

Вариант 8

$$\textcircled{N1} \quad 0, (714285) - 1, (571428) = - \left(\underbrace{1, (571428)}_{\text{б.ч.г.г.}} - \underbrace{0, (714285)}_{\text{б.ч.г.г.}} \right) =$$

$$= - 0, (857143)$$

$$\begin{array}{r} 10 \cdot 10 \cdot 10 \\ 1, (571428) \\ - 0, (714285) \\ \hline 0, (857143) \end{array}$$

$$\text{Отв: } - 0, (857143)$$

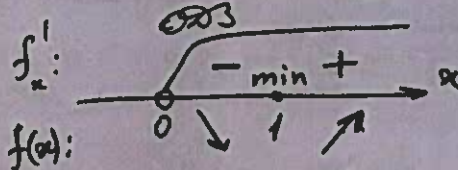
$$\textcircled{N2} \quad \text{Д-мб: } (\cos \alpha)^{\cos \alpha} + (\sin \beta)^{\sin \beta} > \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \forall \alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2})$$

Д-во:

П.к. $\alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2})$, то $\cos \alpha, \sin \beta \in (0; 1)$

$$\star f(x) = x^x$$

$$f'_x = \underbrace{x \cdot x^{x-1}}_{\text{от степенной функции}} \cdot \underbrace{x^x \ln x}_{\text{от показательной функции}} = x^{2x} \ln x = \underbrace{(x^x)^2}_{>0} \ln x$$



отп. знак
производной

П.е. $f(x) \geq f(1) = 1^1 = 1$, т.к. здесь $f(1)$ - наим. знач.

$\cos \alpha, \sin \beta \in (0; 1)$, поэтому

$$(\cos \alpha)^{\cos \alpha} > 1^1 = 1$$

$$(\sin \beta)^{\sin \beta} > 1^1 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{сложим}} (\cos \alpha)^{\cos \alpha} + (\sin \beta)^{\sin \beta} > 2$$

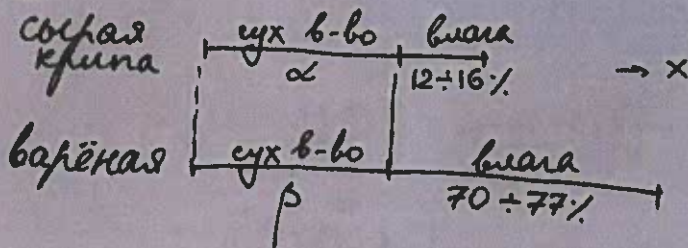
В то же время $\frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{0} < 1$, т.е. $0 < \cos \alpha \cdot \sin \beta < 1 < 2$

Получим $\begin{cases} 0 < \cos \alpha \cdot \sin \beta < 1 \\ 1 < 2 \\ 2 < (\cos \alpha)^{\cos \alpha} + (\sin \beta)^{\sin \beta} \end{cases} \Rightarrow (\cos \alpha)^{\cos \alpha} + (\sin \beta)^{\sin \beta} > \cos \alpha \cdot \sin \beta$

т.м.г.

смп 1

N3



] масса сырой крупы x ,
а масса варёной крупы y

] α - доля сухого вещества в сырой крупе,
 β - // - в варёной

Отметим, что при варке масса сухого вещества не изменяется: $\alpha x = \beta y$

В задаче требуется найти наименьшее значение $\frac{y}{x} = \frac{\alpha}{\beta}$. Чтобы оно было наим., нужно взять $\alpha_{\text{наим.}}$ и $\beta_{\text{наиб.}}$

Влага в сырой: $0,12 \div 0,16$, зн., $\alpha \in (0,84; 0,88)$

Влага в варёной: $0,7 \div 0,77$, зн., $\beta \in (0,23; 0,3)$

$\alpha_{\text{наим.}} = 0,84$ и $\beta_{\text{наиб.}} = 0,3$

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{наим.}} = \frac{\alpha_{\text{наим.}}}{\beta_{\text{наиб.}}} = \frac{0,84}{0,3} = 2,8 \quad \text{Отв: в } 2,8 \text{ раз.}$$

N4) ? $n \in \mathbb{Z}$: $n+2020, n+2015, n+2020 \cdot 2015$ - точные квадраты

Решение:

разница между $(n+2020)$ и $(n+2015)$ всего 5 - малое число, скорее всего, это квадраты соседних чисел.

$$a+1; a \quad (a+1)^2 - a^2 = 2a+1 \quad] 2a+1=5, \quad \boxed{a=2}$$

т.е. $n+2020$ и $n+2015$ - квадраты 3 и 2 соотв., зн., $n = -2011$

Проверим, является ли $-2011 + 2020 \cdot 2015$ квадратом:

$$\begin{array}{r} 2020 \\ \times 2015 \\ \hline 10100 \\ 40400 \\ \hline 4070300 \end{array}$$

$$4070300 - 2011 = 4068289 > 4000000 = 2000^2$$

попало
на 17^2

$$\begin{array}{r} \times 2017 \\ 2017 \\ \hline 14119 \\ + 2017 \\ \hline 4034 \\ \hline 4068289 \end{array} !$$

Итак, $n = -2011$:

$$n+2020 = 3^2$$

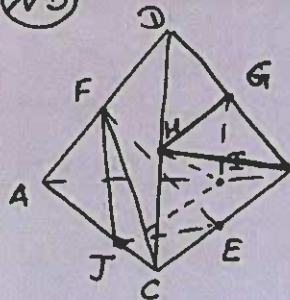
$$n+2015 = 2^2$$

$$n+2015 \cdot 2020 = 2017^2$$

Отв: $n = -2011$

стр 2

V5



Дано: $ABCD$ - тетраэдр, E - сф. BC , $I \parallel BC$
 F - сф. AD , G - сф. BD и $AJ:JC = 5:1$
 H - сф. CD

$$V_{ABCD} = 2020 \text{ см}^3$$

$$1) V_{CTFE} : V_{BIHG} = ?$$

$$2) V_{CTFE}, V_{BIHG} = ?$$

Решение:

1) F и H - сф. AD и DC , зн, FH - сф. линия (по огу), тогда

$FH \parallel AC$ (св-во сф. линии), зн, $(FH) \parallel (ABC)$, т.к. $AC \subset (ABC)$

$P(F; (ABC)) = P(H; (ABC)) = P((FH); (ABC))$ - высоты в тетраэдрах

$FJCE$ и $HJCE$,

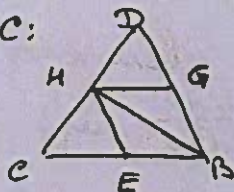
зн, $V_{FJCE} = V_{HJCE}$ ($V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S$, S_{JCE} - общ, $P(F; (ABC)) = P(H; (ABC))$)

Тогда $V_{CTFE} : V_{BIHG} = V_{HJCE} : V_{AIHG}$

В тетраэдрах $HJCE$ и $BIHG$ высоты равны, т.к. по усл $JI \parallel BC$,
 (к п. (BDC))

то $(JI) \parallel (BDC)$, а зн, $P(J; (BDC)) = P(I; (BDC))$

В $\triangle BDC$:



H и G - сф. CD и DB , HG - сф. линия, $HG \parallel BC$,

$P(H; BC) = P(G; BC)$, $HG = \frac{1}{2} BC$ (сф. лин.)

$CE = \frac{1}{2} BC$ (E - сф. BC)

$$S_{HCE} = \frac{1}{2} \cdot P(H; (BC)) \cdot CE$$

$$S_{HGB} = \frac{1}{2} \cdot P(G; (BC)) \cdot BG \Rightarrow S_{HCE} = S_{HGB}$$

Итак, $\frac{V_{CTFE}}{V_{BIHG}} = \frac{V_{HJCE}}{V_{AIHG}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot P(J; (BDC)) \cdot S_{HCE}}{\frac{1}{3} \cdot P(I; (BDC)) \cdot S_{HGB}} = 1:1$, одинаковы

$$2) V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot P(A; (BCD)) \cdot S_{BCD}$$

$$V_{HJCE} = \frac{1}{3} \cdot P(J; (BCD)) \cdot S_{HCE}$$

$$\frac{V_{HJCE}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{24}$$

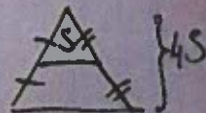
$$V_{CTFE} = V_{BIHG} = V_{HJCE} = \frac{V_{ABCD}}{24} = \frac{2020 \text{ см}^3}{24} = \frac{505}{6} \text{ см}^3 = 84 \frac{1}{6} \text{ см}^3$$

По Т Палеса

$$\frac{P(A; (BCD))}{P(J; (BCD))} = \frac{AC}{JC} = \frac{AJ+JC}{JC} = 6$$

По св-ву сф. линии HE :

$$4S_{HCE} = S_{BCD}$$



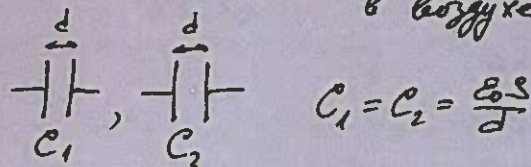
Ответ: $V_{CTFE} : V_{BIHG} = 1:1$, $2) V_{CTFE} = V_{BIHG} = \frac{505}{6} \text{ см}^3 = 84 \frac{1}{6} \text{ см}^3$

смп3

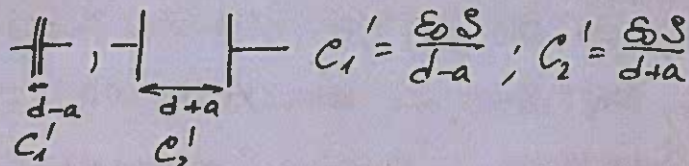
N6 Дано:

Решение:

Ф-ла ёмкости конденсатора $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$
 в воздухе $\epsilon = 1$, т.е. $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

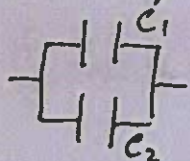


$$C_1 = C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



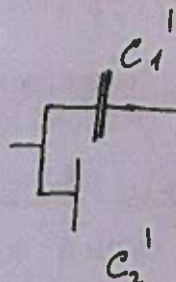
$$C_1' = \frac{\epsilon_0 S}{d-a}; C_2' = \frac{\epsilon_0 S}{d+a}$$

I сл. (параллельно)



$$C_{\text{экв}} = C_1 + C_2 = \frac{2\epsilon_0 S}{d}$$

(II сл.)



$$C_{\text{экв}}' = C_1' + C_2' = \frac{\epsilon_0 S}{d-a} + \frac{\epsilon_0 S}{d+a} = \epsilon_0 S \cdot \frac{2d}{d^2 - a^2}$$

$$C_{\text{экв}} < C_{\text{экв}}'$$

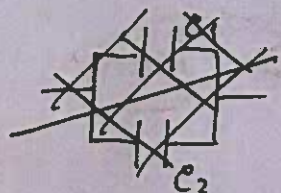
$$\frac{2\epsilon_0 S}{d} < 2\epsilon_0 S \cdot \frac{d}{d^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{d^2} < \frac{1}{d^2 - a^2}$$

Ёмкость увеличится ↑
 (в $\frac{d^2}{d^2 - a^2}$ раз)

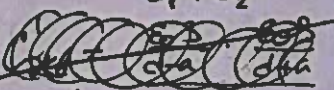
II сл (послед. соедин.)

$$\frac{1}{C_{\text{экв}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}; C_{\text{экв}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

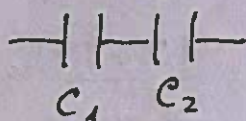


$$C_{\text{экв}} = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{d}}{\frac{\epsilon_0 S}{d} + \frac{\epsilon_0 S}{d}} = \frac{\epsilon_0 S}{2d}$$

$$C_{\text{экв}}' = \frac{C_1' \cdot C_2'}{C_1' + C_2'} = \frac{1}{\frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_2'}}$$



$$C_{\text{экв}}' = \frac{1}{\frac{d-a}{\epsilon_0 S} + \frac{d+a}{\epsilon_0 S}} = \frac{\epsilon_0 S}{2d}$$



$$C_{\text{экв}} = C_{\text{экв}}' \quad \text{Ёмкость не изменилась}$$

Отв: при II-соед. $C \uparrow$ в $\frac{d^2}{d^2 - a^2}$ раз
 при послед. соедин. C не изм.

N8 Дано:

$$m_1 = 1 \text{ кг}; \vec{v}_1 = 6 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y - 2 \cdot \vec{e}_z$$

$$m_2 = 1.5 \text{ кг}; \vec{v}_2 = -4 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y + 8 \cdot \vec{e}_z$$

 $\vec{u} = ?$

Решение:

$\vec{u}$ - скорость тела после абс. не упругого удара
 (при таком ударе тела слипаются)

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}, \text{ т.е. по зак. сохр. имп.}$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$$

стр. 4

№8 (продолжение) спроецируем ЗВН на оси:

$$\begin{cases} x: m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x \\ y: m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = (m_1 + m_2) u_y \\ z: m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} = (m_1 + m_2) u_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m_1 - 4m_2 = (m_1 + m_2) u_x \\ 4m_1 + 4m_2 = (m_1 + m_2) u_y \\ -2m_1 + 8m_2 = (m_1 + m_2) u_z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_x = \frac{6m_1 - 4m_2}{m_1 + m_2} & u_x = \frac{6 \cdot 1 - 4 \cdot 1,5}{1 + 1,5} = 0 \\ u_y = \frac{4(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = 4 & u_y = 4 \\ u_z = \frac{-2m_1 + 8m_2}{m_1 + m_2} & u_z = \frac{-2 \cdot 1 + 8 \cdot 1,5}{1 + 1,5} = \frac{10}{2,5} = 4 \end{cases}$$

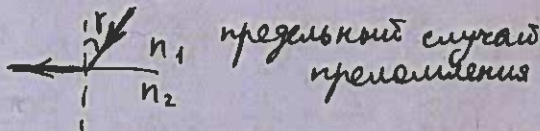
$$\vec{u} = u_x \cdot \vec{e}_x + u_y \cdot \vec{e}_y + u_z \cdot \vec{e}_z; \vec{u} = 0 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y + 4 \cdot \vec{e}_z$$

Отв: $\vec{u} = 0 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y + 4 \cdot \vec{e}_z$

Решение:

№10 Дано:

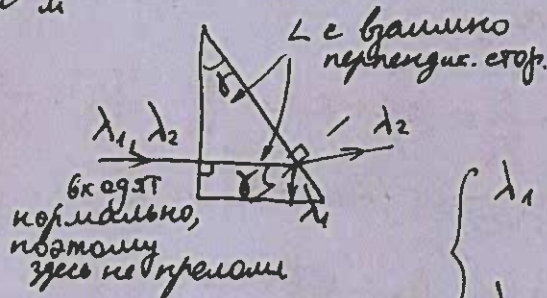
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 600 \text{ нм} \\ \lambda_2 &= 750 \text{ нм} \\ n &= 1 + \frac{a}{\lambda} \\ a &= 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ \gamma &= ? \end{aligned}$$



предельный случай преломления

$$\text{З.Снел.: } n_1 \sin \gamma = n_2 \sin 90^\circ \\ \sin \gamma = \frac{n_2}{n_1}$$

при $\gamma \geq \arcsin \frac{n_2}{n_1}$
луч будет полным
внутр. отраж
и не покинет среду n_1



$$\begin{cases} \lambda_1 \text{ не выходит: } \sin \gamma \geq \frac{1}{n_{\lambda_1}} \quad (n_2 = 1 - \text{воздух}) \\ \lambda_2 \text{ проходит: } \sin \gamma \leq \frac{1}{n_{\lambda_2}} \end{cases}$$

$$u_{\max} \begin{cases} \sin \gamma \geq \frac{1}{1 + \frac{a}{\lambda_1}} = \frac{1}{1 + \frac{6,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{600 \cdot 10^{-9} \text{ м}}} = \frac{1}{2} \\ \sin \gamma \leq \frac{1}{1 + \frac{a}{\lambda_2}} = \frac{1}{1 + \frac{6,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{750 \cdot 10^{-9} \text{ м}}} = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sin \gamma \leq \frac{5}{9}$$

$$30^\circ \leq \gamma \leq \arcsin \frac{5}{9}$$

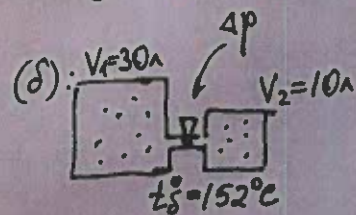
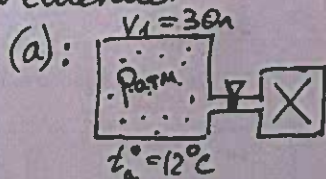
Отв: при $30^\circ \leq \gamma \leq \arcsin \frac{5}{9}$

№7 Дано:

$$\begin{aligned} V_1 &= 30 \text{ А}; V_2 = 10 \text{ А} \\ R_{\text{атм}} &= 760 \text{ мм рт.ст.} \\ \Delta p &= 800 \text{ мм рт.ст.} \\ t_a &= 12^\circ \text{C} \\ t_s &= 152^\circ \text{C} \end{aligned}$$

$$p_1 = ?$$

Решение:



уф-е Кран.-Менг гис (а):

$$p_{\text{атм}} V_1 = p_s R \cdot T_a, \quad p_s = \frac{p_{\text{атм}} \cdot V_1}{R \cdot T_a}$$

(стр 5)

17 (продолжение)

ν_1 и ν_2 — кол-ва в-ва в сосудах (1) и (2) соотв. (общее кол-во в-ва по изм.)

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_{\Sigma} = \frac{p_{атм} V_1}{RT_a}$$

Газ до установления равновесия постепенно просачивался через клапан до момента, пока разность давлений не ^{уменьшилась} стала до

$$\Delta p = 800 \text{ мм. рт. ст.}$$

И.е.

$$p_1 = p_2 + \Delta p$$

$$\frac{\nu_1 RT_{\delta}}{V_1} = \frac{\nu_2 RT_{\delta}}{V_2} + \Delta p$$

уф-е Клап.-Менг:

$$pV = \nu RT$$

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

сост. систему:

$$\begin{cases} \nu_1 + \nu_2 = \frac{p_{атм} V_1}{RT_a} \\ \frac{\nu_1 RT_{\delta}}{V_1} = \frac{\nu_2 RT_{\delta}}{V_2} + \Delta p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_2 = \frac{p_{атм} V_1}{RT_a} - \nu_1 \\ \nu_1 \cdot \frac{RT_{\delta}}{V_1} = \frac{RT_{\delta}}{V_2} \left(\frac{p_{атм} V_1}{RT_a} - \nu_1 \right) + \Delta p \end{cases}$$

$$\frac{\nu_1 RT_{\delta}}{V_1} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) = \Delta p + \frac{p_{атм} V_1 T_{\delta}}{V_2 T_a}$$

искомая величина $(p_1 V_1)$ из Клап.-Менг.

$$p_1 = \left(\Delta p + \frac{p_{атм} V_1 T_{\delta}}{V_2 T_a} \right) \cdot \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2} \cdot \frac{1}{V_1} = \left(\Delta p + p_{атм} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_{\delta}}{T_a} \right) \cdot \frac{1}{V_1 + V_2}$$

$$p_1 = \left(800 + 760 \cdot \frac{30}{10} \cdot \frac{425}{285} \right) \cdot \frac{1}{(30+40) \cdot 10^{-3}} = \left(800 + 760 \cdot 3 \cdot \frac{85}{57} \right) \cdot \frac{10^3}{70} =$$

$$= 4200 \cdot \frac{10^3}{70} = 60 \text{ (кПа)}$$

Отв: $p_1 = 60 \text{ кПа}$

$$p_1 = 60 \cdot 10^3 \text{ мм. рт. ст.} = 7980 \text{ кПа}$$

9) Велосипурист едет с постоянной скоростью, по кривой постоянного радиуса, з.к., с постоянной угловой скор., а тогда угл. ускор. $\beta = 0$

скоф. точек колеса $\vec{v} = \omega \cdot r$ (ф-ла Эйлера),
с этой же скор. движется само колесо,
т.к. нет проскальзывания.

$\omega' = \frac{\vec{v}}{R} = \omega \frac{r}{R}$ — угл. скор. вращения колеса отк. и. аргон.

