

Вариант 8

Задача 1

Пусть $A = 0,714285$, тогда $A \cdot 10^6 = 714285, (714285)$.

$$A \cdot 10^6 - A = 714285 \Rightarrow A = \frac{714285}{10^6 - 1}$$

Пусть $B = 1,571428$, тогда $B \cdot 10^6 = 1571428, (571428)$.

$$B \cdot 10^6 - B = 1571427 \Rightarrow B = \frac{1571427}{10^6 - 1}$$

$$A - B = \frac{714285 - 1571427}{10^6 - 1} = -\frac{857142}{999999}$$

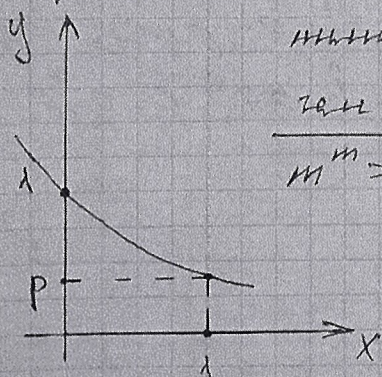
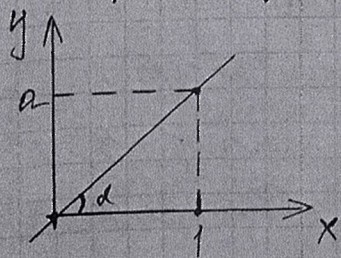
$$\text{Ответ: } -\frac{857142}{999999}$$

Задача 2

$$(\cos \alpha)^{\cos \alpha} + (\sin \beta)^{\sin \beta} > \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Пусть $k = \cos \alpha$, по условию $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow k \in (0; 1)$; $m = \sin \beta$, по условию $\beta \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow m \in (0; 1)$

$$k^k + m^m \quad \forall k, m$$

Рассмотрим функцию $y = p^x$, где $p \in (0; 1)$: $y = p^x$ убывает, тогда при $x \in (0; 1)$ она будет при-нимать значение, строго большее, чем p . Значит, $k^k > k \quad \forall k \in (0; 1)$ и $m^m > m \quad \forall m \in (0; 1)$.Следовательно, $k^k + m^m > k + m$ Рассмотрим теперь функцию $y = ax$, где $a \in (0; 1)$ на промежутке $(0; 1)$:тогда на промежутке $(0; 1)$ $y = ax$ принимает значение, строго меньшее, чем a и x при $\forall x \in (0; 1)$,

$$\text{т.к. } \lg a = a, \text{ то } \frac{y}{x} = a \Rightarrow y < x$$

и $y < a$ при $x \in (0; 1)$. Тогда $km < k$ и $km < m$.

(1)

Понуждается, пусть $k = \cos \alpha$ и $m = \sin \beta$, а лвае гаети н-ва ступого леньте каждого из гаети $\Rightarrow k^k + m^m > km \Rightarrow \cos^{\cos \alpha} + \sin^{\sin \beta} > \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \forall \alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Ответ: 2 т.г.

~~100~~

Задание 3

Пусть m - масса сухой крупы с влажностью;
 M - масса вареной крупы с влажностью.

$$\frac{M}{m} \rightarrow \min$$

Обозначим за p процент влаги в сухой крупе, действующий на 100, т.е. $p \in [0,12; 0,16]$; k - процент влаги, действующий на 100, в вареной крупе, т.е. $k \in [0,7; 0,77]$.

Масса сухой крупы равна $(1-p) \cdot m$, т.к. после варки масса сухой крупы не изменилась, то

$$(1-p) \cdot m = (1-k) \cdot M \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{1-p}{1-k} \rightarrow \min \Rightarrow$$

$$(1-k) \rightarrow \max, (1-p) \rightarrow \min \Rightarrow k = 0,7, p = 0,16$$

$$\frac{M}{m} = \frac{1-0,16}{1-0,7} = \frac{0,84}{0,3} = 2,8$$

~~100~~

Ответ: 2,8

Задание 4

Заметим, что если $n+2020$ и $n+2015$ при $n \in \mathbb{Z}$ - точные квадраты, то они отличаются друг от друга ровно на 5 единиц. Рассмотрим последовательность квадратов натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121... Заметим, что существует лишь 1 пара квадратов, отличающихся на 5: 4 и 9.

Вариант 8

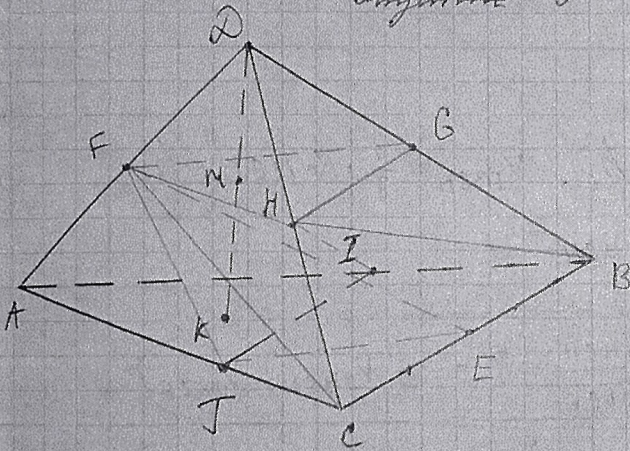
Проверим этот случай: $n = -2011 \Rightarrow n + 2020 = 9$,
 $n + 2015 = 4$ - верно, других подходящих случаев
 быть не могут. Осталось проверить, является ли
 квадратом число $2020 \cdot 2015 - 2011 = (2011 + 9) \times$
 $\times (2011 + 4) - 2011 = 2011^2 + 4 \cdot 2011 + 9 \cdot 2011 + 36 - 2011 =$
 $= 2011^2 + 12 \cdot 2011 + 36 = (2011 + 6)^2$ - верно.

Следовательно, это возможно при $n = -2011$ и ни
 при каких других n .

Ответ: $n = -2011$

~~150~~

Задача 5

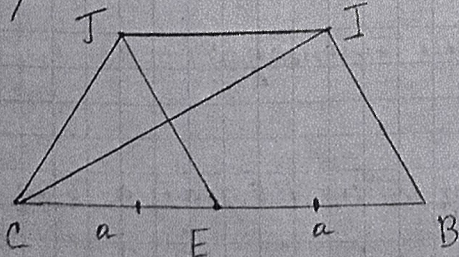


1) Заметим, что $(FHG) \parallel (ABC)$,
 значит, расстояние h
 от (FHG) до (ABC) есть
 расстояние от каже-
 дой из точек F, H, G до
 (ABC) .

Рассмотрим пирамиды

$TECF$ и $CVIH$:

высоты из F и H равны h (т.к. $(FHG) \parallel (ABC)$). Рассмот-
 рим основания.



$CE = EB = a$, h_1 - высота.

Заметим, что в $\triangle CTE$ и $\triangle CIV$ -
 общие высоты из точек T и I .

Тогда $S_{\triangle CTE} = \frac{1}{2} a \cdot h_1$; $S_{\triangle CIV} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h_1 = a \cdot h_1$

Значит, $S_{\triangle CIV} = 2 S_{\triangle CTE}$

Тогда $V_{TECF} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CTE} \cdot h$, $V_{CVIH} = \frac{1}{3} \cdot 2 S_{\triangle CTE} \cdot h \Rightarrow$

(3)

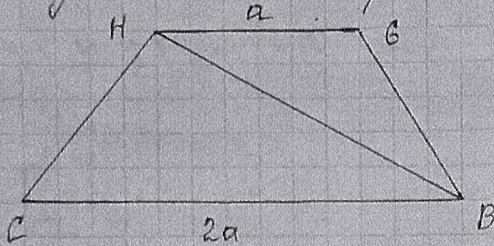
Вариант 8

$$\frac{V_{CBIH}}{V_{TECF}} = 2$$

Рассмотрим теперь $\triangle IBH$ и $\triangle BHI$:

Заметим, что у пирамид есть общая вершина $I \Rightarrow$ высоты в пирамидах, проведенные из I до (HGB) и (CHB) , равны, т.к. (HGB) совпадает с (CHB) .

Пусть высоты равны h_2 . Рассмотрим основание:



$HG = \frac{1}{2} BC$, т.к. HG - средняя линия

Высоты равны h_3

$$S_{\triangle CHB} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h_3 = a \cdot h_3$$

$$S_{\triangle HGB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_3$$

$$\text{Заметим, } 2S_{\triangle HGB} = S_{\triangle CHB}$$

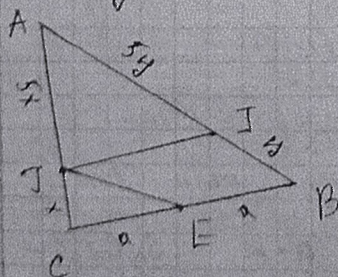
$$\text{Тогда } V_{CBIH} = \frac{1}{3} \cdot 2S_{\triangle HGB} \cdot h_2, \quad V_{IBCH} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle HGB} \cdot h_2$$

$$\frac{V_{CBIH}}{V_{IBCH}} = 2 \Rightarrow V_{CBIH} = 2V_{IBCH}$$

$$\frac{V_{CBIH}}{V_{TECF}} = \frac{2V_{IBCH}}{V_{TECF}} = 2 \Rightarrow \frac{V_{IBCH}}{V_{TECF}} = 1 \Rightarrow V_{IBCH} = V_{TECF}$$

2) В условии не сказано, от какой точки T делит AC в отношении 5:1, поэтому рассмотрим оба возможных случая:

а) пусть $AT = 5x$, $TC = x$



найдем отношение площадей

$\triangle CTE$ и $\triangle ABC$

Пусть высота из A на BC равна $6z$, тогда высота из T на $CE = 2$

$$S_{\triangle TEC} = \frac{1}{2} a \cdot 2, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 6z$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle TEC}} = \frac{6a \cdot 2}{\frac{1}{2} a \cdot 2} = 12$$

Вернемся к пирамиде $ABCD$: $\triangle FHC \sim \triangle ACB$ и (FHC)

4

Вариант 8

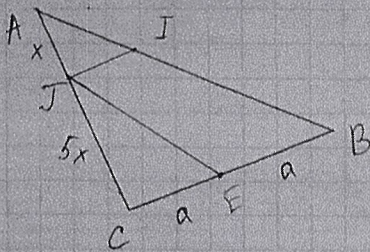
$$\text{и } (FHG) \parallel (ABC) \Rightarrow \frac{DM}{DM+MK} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2DM = DM+MK, \text{ где}$$

 $DM \perp (FHG) \text{ и } DK \perp (ABC), \text{ значит, } DM = MK$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DK = \frac{1}{3} \cdot 12 S_{\Delta JEC} \cdot 2MK = 8 S_{\Delta JEC} \cdot MK = 2020 \text{ см}^3$$

$$V_{JCEF} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta JEC} \cdot MK = \frac{2020}{24} \text{ см}^3 = \frac{1010}{12} \text{ см}^3 = \frac{505}{6} \text{ см}^3$$

б) пусть $AJ = x$, $JC = 5x$, по аналогии со случаем а):



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 6m = 6ma$$

$$S_{\Delta CJE} = \frac{1}{2} \cdot 5m \cdot a = \frac{5}{2} ma$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CJE}} = \frac{6ma \cdot 2}{5ma} = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot 2MK = 9,8 \cdot S_{\Delta CJE} \cdot 2MK = 1,6 S_{\Delta CJE} \cdot MK = 2020 \text{ см}^3$$

$$V_{JCEF} = \frac{1}{3} S_{\Delta JCE} \cdot MK = \frac{2020}{1,6 \cdot 3} = \frac{505}{1,2} \text{ см}^3 = \frac{2525}{6} \text{ см}^3$$

Ответ: 1) $\frac{V_{JCEF}}{V_{ABCD}} = 1$

2) $\frac{505}{6} \text{ см}^3$ (считано от вершины A)

$\frac{2525}{6} \text{ см}^3$ (считано от вершины C)

+ 156

Задача 6

Случай 1: параллельное соединение конденсаторов

$$C_{\text{общ}} = C_1 + C_2$$

натяжное сопротивление: $C_1 = C_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \Rightarrow C_{\text{общ1}} = \frac{2\epsilon \epsilon_0 S}{d}$

измененное сопротивление: $C_1 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d+a}$, $C_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d-a} \Rightarrow C_{\text{общ2}} =$

$$= \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d+a} + \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d-a} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S d - \epsilon \epsilon_0 S a + \epsilon \epsilon_0 S d + \epsilon \epsilon_0 S a}{d^2 - a^2} = \frac{2\epsilon \epsilon_0 S d}{d^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{C_{\text{общ1}}} = \frac{d}{2\epsilon \epsilon_0 S}; \quad \frac{1}{C_{\text{общ2}}} = \frac{d^2 - a^2}{2\epsilon \epsilon_0 S d} = \frac{d^2 - a^2}{2\epsilon \epsilon_0 S} - \frac{a^2}{2\epsilon \epsilon_0 S d} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_{\text{общ2}}} < \frac{1}{C_{\text{общ1}}} \Rightarrow C_{\text{общ1}} < C_{\text{общ2}} \Rightarrow \text{емкость увеличилась}$$

Случай 2: последовательное соединение конденсаторов

$$C_{\text{общ1}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{2d}{\epsilon \epsilon_0 S} - \text{натяжное сопротивление}$$

(5)

Вариант 8

$$L_1 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d+a}, \quad L_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d-a}, \quad L_{\text{общ2}} = \frac{d+a+d-a}{\epsilon \epsilon_0 S} = \frac{2d}{\epsilon \epsilon_0 S} \Rightarrow$$

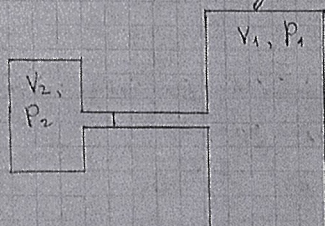
$$L_{\text{общ1}} = L_{\text{общ2}} \Rightarrow \text{ёмкость не изменится}$$

Ответ: при параллельном соединении ёмкость увеличится;

при последовательном соединении ёмкость не изменится

(X) 5

Задача 7



$$T_1 = 285 \text{ K}$$

$$P_1 = 10^5 \text{ Па}$$

$$P_1 V_1 = \delta R T_1 \Rightarrow \delta = \frac{P_1 V_1}{R T_1} - \text{мол. в газа в состоянии}$$

Найти T_1' газа в момент, когда в резервуаре 1 давление будет равно $P_1' = 800 \text{ мм рт. ст.}$

$$P_1' V_1 = \frac{P_1 V_1}{R T_1} \cdot R T_1' \Rightarrow P_1' = \frac{P_1}{T_1} \cdot T_1' \Rightarrow T_1' = \frac{P_1' \cdot T_1}{P_1}$$

$$T_1' = \frac{800 \cdot 285 \text{ K}}{760} = \frac{20 \cdot 285 \text{ K}}{19} = 300 \text{ K}$$

$$T_2 = 273 + 152 = 425 \text{ K}$$

Значит, при температуре T_1' газ перестанет быть газом -

явля 2-й резервуар

$$\text{Тем } T_2 = 425 \text{ K}$$

Задача 8

$$\vec{v}_1 = 6 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y - 2 \vec{e}_z, \quad m_1 = 1 \text{ кг}; \quad \vec{v}_2 = -4 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y + 8 \vec{e}_z,$$

$$m_2 = 1,5 \text{ кг}; \quad \vec{v}_2 \in \{-4; 4; 8\}, \quad \vec{v}_1 \in \{6; 4; -2\}$$

$$\text{ЗЦП: } m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$$

$$\text{ЗЦЗ: } \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}$$

$$m_1 \vec{v}_1 \in \{6; 4; -2\}, \quad m_2 \vec{v}_2 \in \{-6; 6; 12\}$$

$$(6) \quad |m_1 \vec{v}_1| = \sqrt{36 + 16 + 4} = \sqrt{56}, \quad |m_2 \vec{v}_2| = \sqrt{216}$$

$$m_1 \vec{v}_1 \cdot m_2 \vec{v}_2 = \sqrt{56} \cdot \sqrt{216} \cdot \cos \alpha = -24 + 16 - 16 = -24$$

$$\cos \alpha = -\frac{24}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{216}}$$

$$|(m_1 + m_2) \vec{u}| = \sqrt{56 + 216 - 48} = \sqrt{224}$$

Пусть $(m_1 + m_2) \vec{u}$ имеет координаты $\{x; y; z\}$

$$\begin{cases} 6 - 4 = x, \\ 4 - 6 = y, \\ -2 - 12 = z, \end{cases} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 224$$

$$\begin{cases} 6 - 4 = x, \\ 4 - 6 = y, \\ -2 - 12 = z, \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2) \vec{u} \in \{6 - 4; 4 - 6; -2 - 12\} \quad (m_1 + m_2) \vec{u} \in \{2; -2; -14\}$$

$$m_1 + m_2 = 2,5 \Rightarrow \vec{u} \in \{0,8; -0,8; -5,6\}$$

$$\text{Ответ: } \vec{u} = 0,8 \vec{e}_x + 3,2 \vec{e}_y - 4 \vec{e}_z$$

Задача 9

(X) 25

(6)