



Вариант № 1

N3

Найти: $\min \left(1 + \frac{\ln^2 x}{\ln^2 y} + \frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} \right) = ?$

По неравенству Коши: $\left(t + \frac{1}{t} \geq 2 \right)$ получим что

$$\frac{\ln^2 x}{\ln^2 y} + \frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} \geq 2 \quad (\text{в нашем случае } t = \frac{\ln^2 x}{\ln^2 y})$$

тогда $\frac{\ln^2 x}{\ln^2 y} + \frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} + 1 \geq 3 \Rightarrow$ наименьшее значение выражения

равно 3

7

Ответ: 3

N2

Стороны первого квадрата и его площадь соответственно равны: $a_1 = a; S_1 = a^2$

Сторона второго квадрата равна $a_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(т.е. его диагональ равна радиусу описанной вокруг него окружности, что соответственно равно стороне первого квадрата $d_2 = a_1 = \sqrt{2} \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$.)

Тогда площадь второго квадрата равна

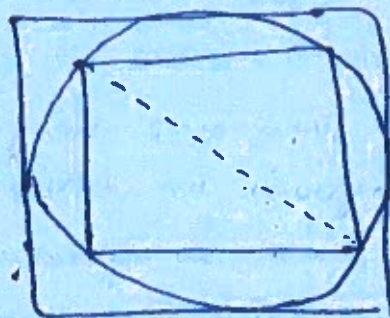
$$S_2 = a_2^2 = \frac{a_1^2}{2} = \frac{a^2}{2}; \text{ соответственно площадь}$$

третьего квадрата равна $S_3 = \frac{a^2}{4}$ и $S_4 = \frac{a^2}{8}$

$\Rightarrow S_{\text{кв}}$ - сумма площадей всех квадратов равна

$$S_{\text{кв}} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots$$

Получим бесконечно убывающую геом. прогрессию





Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Её сумма равна $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2 //$

Значит сумма площадей всех квадратов равна $2a^2$.

Ответ: $2a^2$.

7

№4

$$3m - p \cdot q = 2019$$

m, p, q — простые положительные числа.

$$3m - 2019 = p \cdot q$$

$$3(m - 673) = p \cdot q$$

Значит произведение $p \cdot q$ делится на 3. Это может быть только если, либо p или $q : 3$, но тогда $p \cdot q$ уже не простое число, или же если одно из них равно 3. Значит если $p = 3$, то

$$m - 673 = q$$

$$q + 673 = m$$

Заметим, что если q — не четное, то при сложении с н.ч. оно тоже даст четное число $m \geq 674$. Значит m уже не будет простым.

Если q — четное, то единственное четное положительное число это 2. Но при $q = 2$ получим $m = 675$, а $675 : 5$ — значит m не простое. Подойдет бы вариант $q = 0$; $m = 673$, т.к. 673 — простое число, но — м.н. по условию нужно найти положительные решения $q = 0$ нам не подходит. Других вариантов не осталось.

Значит нам такой тройки положительных простых чисел, которая удовлетворяла бы уравнению.

Ответ: решений нет.

12



Вариант № 1

№1

Составим схему действий:

1) стоимость был x -значно произведено

2) $\frac{17 \cdot x}{10}$

3) округлим $\frac{17 \cdot x}{10}$ получим $p \in \mathbb{N}$

4) $\frac{17 \cdot p}{10}$

5) округлим $\frac{17 \cdot p}{10} = 330$.

Значит либо $\frac{17 \cdot p}{10} = 330, \dots$ либо $\frac{17 \cdot p}{10} = 329, \dots \Rightarrow p = \frac{330, \dots \cdot 10}{17}$ либо $p = \frac{329, \dots \cdot 10}{17}$

Пусть $p = \frac{329,6 \cdot 10}{17}$, тогда $3296 : 17$, т.к. $p \in \mathbb{N}$ (6-значная цифра)

Найдём b

$$\begin{array}{r} 3296 \overline{) 17} \\ \underline{-17} \\ 194 \\ \underline{-153} \\ 66 \end{array}$$

$66 = 68$, т.к. $17 \cdot 4 = 68$

$\Rightarrow p = 194$, а p это результат округления $\frac{17 \cdot x}{10}$, тогда

аналогично либо $\frac{17 \cdot x}{10} = 194, \dots$ либо $\frac{17 \cdot x}{10} = 193, \dots$

Пусть $\frac{17 \cdot x}{10} = 193,6$ тогда $x = \frac{1936}{17}$ Опять найдём b :

$$\begin{array}{r} 1936 \overline{) 17} \\ \underline{-17} \\ 23 \\ \underline{-17} \\ 66 \\ \underline{-68} \\ 0 \end{array} \Rightarrow b = 8$$

$\Rightarrow \boxed{x = 114}$, т.к. только при умножении на 17 в только на 4, можно получить число состоящее из 6 целых десятичных (десятичных), т.е. - копейки на 6.

Ответ: 114.

6



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

N 7

Полная механическая энергия $E_n = mg l (1 - \cos(\alpha_n))$

α_n - максимальной угол отклонения

Пусть $l_1 > l_2 \Rightarrow E_{n1} > E_{n2}$ и $\alpha_1 < \alpha_2$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\alpha = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\begin{cases} E_{n1} = 2,25 E_{n2} \\ \alpha_2 = 1,4 \alpha_1 \end{cases}$$

максимальное угол отклонения математический pendulum
Найти: $l_1 - l_2 = ?$

$$\begin{cases} mgl_1 (1 - \cos \alpha_1) = 2,25 \cdot mgl_2 (1 - \cos \alpha_2) \Rightarrow l_1 = 2,25 l_2 \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}} = 1,4 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l_1}} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{g}}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{l_2}} - \frac{1}{\sqrt{l_1}} \right) = 1$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{l_2}} - \frac{1}{\sqrt{2,25 l_2}} = \frac{\sqrt{2,25 l_2} - \sqrt{l_2}}{\sqrt{2,25 l_2}} = \frac{0,5 \sqrt{l_2}}{1,5 l_2} = \frac{1}{3 \sqrt{l_2}}$$

$$\sqrt{l_2} = \frac{\sqrt{g}}{6\pi} \Rightarrow l_2 = \frac{g}{36\pi^2} \quad , \quad l_1 = \frac{9}{4} \cdot l_2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{g}{36\pi^2} = \frac{g}{16\pi^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow l_1 - l_2 &= \frac{g}{16\pi^2} - \frac{g}{36\pi^2} = \frac{g}{\pi^2} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{36} \right) = \frac{g}{\pi^2} \cdot \left(\frac{9-4}{144} \right) = \\ &= \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{5}{144} = \frac{5g}{(12\pi)^2} = \boxed{\frac{5g}{144\pi^2}} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5g}{144\pi^2}$



Вариант № 1

(N5)

Сделаем развёртку двенадцатого октаэдра

Проведем прямую линию из старта в финиш и т.д. - это будет наш ^{возможный} кратчайший путь, т.к. кратчайший путь, от точки к точке - это прямая, проведенная через них. Проведем также

в верхнем треугольнике высоту, если сторона

равна $a = 4$, то высота равна $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{3}$.

И все три стороны с точкой касания стороны и высотой,

т.к. все треугольники из которых состоит октаэдр равносторонние, то все стороны имеют сторону основания. И мы получим, что $AB = AC$ и $\angle BAC = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABC$ также равносторонний и $CB = \frac{a}{2} = 2$. Теперь из $\triangle PBC$

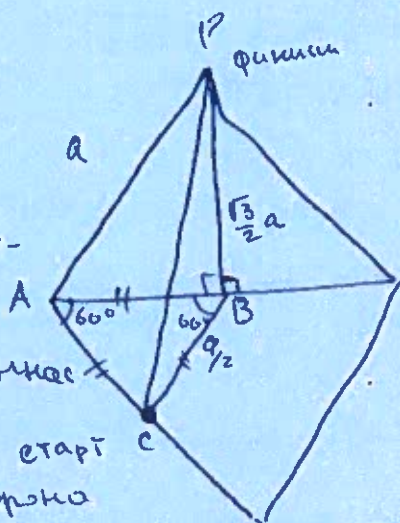
найдем PC - наш путь. По т. косинусов: $CB^2 + PB^2 - 2CB \cdot PB \cdot \cos \angle PBC = PC^2$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \cos(150^\circ) = PC^2$$

$$a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = PC^2$$

$$a^2 + \frac{3}{2}a^2 = PC^2$$

$$\frac{5}{2}a^2 = PC^2 \Rightarrow PC = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot a = 4 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = \underline{\underline{2\sqrt{10}}}$$

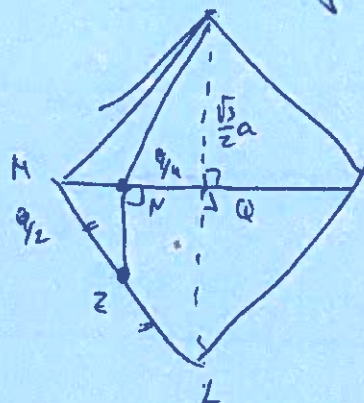


Возможен еще второй случай с минимальной длиной пути
Сравним предыдущий и этот:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

т.к. $\triangle MNZ$ будет $\sim \triangle MQL$ и $\angle Q = 2N = \frac{15}{4}a$

$$\Rightarrow S = \frac{a}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{10}) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{10}}{4}a}}$$





Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

$$2\sqrt{10} < \sqrt{13} + \sqrt{3}$$

$$4 \cdot 10 < 13 + 3 + 2\sqrt{13 \cdot 3}$$

$$40 - 16 < 2\sqrt{13 \cdot 3}$$

$$12 < \sqrt{13 \cdot 3}$$

$$144 > 39 \Rightarrow 2\sqrt{10} > \sqrt{13} + \sqrt{3}$$

Значит путь равный $S = 2\sqrt{13} + \sqrt{3}$, является кратчайшим.

Известно что пересекать ребро AB в $5 \cdot N$ и значит по теореме косинусов равнос 1 и 3.

Ответ: $\sqrt{13} + \sqrt{3}$

7

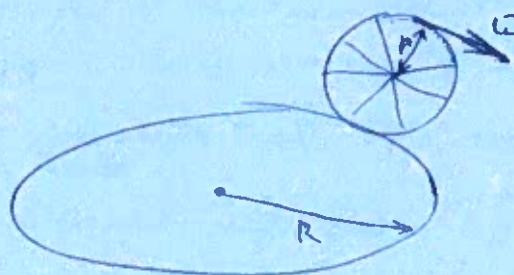
NS

Дано:

$2r; R; \omega$

Найти: a .

Решение:



0