

Вариант 8.

| стр 1

Задача 1.

Представим $0,714285$ как сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 0,714285$ и знаменателем $q = 10^{-6}$. Тогда $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0,714285}{1-10^{-6}} = \frac{0,714285}{0,999999} = \frac{714285}{999999}$

Число $1,571428 = 1 + 0,571428$

Аналогично $b'_1 = 0,571428$, $q' = 10^{-6}$, $S' = \frac{0,571428}{1-10^{-6}} = \frac{0,571428}{0,999999} = \frac{571428}{999999}$

Запишем разность выражений:

$$\begin{aligned} 0,714285 - 1,571428 &= 0,714285 - 1 - 0,571428 = \\ &= -(1 - (0,714285 - 0,571428)) = -(1 - (\frac{714285}{999999} - \frac{571428}{999999})) = \\ &= -(1 - \frac{142857}{999999}) = -(\frac{999999}{999999} - \frac{142857}{999999}) = -\frac{857142}{999999} = -0,857142. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{857142}{999999}$ или $-0,857142$.

Задача 2.

Т.к. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, $\cos \alpha > 0$ (угол в I четверти);

$\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$, $\sin \beta > 0$ (угол в I четверти)

Запишем неравенство:

$$(\cos \alpha)^{\cos \alpha} + (\sin \beta)^{\sin \beta} > \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$(\cos \alpha)^{\cos \alpha} - \cos \alpha \cdot \sin \beta + (\sin \beta)^{\sin \beta} > 0$$

$$(\cos \alpha)^{\cos \alpha} - 0,5 \cos \alpha \sin \beta + (\sin \beta)^{\sin \beta} - 0,5 \cos \alpha \sin \beta > 0$$

$$\cos \alpha \left((\cos \alpha)^{\cos \alpha - 1} - \frac{\sin \beta}{2} \right) + \sin \beta \left((\sin \beta)^{\sin \beta - 1} - \frac{\cos \alpha}{2} \right) > 0$$

1) Рассмотрим число $(\cos \alpha)^{\cos \alpha - 1}$.

Т.к. $0 < \cos \alpha < 1$, можно заменить $\cos \alpha$ на $\frac{1}{a}$, где a — некое число ($a > 1$)

$$\text{Препишем } \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-(1-\frac{1}{a})} = a^{1-\frac{1}{a}} = a^{\frac{a-1}{a}}$$

$$\text{Т.к. } a > 1, a-1 > 0 \rightarrow \frac{a-1}{a} > 0 \rightarrow a^{\frac{a-1}{a}} > 1 \Rightarrow (\cos \alpha)^{\cos \alpha - 1} > 1$$

Аналогично ($0 < \sin \beta < 1$ так же, как и $\cos \alpha$) $(\sin \beta)^{\sin \beta - 1} > 1$

2) $\sin \beta < 1$ и $\cos \alpha < 1$, значит, $\frac{\sin \beta}{2} < 1$ и $\frac{\cos \alpha}{2} < 1$

3) Из (1) и (2) $\rightarrow$

$$\rightarrow (\cos \alpha)^{\cos \alpha - 1} - \frac{\sin \beta}{2} > 0 \quad \text{и} \quad (\sin \beta)^{\sin \beta - 1} - \frac{\cos \alpha}{2} > 0$$

$$4) \cos \alpha > 0 \rightarrow \cos \alpha \left((\cos \alpha)^{\cos \alpha - 1} - \frac{\sin \beta}{2} \right) > 0 \quad \text{и}$$

$$\sin \beta > 0 \rightarrow \sin \beta \left((\sin \beta)^{\sin \beta - 1} - \frac{\cos \alpha}{2} \right) > 0$$

5) Из всего вышесказанного следует, что

$$\cos \alpha \left((\cos \alpha)^{\cos \alpha - 1} - \frac{\sin \beta}{2} \right) + \sin \beta \left((\sin \beta)^{\sin \beta - 1} - \frac{\cos \alpha}{2} \right) > 0$$

то и требовалось доказать.

Задача 3.

Увеличение массы крупиц при варке вследствие поглощения влаги минимально, когда изначальное ~~количество~~ ^{влага} крупиц пришло минимальное количество ~~влага~~. Это выполняется при максимальной сырости в начале (16%) и минимальной сырости после варки (70%).

Пусть масса крупиц до варки - x , тогда в ней $0,16x$ влаги и $0,84x$ сухой ~~сырой~~ сухой крупиц.

Пусть масса крупиц после варки - y , тогда в ней $0,7y$ влаги и $0,3y$ сухой крупиц.

Т.к. масса сухой крупиц неизменна, $0,84x = 0,3y \rightarrow y = \frac{0,84x}{0,3} = 2,8x$,

тогда масса влаги после варки равна $0,7y = 0,7 \cdot 2,8x = 1,96x$ и

масса крупиц после варки равна $0,84x + 1,96x = 2,8x$.

Минимальное увеличение массы крупиц составит $\frac{2,8x}{x} = 2,8$ раз.

Ответ: 2,8.

Задача 4.

Понятно, такое число есть и есть, тогда числа $(n+2020)$, $(n+2015)$ и $(n+2020-2015)$ примут вид последовательности $a_k = k^2$

Найдем разность между двумя членами последовательности

$$a_k - a_{k-m} = k^2 - (k-m)^2 = 2mk - m^2$$

($k > m, m, k \in \mathbb{Z}$)

Очевидно, что разность между $(n+2020)$ и $(n+2015)$ равна $n+2020 - n - 2015 = 5$ знаем $2mk - m^2 = 5$ единственным решением (уравнение ограничено) является пара $k=3, m=1 \rightarrow n+2020=9, n+2015=4$

Знаю: $n = -2011$, 50%

$$n + 2020 \cdot 2015 = 4070300 - 2011 = 4068289$$

4068289 является значением числа 2017.

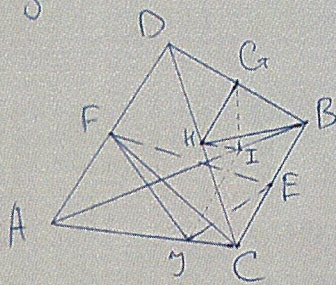
$$\begin{array}{r} \times 2017 \\ \times 2017 \\ \hline 14119 \\ + 2017 \\ \hline 4034 \\ \hline 4068289 \end{array}$$

стр 3

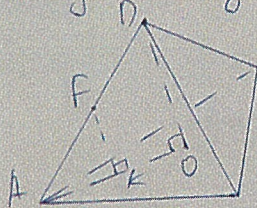
$$\begin{array}{r} \times 2015 \\ \times 2020 \\ \hline 4030 \\ + 4030 \\ \hline 4070300 \\ - 2011 \\ \hline 4068289 \end{array}$$

Свойственно, при $n = -2011$ ($n+2020$), ($n+2015$), ($n+2020 \cdot 2015$) - то же значение.Ответ: -2011 .

Задача 5.

1) Пусть сторона тетраэдра равна a 2) $HI \parallel BC$, AC и AB служат направляющими
прямые $\rightarrow$ по теореме Фалеса

$$\frac{HC}{AC} = \frac{IB}{AB}, \quad \frac{HC}{a} = \frac{IB}{a} \Rightarrow HC = IB$$

Пусть $HC = IB = x$ 3) Опустим из D высоту DO (ABC) и из F на (ABC)
 $FK \perp (ABC) \Rightarrow FK \parallel DO \Rightarrow \angle AFK = \angle ADO$ (одн. кр. пер. пер.,
 $DO \perp (ABC)$ AD - сск.)

$$\left. \begin{array}{l} \angle AFK = \angle ADO \\ \angle AKF = \angle AOD = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AFK \sim \triangle ADO \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{FK}{DO}, \quad \frac{1}{2} = \frac{FK}{DO}$$

$$\Rightarrow FK = \frac{DO}{2}$$

$$4) AO - \text{высота } \triangle ABC \Rightarrow AO = \frac{AB}{2 \cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{из } \triangle AOD \text{ по теореме Пифагора})$$

$$FK = \frac{DO}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

5) $\triangle JCE \in (ABC) \Rightarrow FK \perp \triangle JCE \Rightarrow FK$ - высота тетраэдра $FJCE$
 $FK \perp (ABC)$

$$6) V_{FJCE} = \frac{1}{3} h_{FJCE} \cdot S_{\triangle JCE} = \frac{1}{3} \cdot FK \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot JC \cdot EC \cdot \sin 60^\circ \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{a^3 \sqrt{2}}{24 \sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$$

- 7) Аналогично для высоты из точки H на (ADB)
(из середины стороны на противоположную грань)

$$h_H = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

- 8) $h_H \perp (ADB) \Rightarrow h_H$ - высота тетраэдра BHI G

$$V_{BHI G} = \frac{1}{3} h_H S_{\triangle BIG} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} BG \cdot BI \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{BHI G} = V_{FGCE} \Rightarrow \frac{V_{BHI G}}{V_{FGCE}} = \frac{1}{1}$$

- 9) ~~так~~ Выразим объем тетраэдра ABCD через a:

$$h = a \sqrt{\frac{2}{3}}, S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

- 10) Т.к. $AG:GC = 5:1$, $GC = \frac{1}{6} AC = \frac{a}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow$

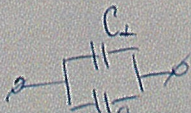
$$\Rightarrow V_{FGCE} = V_{BHI G} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{288}$$

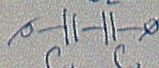
11) $\frac{V_{ABCD}}{V_{FGCE}} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}}{\frac{a^3 \sqrt{2}}{288}} = 24 \Rightarrow V_{FGCE} = V_{BHI G} = \frac{V_{ABCD}}{24} =$

$$= \frac{2080}{24} = \frac{505}{6} (\text{см}^3)$$

Ответ: 1) $V_{BHI G} : V_{FGCE} = 1:1$, 2) $V_{BHI G} = V_{FGCE} = \frac{505}{6} \text{ см}^3$

6.

Параллельное соединение  (1)

Последовательное соединение  (2)

1) $C_{\Sigma 1} = C_1 + C_2 = 2C = \frac{2SE\epsilon_0}{d}$

$$C_{\Sigma 2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C^2}{2} = \frac{SE\epsilon_0}{2d}$$

2) $C = \frac{SE\epsilon_0}{d}$, пусть $C_1' = \frac{SE\epsilon_0}{(d-a)}$, $C_2' = \frac{SE\epsilon_0}{(d-a)}$

5. ^{в и 1} Рассмотрен газетный журнал

$$3) C_{\Sigma 1}' = \frac{S\epsilon\epsilon_0}{d-a} + \frac{S\epsilon\epsilon_0}{d+a} = S\epsilon\epsilon_0 \frac{(d+a+d-a)}{(d-a)(d+a)} = \frac{2d}{d^2-a^2} \cdot S\epsilon\epsilon_0$$

стр 5

Изменение емкости: $\frac{C_{\Sigma 1}'}{C_{\Sigma 1}} = \frac{2d\epsilon\epsilon_0}{d^2-a^2} \cdot \frac{d}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{d^2}{d^2-a^2}$

т.к. $a > 0$, $\frac{d^2}{d^2-a^2} > 1 \Rightarrow C_{\Sigma 1}' > C_{\Sigma 1}$ (увеличилось)

$$4) C_{\Sigma 2}' = \frac{\frac{S\epsilon\epsilon_0}{d-a} \cdot \frac{S\epsilon\epsilon_0}{d+a}}{\frac{S\epsilon\epsilon_0}{d-a} + \frac{S\epsilon\epsilon_0}{d+a}} = \frac{(S\epsilon\epsilon_0)^2 \cdot (d-a)(d+a)}{(d-a)(d+a) \cdot S\epsilon\epsilon_0(d+a+d-a)} = \frac{S\epsilon\epsilon_0}{2d}$$

$$\frac{C_{\Sigma 2}'}{C_{\Sigma 2}} = \frac{\frac{S\epsilon\epsilon_0}{2d}}{\frac{S\epsilon\epsilon_0}{2d}} = \frac{1}{1} \Rightarrow \text{емкость не изменилась.}$$

Ответ: при параллельном соединении ~~у~~ емкость увеличилась, при последовательном - не изменилась.

8.

По закону сохранения импульса $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}'$

Найдем координаты составляющую скорости по OX:

$$\vec{v}_x = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot 6\vec{e}_x + m_2 \cdot (-4\vec{e}_x)}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_x = \frac{1 \cdot 6\vec{e}_x - 1.5 \cdot 4\vec{e}_x}{1 + 1.5} = 0 \cdot \vec{e}_x$$

по OY: $\vec{v}_y = \frac{1 \cdot (4\vec{e}_y) + 1.5 \cdot (4\vec{e}_y)}{1 + 1.5} = 4\vec{e}_y$

по OZ: $\vec{v}_z = \frac{1 \cdot (-2\vec{e}_z) + 1.5 \cdot (8\vec{e}_z)}{1 + 1.5} = 4\vec{e}_z$

Значит $\vec{v}' = 0 \cdot \vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$

Ответ: $\vec{v}' = 0 \cdot \vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$.

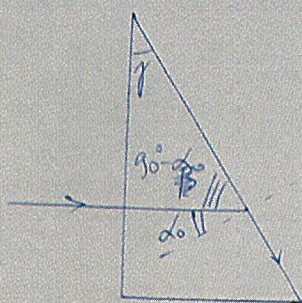
10.

$$n \pm 1 + \frac{a}{\lambda} = \frac{\lambda + a}{\lambda}$$

Предельный угол полного отражения $\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{\lambda}{a+\lambda}\right)$

Функция $\alpha_0(\lambda)$ возрастает при всех $\lambda > 0$

стр 6



$$\text{Знаем, } \gamma \in \left(\arcsin\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a}\right); \arcsin\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + a}\right) \right)$$

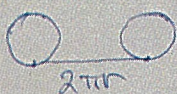
$$\gamma \in \left(\arcsin\left(\frac{600}{600+600}\right); \arcsin\left(\frac{750}{750+600}\right) \right)$$

$$\gamma \in \left(\frac{\pi}{6}; \arcsin\left(\frac{5}{9}\right) \right).$$

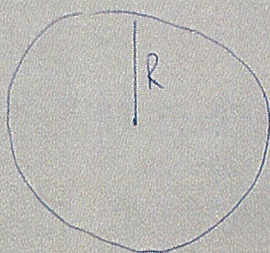
$$\text{Отвеч: } \gamma \in \left(\frac{\pi}{6}; \arcsin\left(\frac{5}{9}\right) \right).$$

(15)

9.



Точка на конесе с угловой скоростью ω ,
 проходя полной круг (2π) имеет
 скорость $v = 2\pi r \omega$



Найдем период по окружности с
 радиусом R : $T = \frac{2\pi R}{2\pi r \omega} = \frac{R}{r \omega}$

Угловая скорость вращения равна

$$\omega_B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi r \omega}{R}$$

Угловая ускорение равно $\epsilon_B = \frac{\omega_B}{T} = \frac{2\pi r^2 \omega^2}{R^2}$

$$\text{Отвеч: } \epsilon_B = \frac{2\pi r^2 \omega^2}{R^2}.$$

(3)

10 - не посвящен к решению.