



Вариант № 3

№ 3

$$3 + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} - \text{наименьшее?}$$

$$\begin{aligned} 1) \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} + 3 &= \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} - 2 \cdot \frac{\cos x}{\cos y} \cdot \frac{\cos y}{\cos x} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} \right) + 3 + 2 \cdot \frac{\cos x}{\cos y} \cdot \frac{\cos y}{\cos x} = \\ &= \left(\frac{\cos x}{\cos y} - \frac{\cos y}{\cos x} \right)^2 + 5. \end{aligned}$$

$$2) \left| \frac{\cos x}{\cos y} - \frac{\cos y}{\cos x} \right|^2 \geq 0 \text{ при любых допустимых } x \text{ и } y.$$

$$\left(\frac{\cos x}{\cos y} - \frac{\cos y}{\cos x} \right)^2 \neq 5 \geq 5, \text{ тогда наименьшее значение выражения } 3 + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} \text{ равно } 5.$$

Пример, при котором достигается:

$$\begin{cases} \cos x = \cos y = 1 \\ x = 2\pi k \\ y = 2\pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3 + \frac{1^2}{1^2} + \frac{1^2}{1^2} = 3 + 1 + 1 = 5.$$

8

Ответ: 5.

№ 1 № 16

$$1) x = 178: \begin{array}{r} 178 \\ \times 1,7 \\ \hline 1246 \\ 178 \\ \hline 302,6 \end{array}$$

302,6 округляется в 303

$$\begin{array}{r} 303 \\ \times 1,7 \\ \hline 2121 \\ + 303 \\ \hline 515,1 \end{array}$$

515,1 округляется в 515, значит

$x = 178$ - удовлетворяет условию.

$$2) x = 177: \begin{array}{r} 177 \\ \times 1,7 \\ \hline 1239 \\ 177 \\ \hline 300,9 \end{array}$$

300,9 округляется в 301

$$\begin{array}{r} 301 \\ \times 1,7 \\ \hline 2107 \\ + 301 \\ \hline 511,7 \end{array}$$

511,7 округляется в 512 - $x = 177$ не удовлетворяет условию



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

$$\begin{array}{r} 3) x = 179 \\ 179 \\ \times 17 \\ \hline 1253 \\ + 179 \\ \hline 3043 \end{array}$$

304,3 округляется в 304

$$\begin{array}{r} 304 \\ \times 1,7 \\ \hline 2128 \\ + 304 \\ \hline 5168 \end{array}$$

516,8 округляется в 517. $x = 179$ не удов. условию.

4) функции $y = [t]$ и $y = [E]m$ — неубывающие, значит других x кроме 178 нет.
(при округлении числа t получается число либо $[t]$, либо $[t]+1$)

Ответ: $x = 178$

и 4

$$673m + pq = 2019$$

p, m, q — положительные простые числа.
 $2019 - 673m = 673(3 - m)$

$$1) pq = 673(3 - m)$$

$p, q > 0$, т.к. p, q — простые натурал. числа, значит $673(3 - m) > 0$,
число m — ^{положительное} простое, то единственное m , удовлетворяющее условию
это $m = 2$.
(1 — не простое число)

$$2) m = 2: \quad pq = 673(3 - 1) \\ pq = 673$$

число 673 — простое, значит его нельзя представить в виде произведения двух простых чисел, тогда

таких чисел p и q не существует, т.е. уравнение

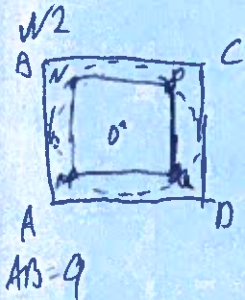
$673m + pq = 2019$ не имеет решений
в положительных простых числах.

Ответ: решений нет.

12

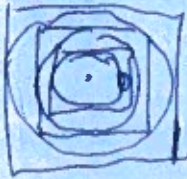


Вариант № 3



Окр (O, r) вписана в квадрат $ABCD$, значит $2R = AB = a$.
Окр (O, r) описана около квадрата $MNPQ$, значит $MQ = 2R$
 $NP = \frac{MQ}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$, т.е. если сторона внешнего
квадрата равна a , то сторона внутреннего равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Вернемся к нашему рисунку:



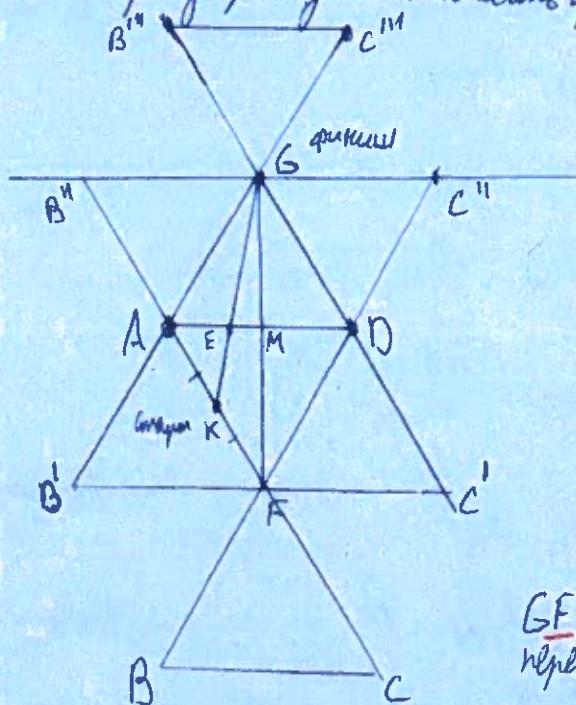
1) сторона бывшего квадрата a , сторона следующего $\frac{a\sqrt{2}}{2}$,
сторона следующего $\frac{a}{2}$, ..., n -ого квадрата $a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.
2) площадь первого квадрата равна a^2 , 1-ого $a^2 \cdot \frac{1}{2}$, 3-его $a^2 \cdot \frac{1}{4}$,
 n -ого $a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, тогда площади квадратов образуют геометрич.
прогрессию (x_n) : $x_1 = a^2$

$q = \frac{1}{2} < 1$, значит $S = \frac{x_1}{1-q}$ (сумма всех членов бесконечной
убывающей геом. прогрессии)
 $S = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$, т.е. сумма площадей всех квадратов равна $2a^2$.

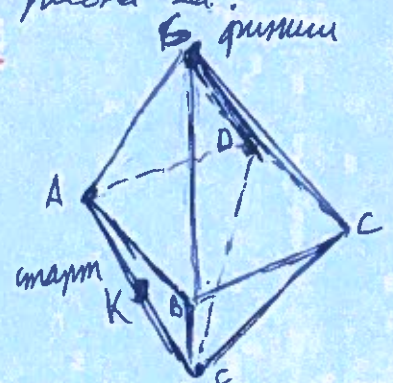
Ответ: $2a^2$.

W5

Выполним развёртку на многоугольнике ADF:



K - середина AF



В данном окружении все грани -
равные правильные треугольники,
потому развёртка будет такой, как
изображена на рисунке.
(Все углы в треугольниках по 60° , поэтому
в развёртке есть развёрнутые углы)
Так же можно заметить, что развёртка
симметрична относительно прямой AD.
GE - самый кратчайший путь,
пересекает ребро AD в точке E.



Олимпиада школьников «Гранит науки»

БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Проведен 6M-высоту в $\triangle ADB$, 6M-высота и медиана $\triangle ADB$ правильных $\triangle ABO$.

В правильном треугольнике ADF, ~~FM~~

FM-медиана, значит является высотой

6M=MF, и $\triangle ABO = \triangle AFO$ (3 стороны), тогда в $\triangle AFB$, AM-медиана.

6M $\triangle ABO$,
6M $\triangle AFO$,
6, MF-является
на 1
прямой,

2) $\angle BAK = \angle BAD + \angle DAK = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

$\triangle ABK$: по косинусов: $BK^2 = AB^2 + AK^2 - 2 \cdot AB \cdot AK \cdot \cos(60^\circ)$

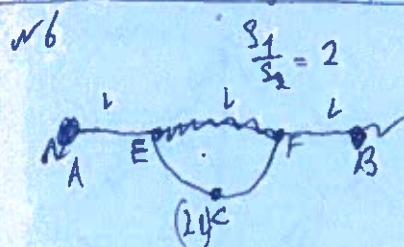
$BK^2 = 36 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = 45 + 18 = 63$ $BK = 3\sqrt{7}$, т.е. кратчайший путь равен $3\sqrt{7}$.

3) в $\triangle ABF$: BK-медиана } AE:EM=2:1 (в треугольнике медианы пересекаются
AM-медиана } в точке, и точкой пересечения делятся
пополам, считая от вершин)

AM BK = E

4) $AE = 2x$ } $AM = 3x = MD$, тогда $\frac{AE}{ED} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$ $AE:ED = 1:2$

Ответ: длина кратчайшего пути равна $3\sqrt{7}$, маршрут пересекает предполагаемое ребро в точке делящей это ребро в отношении 1:2.



$\frac{S_1}{S_2} = 2$

пути EF = L, тогда $AE = EC = CF = FB = L$ (так как $\triangle ACB$ - правильный, E, F - середины AC и BC)

$R = \frac{\rho L}{S}$

1) $\frac{R_{EF}}{R_{ECF}} = \frac{\rho L}{S_2} \cdot \frac{\rho 2L}{S_1} = \frac{\rho^2 S_1}{S_2 \cdot \rho 2L} = 1$, т.е. $R_{EF} = R_{ECF}$.

$U_0 = U_{EF} = U_{ECF}$ (так как проводники параллельны) ? 3B

$U_{AE} + U_{FB} + U_0 = U_{общ} = 1$ (полез. напряжение) $R_{AE} = R_{FB} = \frac{\rho L}{S_1}$

$I_{AE} = I_{FB} = I_0 = I_{общ}$

2) $R_{AE} = R_{FB} = \frac{\rho L}{S_1}$ $R_0 = \frac{R_{EF} \cdot R_{ECF}}{R_{EF} + R_{ECF}} = \frac{1}{2} R_{ECF} = \frac{1}{2} \frac{\rho 2L}{S_1} = \frac{\rho L}{S_1}$

3) $R_{AE} = R_0 = R_{FB}$

$U_{AE} + U_0 + U_{FB} = 1B$

$I_{AE} + I_0 + I_{FB} = I_{общ}$

исверно

$U_{AE} = U_0 = U_{FB} = 1B$

$U_0 = U_{EF} = U_{ECF} = 1B$

тогда падение напряжения на перемычке равно 2B

исверно

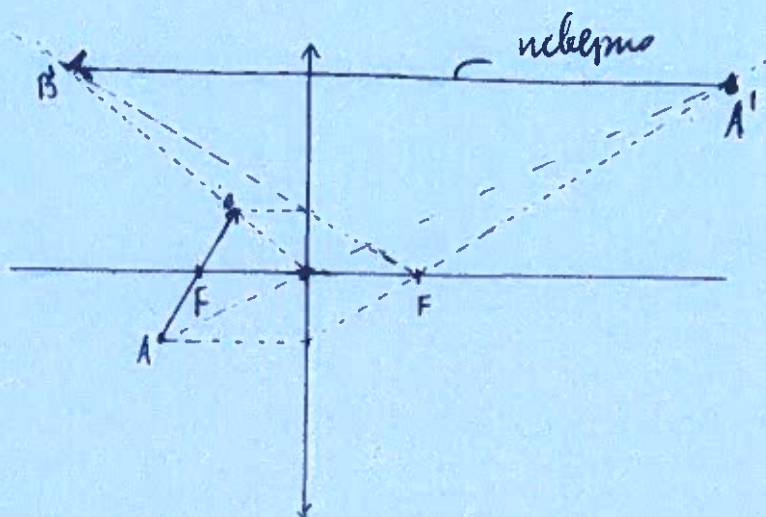


Ответ: 2B.



Вариант № 3

W8



①