

Естественные науки

Вариант 8

N4

Предположим числа $n+2020$, $n+2015$, $n+2020 \cdot 2015$ являются точными квадратами чисел q , p и m соответственно; $q, m, p \in \mathbb{N}$. Тогда справедлива система:

$$\begin{cases} n+2020 = q^2 & (1) \\ n+2015 = p^2 & (2) \\ n+2020 \cdot 2015 = m^2 & (3) \end{cases}$$

Вычтем из уравнения (2) уравнение (1):

$$n+2015 - n-2020 = p^2 - q^2$$

$$-5 = p^2 - q^2$$

$$5 = q^2 - p^2$$

$$5 = (q+p)(q-p), \quad 5 - \text{простое число}, \quad 5 = 5 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } q, p \in \mathbb{N}, \text{ то } \begin{cases} q+p=5 \\ q-p=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=5-p \\ 5-2p=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=3 \\ p=2 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } n = q^2 - 2020 = p^2 - 2015 = 9 - 2020 = -2011.$$

Это единственное решение для уравнений (1) и (2) $\Rightarrow$ оно должно подходить для уравнения (3).

Проверим:

$$m^2 = n + 2020 \cdot 2015 = 4070300 - 2011 = 4068289.$$

Осталось лишь найти подходящее m .

Заметим, что на 9 могут оканчиваться квадраты чисел, последний цифра которых либо 3, либо 7 ($3 \times 3 = 9$; $7 \times 7 = 49$).

Также заметим, что

$$4060225 < 4068289 < 4080400$$

$$\stackrel{m}{\Rightarrow} 2015^2 < 4068289 < 2020^2$$

Значит число ~~4068289~~ m лежит между 2015 и 2020 и оканчивается на 7 или 3 $\Rightarrow m=2017$.

Проверим: $m^2 = 2017^2 = 4068289$ - оно подходит.

Ответ: ~~$n=2014$~~

$$n = -2011$$

$$n+2020 = 9 = 3^2$$

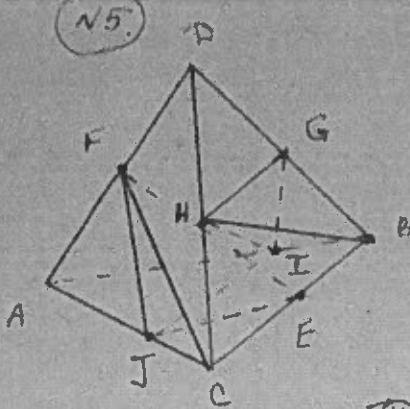
$$n+2015 = 4 = 2^2$$

$$n+2020 \cdot 2015 = 2017^2$$

158

N5.

Вариант 8



1. Прямая $FI \parallel CB$ по условию
Тогда по теореме Фалеса:

$$\frac{FC}{AC} = \frac{FB}{AB} = k$$

Пусть h_D и h_A - высоты
тетраэдра $ABCD$ из вершин D и A
соответственно.

Тогда объем $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} h_D \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} h_A \cdot S_{DBC}$

Найдем объем тетраэдра $CJFE$:

$$V_{CJFE} = \frac{1}{3} h_F \cdot S_{JCE}, \text{ где } h_F - \text{высота тетраэдра из вершины } F.$$

П.к. F - середина AD , то $\frac{h_F}{h_D} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_F = \frac{h_D}{2}$

Пусть h_a - высота ABC из вершины A , h_J - высота $\triangle JCE$ из
вершины J .

$$\frac{h_J}{h_a} = \frac{JC}{AC} = k \Rightarrow h_J = k h_a$$

$$S_{JCE} = \frac{h_J \cdot CE}{2} = \frac{k \cdot h_a \cdot \frac{BC}{2}}{2} = \frac{k}{2} \cdot \frac{h_a \cdot BC}{2} = \frac{k}{2} \cdot S_{ABC}$$

$$V_{CJFE} = \frac{1}{3} h_F \cdot S_{JCE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_D}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot S_{ABC} = \frac{k}{4} \cdot \frac{1}{3} h_D \cdot S_{ABC} = \frac{k}{4} V_{ABCD}$$

Найдем объем тетраэдра $BIHG$:

$$V_{BIHG} = \frac{1}{3} \cdot h_I \cdot S_{HGB}, \text{ где } h_I - \text{высота тетраэдра } BIHG.$$

$$\frac{h_I}{h_A} = \frac{IB}{AB} = k \Rightarrow h_I = k \cdot h_A$$

$$S_{HGB} = \frac{HG \cdot \frac{h_a}{2}}{2} = \frac{BC \cdot h_a}{4 \cdot 2} = \frac{S_{DBC}}{4}$$

h_a - высота $\triangle DBC$

HG - средняя линия

$$HG = \frac{BC}{2}$$

$$V_{BIHG} = \frac{1}{3} \cdot k \cdot h_A \cdot \frac{S_{DBC}}{4} = \frac{k}{4} \cdot \frac{1}{3} h_A \cdot S_{DBC} = \frac{k}{4} V_{ABCD}$$

$$\frac{V_{BIHG}}{V_{CJFE}} = \frac{\frac{k}{4} V_{ABCD}}{\frac{k}{4} V_{ABCD}} = 1$$

Ответ:

Объемы относятся 1:1.

$$2. V_{BIHG} = V_{CJFE} = \frac{k}{4} V_{ABCD}$$

По условию $\frac{AI}{IB} = \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{IB}{AB} = \frac{1}{6} = k \Rightarrow k = \frac{1}{6}$

Тогда: $V_{BIHG} = V_{CJFE} = \frac{1}{6 \cdot 4} \cdot 2020 \text{ см}^3 = \frac{505}{6} \text{ см}^3$

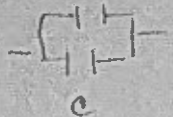
Ответ: объем каждого из тетраэдров равен $\frac{505}{6} \text{ см}^3$.

N6

Случай 1.

Вариант 8

Конденсатор соединен параллельно

Пусть емкость конденсатора $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$,где S - площадь пластин, d - расстояние между ними.Тогда общая емкость $C_{02} = C + C = 2C =$

$$= \frac{2\epsilon \epsilon_0 S}{d}$$

После сдвига пластин одного конденсатора и раздвига другого их емкость будет равна:

$$C_1 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d-a}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d+a}$$

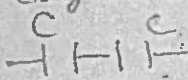
$$\text{Тогда общая емкость } C'_{02} = C_1 + C_2 = \epsilon \epsilon_0 S \left(\frac{1}{d-a} + \frac{1}{d+a} \right) =$$

$$= 2\epsilon \epsilon_0 S \left(\frac{d-a+d+a}{d^2-a^2} \right) = 2\epsilon \epsilon_0 S \cdot \left(\frac{d}{d^2-a^2} \right)$$

$$\text{Ср } \frac{C'_{02}}{C_{02}} = \frac{2\epsilon \epsilon_0 S \left(\frac{d}{d^2-a^2} \right) \cdot d}{2\epsilon \epsilon_0 S} = \frac{d^2}{d^2-a^2} > 1, \text{ т.к. } d^2 > d^2-a^2 \Rightarrow$$

 $\Rightarrow$ общая емкость увеличится.

Случай 2



$$\text{Общая емкость } C_{02} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{C} \right)^{-1} = \frac{C}{2} =$$

$$= \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{2d}$$

Емкость конденсаторов после сдвига и раздвига пластин равна:

$$C_1 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d-a}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d+a}$$

$$\text{Тогда общая емкость } C'_{02} = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right)^{-1} = \left(\frac{d+a}{\epsilon \epsilon_0 S} + \frac{d-a}{\epsilon \epsilon_0 S} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{d+a+d-a}{\epsilon \epsilon_0 S} \right)^{-1} = \left(\frac{2d}{\epsilon \epsilon_0 S} \right)^{-1} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{2d} \Rightarrow \text{общая емкость}$$

не изменилась.

Ответ: в случае 1 емкость увеличится, в случае 2 не изменится.

N8 Импульс первой частицы: $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$, второй частицы: $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$; импульс после столкновения: $\vec{p}_3 = (m_1 + m_2) \vec{v}_3$

По закону сохранения импульса: $\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$$(m_1 + m_2) \vec{v}_3 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_3 = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{1(6\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) + 1,5(-4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 8\vec{e}_z)}{2,5} = \frac{6\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 2\vec{e}_z - 6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 12\vec{e}_z}{2,5} =$$

страница 3

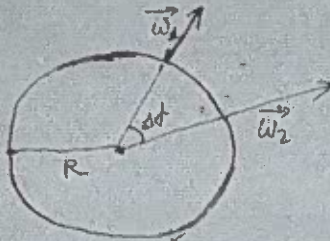
Вариант 8

$$= \frac{10\vec{e}_y + 10\vec{e}_z}{2,5} = 4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

Ответ: $\vec{v}_3 = 4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$

10

N9



На рисунке вид сверху на арену. За время $\Delta t \rightarrow 0$, вектор угловой скорости колеса измещается от $\vec{\omega}_1$ до $\vec{\omega}_2$; $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}_2| = \omega$,

направление вектора $\vec{\omega}_1$ измещается на

угол $\Delta\varphi$, при $\Delta t \rightarrow 0$; но $\Delta\varphi \neq 0$,

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega} (1), \text{ но также } \Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R} (2), \text{ где } \Delta S - \text{перемещение}$$

$$\Delta S = \omega R \Delta t \text{ подставим в (2)}: \Delta\varphi = \frac{\omega \Delta t R}{R} = \omega \Delta t,$$

ω угловая скорость центра колеса, пусть ξ - угловое ускорение колеса. $\xi = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Приравняем (1) и (2): $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta S}{R} = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \omega \omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \xi = \omega^2 (5)$$

При повороте колеса точка касания за Δt пройдет по арене ~~$\xi \Delta t$~~ , и по колесу $r \omega \Delta t \Rightarrow r \omega \Delta t = R \omega \Delta t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = \frac{r \omega}{R} \text{ (подставим в (5))}: \xi = \omega^2 = \omega \cdot \frac{r \omega}{R} = \omega^2 \cdot \frac{r}{R}$$

Ответ: $\xi = \omega^2 \frac{r}{R}$

13

N1 Переведем градусы в десятичные

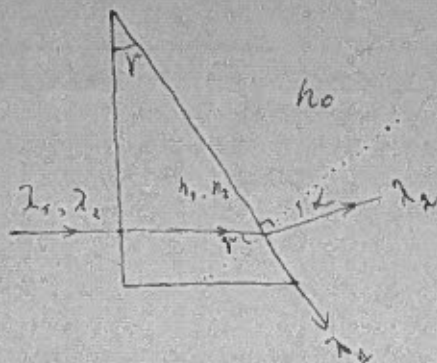
$$\begin{aligned} 0,714285 - 1, (571428) &= \frac{714285}{999999} - 1 = \frac{571428}{999999} = \\ &= \frac{5291 \cdot 5 \cdot 24}{5291 \cdot 7 \cdot 24} - 1 = \frac{5291 \cdot 24 \cdot 4}{5291 \cdot 24 \cdot 7} = \frac{5}{7} - 1 = \frac{1}{7} - 1 = -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{6}{7}$

35

N10

Вариант 8



Чтобы макс. прайзми,
путь, чтобы луч,
содержащий λ_2 совершил
полное внутреннее отражение,
а луч, содержащий λ_2 преломился
и вышел. γ - угол призма,

Запишем закон Снеллиуса для луча λ_2 :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_0} \quad ; \quad n_2 = 1 + \frac{a}{\lambda_2} = 1 + \frac{6 \cdot 10^{-7}}{750 \cdot 10^{-9}} = 1 + \frac{4}{5} = 1,8$$

$n_0 = 1$

$$\sin \alpha = 1,8 \sin \beta, \text{ чтобы угол вышел } \sin \alpha < 1.$$

$$1,8 \sin \beta < 1$$

$$\sin \beta < \frac{1}{1,8}$$

$$\sin \beta < \frac{5}{9} \Rightarrow \beta < \arcsin\left(\frac{5}{9}\right)$$

Чтобы ~~луч~~ луч, содержащий компонент λ_1 совершил
полное внутреннее отражение

$$\beta \geq \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\right) \quad ; \quad n_1 = 1 + \frac{a}{\lambda_1} = 1 + \frac{6 \cdot 10^{-7}}{600 \cdot 10^{-9}} = 1 + 1 = 2$$

$$\beta \geq \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

~~сидит~~

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \leq \beta < \arcsin\left(\frac{5}{9}\right)$$

Ответ: при $30^\circ \leq \beta < \arcsin\left(\frac{5}{9}\right)$

15