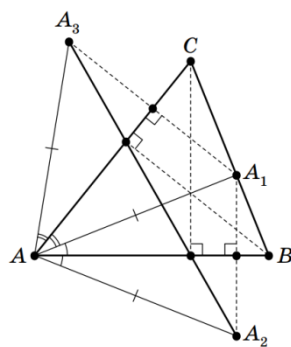


Рис. 6

(A_1 — на стороне BC и т. д. (рис. 5)). Отразим точку A_1 симметрично относительно сторон AB и AC , получив точки A_2 и A_3 соответственно.

Длина трёхзвенной ломаной $A_3B_1C_1A_2$ равна периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Для того, чтобы периметр был наименьшим (равным отрезку A_2A_3), $ABC A_1 A_2 A_3$ нужно, чтобы вершины B_1 и C_1 лежали в точках пересечения отрезка A_2A_3 со сторонами треугольника AB и AC . Осталось понять, как выбрать точку A_1 на стороне BC таким образом, чтобы длина отрезка A_2A_3 была наименьшей. Для этого заметим, что треугольник A_2AA_3 — равнобедренный ($A_3A = A_2A = A_1A$), а угол при его вершине A равен $2 \angle BAC$ и потому не зависит от выбора точки A_1 .

Итак, при движении точки A_1 по стороне BC углы треугольника A_2AA_3 не меняются. А его линейные размеры будут наименьшими, когда наименьшей будет сторона A_2A , которая равна A_1A . Значит, A_1A — высота, опущенная на сторону BC . Далее видим, что существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра, его вершина A_1 — основание высоты (рис. 6).

Если провести те же рассуждения с вершинами B_1 и C_1 , получим, что они также являются основаниями высот (поскольку треугольник минимального периметра — единственный).

ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ И СКЛАДЫВАНИЕ

Довольно часто среди олимпиадных задач встречаются задачи на разрезание или складывание листа бумаги. Некоторые из них широко известны и не требуют больших знаний по геометрии, другие же, напротив, предполагают отлично натренированный ум и глубокие познания.

Задача 37. Разрезать прямоугольник размером 4 на 9 на две равные части, из которых можно составить квадрат. Найти площадь этого квадрата.

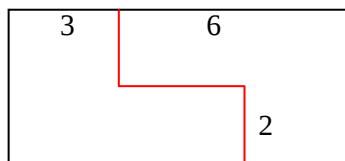


Рис. 7

Решение. На рисунке 7 показан требуемый разрез, что же касается площади, то от перекраивания она измениться не может $S = 4 \cdot 9 = 36$. В частности, отсюда сразу следует, что сторона требуемого квадрата равна 6.

Задача 38 (задача Лайонса). Разрезать изображенную на рис. 8 фигуру на четыре равных шестиугольника и найти их площади.

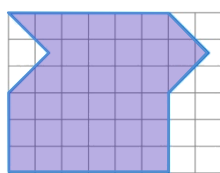


Рис. 8

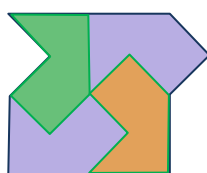


Рис. 9

Решение. Площадь данной фигуры, очевидно, равна площади квадрата со стороной 6 (рис. 8). При перекраивании фигуры площадь не изменится, следовательно, площадь каждого из требуемых шестиугольников равна $36 : 4 = 9$. Требуемое разбиение фигуры показано на рис. 9.

Ответ. 9

Задача 39. Лист бумаги разрезали на 5 частей, затем одну из получившихся частей снова разрезали на 5 частей и повторили эту операцию несколько раз. Могло ли в результате получиться 2023 части?

Решение. При каждом разрезании одного кусочка на пять частей общее число кусочков увеличивается на четыре, следовательно, после n разрезаний число кусочков станет равным $1 + 4n$. Осталось заметить, что число 2023 нельзя представить в таком виде, так как остаток от его деления на 4 равен 3.

Ответ: нет.

Задача 40. Клетчатый квадрат 100×100 сложили несколько раз по линиям сетки и сделали два прямолинейных разреза, также идущих по линиям сетки. Найти наибольшее количество частей, на которые мог быть разрезан данный квадрат.

Решение. Одно разрезание сложенного квадрата соответствует разрезанию исходного квадрата по нескольким параллельным линиям, причем расстояние между разрезами не меньше 2 (так как между ними должна быть линия сгиба). Таких линий не больше 50, и они делят квадрат на не более, чем 51 прямоугольник. При втором таком разрезании каждый из полученных прямоугольников разрезается на не более чем 51 часть, так что наибольшее количество прямоугольников $51^2 = 2601$. Это число реализуется, если сложить и разрезать исходный квадрат, как показано на рис. 10 (там, конечно, нарисован квадрат поменьше).

Ответ: 2601.

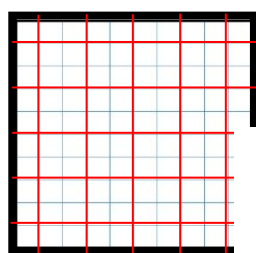


Рис. 10

Задача 41.

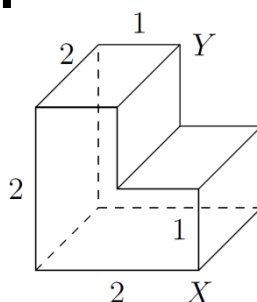


Рис. 11

Найти кратчайшее расстояние по

поверхности представленной на чертеже фигуры (рис. 11) от вершины X до вершины Y .

Решение. «Отрежем» от фигуры закрашенные грани и развернем их, получив прямоугольник со сторонами 3 и 2 (рис. 12).

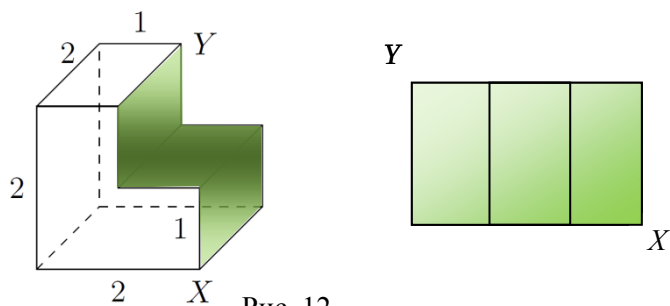


Рис. 12

Кратчайшим путем, очевидно, будет диагональ этого прямоугольника. Ее длина равна $XY = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Ответ: $\sqrt{13}$.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Среди текстовых задач, как правило, выделяют задачи на движение, работу, концентрацию и процентное содержание, взвешивания, переливания и др. Но также можно встретить смешанные задачи. Основными методами решения являются:

- составление уравнения;
- составление системы уравнений;
- составление неравенств.

Задача 42. Два велосипедиста и пешеход одновременно отправились из пункта А в пункт В. Более чем через час после выезда у первого велосипедиста сломался велосипед, и он продолжил путь пешком, двигаясь в 4,5 раза медленнее, чем на велосипеде. Его обгоняют: второй велосипедист – через 5/8 ч после поломки, а пешеход – через 10,8 ч после поломки. К моменту поломки второй велосипедист проехал расстояние в два раза большее, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 ч более позднему, чем момент поломки. Через сколько часов после начала движения сломался велосипед?

Решение. В данной задаче удобно ввести четыре неизвестных: скорости велосипедистов v_1 и v_2 , скорость пешехода u и время движения до поломки t . Из условия задачи очевидно, что $v_1 > v_2 > u$, $v_1 / 4,5 < u$, $t > 1$.

Составим уравнения, используя данные задачи:

- второй велосипедист обогнал через 5/8 ч после поломки

$$v_2(t + 5/8) = v_1 t + \frac{v_1}{4,5} \cdot \frac{5}{8};$$

- пешеход обогнал через 10,8 ч после поломки

$$u(t + 10,8) = v_1 t + \frac{v_1}{4,5} \cdot 10,8;$$

- к моменту поломки второй велосипедист проехал расстояние в два раза большее, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 ч более позднему, чем момент поломки

$$v_2 t = 2u \left(t + \frac{5}{36} \right).$$

Таким образом, система из трех уравнений содержит 4 неизвестных: v_1 , v_2 , u и t . Так как каждое уравнение является однородным уравнением относительно переменных, то, разделив каждое из

уравнений на u , количество неизвестных уменьшается до трех: t и два отношения $\frac{v_1}{u}$ и $\frac{v_2}{u}$:

$$\begin{cases} \frac{v_2}{u}(t+5/8) = \frac{v_1}{u}t + \frac{v_1}{u} \cdot \frac{1}{4,5} \cdot \frac{5}{8}; \\ t+10,8 = \frac{v_1}{u}t + \frac{v_1}{u} \cdot \frac{1}{4,5} \cdot 10,8; \\ \frac{v_2}{u}t = 2\left(t + \frac{5}{36}\right). \end{cases}$$

Выразим $\frac{v_1}{u}$ из второго уравнения и подставим в первое:

$$\frac{v_2}{u} = \frac{t+10,8}{t+2,4} \cdot \frac{t+5/36}{t+5/8}.$$

Используя третье уравнение, получаем:

$$\frac{t+10,8}{t+2,4} \cdot \frac{t}{t+5/8} = 2,$$

$$t^2 - 4,75t + 3 = 0.$$

Из полученного квадратного уравнения находим два корня:

$$t_1 = \frac{3}{4}, t_2 = 4.$$

По условию задачи поломка произошла более чем через час, поэтому решением задачи будет являться корень $t_2 = 4$.

Ответ: через 4 часа.

Задача 43. Встречаются две команды шахматистов А и В. По условиям соревнований каждый участник одной команды играет по одной партии с каждым участником другой команды. Общее число предстоящих партий в 4 раза больше числа всех игроков в обеих командах. Однако из-за болезни два игрока не смогли явиться на турнир, в связи с чем число всех сыгранных в турнире партий оказалось на 17 меньше предполагавшегося. Сколько игроков выступило в турнире за команду А, если известно, что в ней было меньше игроков, чем в команде В?

Решение. Обозначим через m и n ($n > m$) количество шахматистов, которые должны были выступить за команды А и В соответственно. Очевидно, что планировалось сыграть mn партий.

Первое условие задачи приводит к уравнению:

$$mn = 4(m+n).$$

Второе уравнение сразу написать нельзя, так как неизвестно, из каких команд были заболевшие игроки. Возможны три случая:

1) если оба заболевших игрока были из команды А, тогда

$$(m-2)n = mn - 17;$$

2) если оба заболевших игрока были из команды В, тогда

$$(n-2)m = mn - 17;$$

3) если заболело по одному игроку из команд А и В, тогда

$$(m-1)(n-1) = mn - 17.$$

Первый случай дает $2n = 17$, что невозможно, так как n – целое число. Аналогично невозможен второй случай $2m \neq 17$. В третьем случае получаем систему

$$\begin{cases} mn = 4(m+n), \\ m+n = 18, \\ n > m. \end{cases}$$

Отсюда легко находим $m = 6, n = 12$.

Ответ: за команду А выступило 5 игроков.

Задача 44. По аллее длиной 100 метров идут три человека со скоростями 1, 2 и 3 км/час. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и идёт назад с той же скоростью. Доказать, что найдётся отрезок времени в 1 минуту, когда все трое будут идти в одном направлении.

Решение. Заметим, что время прохождения аллеи в одну сторону составляет соответственно 6, 3 и 2 минуты. Покажем, что найдутся 3 минуты, когда первые два человека идут в одном направлении. Рассмотрим 6 минут, за которые первый человек проходит аллею от начала до конца. В эти 6 минут целиком уложатся 3 минуты, за которые второй человек проходит аллею. Если они при этом идут в одном направлении, то всё доказано. Если же они идут в разных направлениях, то ровно через 6 минут они будут идти в одном направлении, поскольку через 6 минут первый человек меняет направление, а второй идёт в прежнем направлении.

Будем считать начало промежутка времени, когда первые два человека 3 минуты идут в одном направлении, началом отсчёта времени. Второй человек разворачивается через 3 минуты; первый – через a минут, где $3 \leq a \leq 6$; третий – через b минут. Третий человек поворачивает каждые 2 минуты, поэтому, $b \leq 2$. Если $b \geq 1$, то уже в течении первых трёх минут найдётся промежуток времени в 1 минуту, когда все трое идут в одном направлении: это либо первая минута, если вначале все трое идут в одном направлении, либо третья минута, если вначале третий идёт в противоположном направлении.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < b < 1$. Если третий человек вначале идёт в противоположном направлении, то после его поворота 2 минуты все трое будут идти в одном направлении. Предположим теперь, что вначале все трое идут в одном направлении. Рассмотрим промежуток времени от a минут до 6 минут. В это время первые двое идут в направлении, противоположном первоначальному, а третий начинает идти в направлении, противоположном первоначальному, в $4 + b$ минут и заканчивает в $6 + b$ минут. Таким образом, если $a \leq 5$, то в промежуток времени от 5 минут до 6 минут все трое идут в одном направлении. Остаётся рассмотреть случай, когда $5 < a \leq 6$. Рассмотрим период с 9 минут до $6 + a$ минут. В это время первые двое идут в направлении, противоположном первоначальному, а третий тоже идёт в этом направлении, начиная с $8 + b$ минут и до $10 + b$ минут. При этом $6 + a > 10 + b$, так как $a > 5$ и $b < 1$. Поэтому с 9 минут до $10 + b$ минут все трое идут в одном направлении.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. «Ленинградские математические кружки», Киров, изд. АССА, 1994, 272с.
2. Федоров Р.М. и др. «Московские математические олимпиады 1993—2005 г.»,/ Под ред. В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2006. — 456 с.
3. Прасолов В.В. «Московские математические олимпиады. 1958-1967 гг.», М.: МЦНМО, 2013 — 328с.
4. Протасов В.Ю. «Максимумы и минимумы в геометрии», М.: МЦНМО, 2005. — 56 с.
5. Лурье М.В., Александров Б.И. Задачи на составление уравнений: Учеб. Руководство. — 3-е изд., перераб. — М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 96 с. — ISBN 5-02-014250-6.

Составитель: ассистент *М.В. Максименко*

Научный редактор: профессор *А.П. Господариков*

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ.....	15
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	16
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА	18
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ.....	22
ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.....	24
ПРОГРЕССИИ	25
ПЛАНИМЕТРИЯ	26
ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ И СКЛАДЫВАНИЕ.....	28
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	30
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	33