

Вариант № 4

1. Найдите обратным путем: $3844 = 62^2$ (м.к. $61^2 = 3721$, $63^2 = 3969$)
 $\Rightarrow$ подходит только $62^2 = 3844$
 $625 = 25^2$ (аналогично, подходит только $25^2 = 625$, м.к. $24^2 = 576$, $26^2 = 676$)
 $256 = 16^2$ (м.к. $17^2 = 289$, $15^2 = 225$, подходит только $16^2 = 256$)

$\Rightarrow$ исходное число = 16

Ответ: 16

3. $\left(4 + \frac{\tan^2 x}{\tan^2 y} + \frac{\tan^2 y}{\tan^2 x}\right) - \min - ?$

Пусть: $\frac{\tan^2 x}{\tan^2 y} = a \Rightarrow \frac{\tan^2 y}{\tan^2 x} = \frac{1}{a}$

По пер-ву Коши: $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{\tan^2 x}{\tan^2 y} + \frac{\tan^2 y}{\tan^2 x} \geq 2$
 (где $a > 0$)

$\min \text{ знач.} = 2$ (достигн. при $\frac{\tan^2 x}{\tan^2 y} = \frac{\tan^2 y}{\tan^2 x} = 1$)

$\Rightarrow \min \text{ значение} = 4 + 2 = 6$

Ответ: 6

4. $673m - pq = 2019$, где $m, p, q > 0$; m, p, q - простые числа
 $\frac{673m}{673} = \frac{2019}{673} + \frac{pq}{673} \Rightarrow pq : 673$, т.е. $pq = 673k$, $k \in \mathbb{N}$

Тогда: $673m = 673\left(3 + \frac{pq}{673}\right)$

$m = 3 + \frac{pq}{673}$

П.к. $pq : 673$, а 673 - простое число, то одно из чисел p, q должно равняться 673, а другое - быть также простым.

Пусть: $p = 673 \Rightarrow$

$m = 3 + q$

Таким образом, какие простые числа m и q могут удовлетворять условию:
 Все простые числа имеют вид: $\begin{cases} l=2 \\ l=3 \\ l=6k \pm 1 \end{cases}$, где $k \in \mathbb{Z}$

Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Тога: 1) $q=2 \Rightarrow m=3+2=5$, т.е.

$$\begin{cases} p=673 \\ q=2 \\ m=5 \end{cases}$$

т.к. p и q - взаимно простые, то
возможен вариант:

$$\begin{cases} p=2 \\ q=673 \\ m=5 \end{cases}$$

2) $q=3 \Rightarrow m=6$ - не простое

3) $m=3 \Rightarrow q=0$ - не подходит.

$$\begin{cases} m=6k+1 \\ q=6n+1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6k+1=3+6n+1 \\ 6k=3+6n \\ 2k=1+2n \end{cases} \Rightarrow \text{невозможно}$$

целым. четным.

$$\begin{cases} m=6k+1 \\ q=6n-1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6k+1=3+6n-1 \\ 6k=6n-1 \\ 6(k-n)=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{невозможно}$$

целым. четным.

$$\begin{cases} m=6k-1 \\ q=6n+1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6k-1=3+6n+1 \\ 6k=6n+5 \\ 6(k-n)=5 \end{cases}$$

целым. четным.

$\Rightarrow$ невозможно

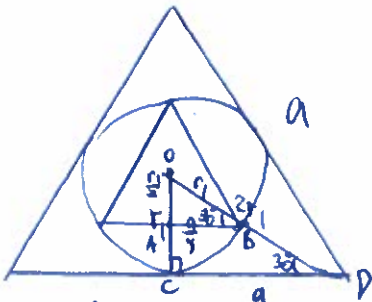
$$\begin{cases} m=6k-1 \\ q=6n-1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6k-1=3+6n-1 \\ 6k=6n+3 \\ 2k=2n+1 \end{cases}$$

целым. четным.

$\Rightarrow$ невозможно

Ответ: $\begin{cases} p=673 \\ q=2 \\ m=5 \end{cases}$, $\begin{cases} p=2 \\ q=673 \\ m=5 \end{cases}$ +

2.



$$4r_1^2 = r_1^2 + \frac{a^2}{4} \quad ; \quad 3r_1^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$r_1^2 = \frac{a^2}{12} \quad ; \quad r_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$\triangle OAB \sim \triangle OCP$, $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OP} = \frac{AB}{CP} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Аналогично, сторона каждого следующего вписанного $\triangle$ в 2 раза меньше предыдущей.

Получается бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, в которой

$$q = \frac{S_2}{S_1} = \frac{a^2}{4 \cdot a^2} = \frac{1}{4} \quad , \quad b_1 = S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\infty} = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3} = \left(\frac{a^2}{\sqrt{3}} \right)$$

Ответ: $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$ +

$$\text{Справа} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

сторона: a

$$S_2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\frac{a}{2}$

$$S_3 = \left(\frac{a}{4} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

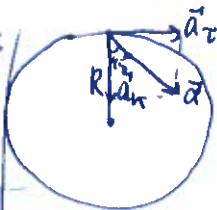
$\frac{a}{4}$

$$S_{n+1} = \left(\frac{a}{2^n} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\frac{a}{2^n}$

Вариант № 4

8. Дано:
 $t, R, \alpha = 45^\circ$
 $|\vec{a}| = ?$



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n \Rightarrow a_T = a_n$$

$$v = a_T t$$

$$a_T = a_n = \frac{v}{t}$$

$$a = \varepsilon R, \quad \varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$a = a_n \sqrt{2} = a_T \sqrt{2}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a = \sqrt{2} \cdot \frac{v^2}{R} = \sqrt{2} \cdot \frac{v}{t}$$

$$\boxed{v = \frac{R}{t}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{\sqrt{2} R}{t^2 \cdot R} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{t^2}}$$

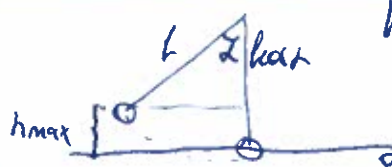
$$a = \sqrt{2} \cdot \frac{R^2}{t^2 \cdot R} = \frac{\sqrt{2} R}{t^2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{t^2}$

7. $v_1 = 2v_2$
 $l_1 = l_2 = l$
 $\frac{W_2}{W_1} = ?$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{2v_2}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \frac{1}{v_2}$$



$$h_{\max} = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$$

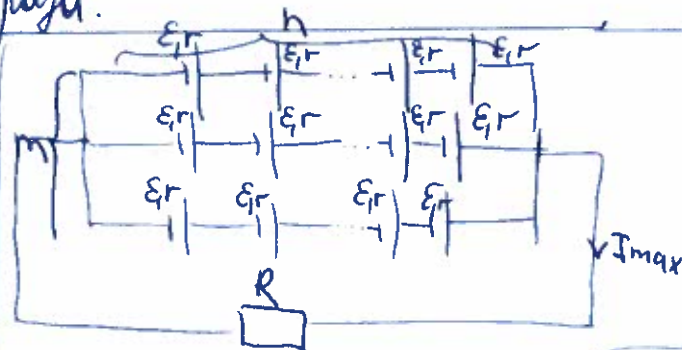
$$\frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{l_1}} = 2 \Rightarrow l_2 = 4l_1$$

$$W = mgh_{\max} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{mg h_2}{mg h_1} = \frac{l_2(1 - \cos \alpha)}{l_1(1 - \cos \alpha)} = \frac{l_2}{l_1} = \boxed{4}$$

+75

Ответ: в 4 раза.

10. ε, m, n
 $R = 2 \text{ Ом}$
 $r = 1 \text{ Ом}$
 $I_{\max}$
 $m, n = ?$



$$I_{\max} = \frac{\varepsilon_{\text{общ}}}{r_{\text{общ}} + R}$$

$$mn = 100, \quad m = \frac{100}{n}$$

При последоват.: $r_0 = r_1 + r_2 + \dots + r_n$
При паралл.: $\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}$
При последоват.: $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$
При паралл. и одинаковых элементов: $\varepsilon_0 = \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_{\text{общ}}} = \frac{m}{rn}, \quad r_{\text{общ}} = \frac{rn}{m}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\text{общ}} = n\varepsilon$$

$$I_{\max} = \frac{n\varepsilon}{\frac{rn}{m} + R} = \frac{n\varepsilon m}{rn + Rm} = \frac{n\varepsilon \cdot \frac{100}{n}}{rn + R \cdot \frac{100}{n}} = \frac{100\varepsilon}{h + \frac{200}{h}} = \boxed{\frac{100\varepsilon h}{h^2 + 200} = f(h)}$$

+25

Олимпиада школьников «Гранит науки»

БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

$$\Rightarrow f(n) = \frac{100 \text{ €} n}{n^2 + 200}, \quad f'(n) = 100 \text{ €} \left(\frac{n^2 + 200 - n \cdot 2n}{(n^2 + 200)^2} \right) = 0, \quad n^2 + 200 - 2n^2 = 0$$

$$n^2 = 200 \Rightarrow n = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{100}{10\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

и и
условие!

г, изоб. : $p = \text{const}$

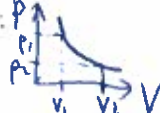


$$A = p_1(V_2 - V_1) = \nu R T_2 - \nu R T_1 = \nu R \Delta T$$

- адиаб. : $Q = 0 = \Delta U + A, \quad A = -\Delta U = -\frac{5}{2} \nu R T$

- изохорн. : $\Delta V = 0 \Rightarrow A = 0$

- изотерма : $P \propto 1/V$

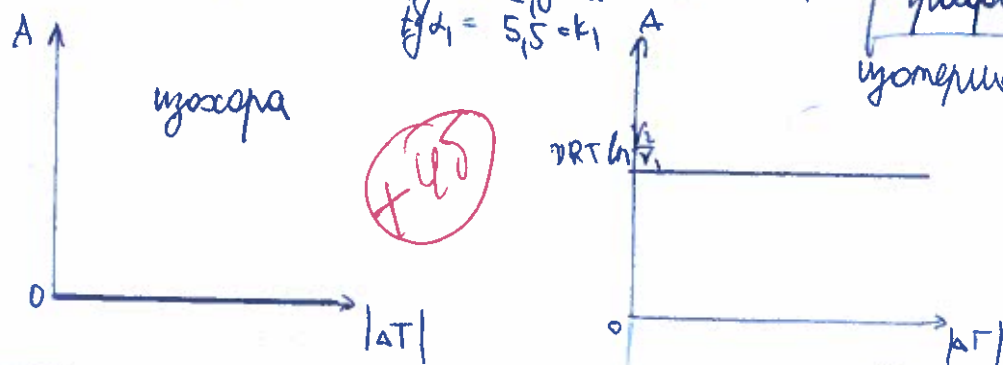


$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R T}{V} dV = \nu R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = \nu R T (\ln V_2 - \ln V_1) = \nu R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

График 2?

В приведенных графиках : $\frac{1}{d_1} = 1,4 = k_3, \quad \frac{5}{2} k_3 = k_1 \Rightarrow$

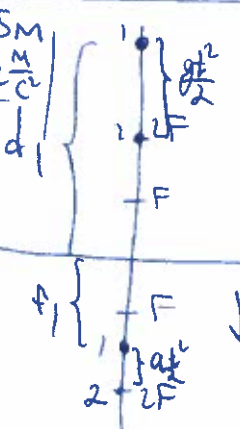
график 3 - изобара +
график 1 - адиабата



$$A = \nu R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$\Delta T = 0$
для данных V_2 и V_1
 $\ln \frac{V_2}{V_1} = \text{const}$

6. $d_1 = 5 \text{ м}$
 $a = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
 $F = ?$



Нач. момент : $\frac{1}{F} = \frac{1}{5} + \frac{1}{F_1}, \quad F_1 = \frac{5F}{5-F}$

Копн и предмет, ч изобр. в двойном фокусе : $\frac{1}{F} = \frac{1}{5 - \frac{gt^2}{2}} + \frac{1}{\frac{F_1 + \frac{gt^2}{2}}{2}}$

$$5 - \frac{gt^2}{2} = \frac{F_1}{2} + \frac{gt^2}{2}$$

$$5 - gt^2 = \frac{5F_1}{2} + \frac{gt^2}{2}$$

$$5 - gt^2 = \frac{5F}{5-F} + \frac{gt^2}{2}$$

$$5 - gt^2 = \frac{5 - \frac{5F}{5-F}}{2} = \frac{25 - 5F + 5F}{2(5-F)} = \frac{25 - 10F}{5-F}$$

$$t^2 = \frac{5(5-2F)}{(5-F) \cdot 5,1} \Rightarrow 2F = \frac{1}{5 - \frac{5 \cdot 5(5-2F)}{(5-F) \cdot 5,1}}$$

$$2F = \frac{(5-F) \cdot 5,1}{25,5(5-F) - 125 + 50F}$$

$$25,5 - 5,1F = \frac{255F - 51F^2 - 250F + 100F^2}{49F + 10,1F - 25,5 = 0 / 10}$$

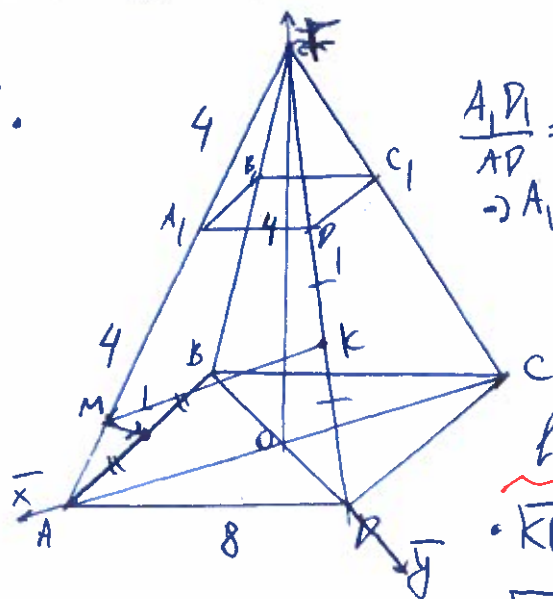
$$490F^2 + 101F - 255 = 0$$

$$\Delta = 101^2 + 4 \cdot 490 \cdot 255 = 10201 + 124950 = 135151$$

F = ?

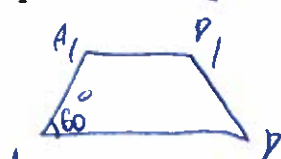
4

5.



$$\frac{A_1 P_1}{A P} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A_1 F = \dots$$


$$(K \rightarrow L)_{\text{min}} - ?$$

Bölegüm Sayın: $\overline{OA} = x$
 $\overline{OP} = y$
 $\overline{OF} = z$

$$l = \overline{KM} + \overline{ML}$$

$$\bullet \overline{KM} = \overline{KP} + \overline{PA} + \overline{AM}$$

$$\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{FD} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z})$$

$$\overline{PA} = \overline{OA} - \overline{OP} = \overline{x} - \overline{y}$$

$$\overline{AM} = k \overline{AF} = k (\overline{OF} - \overline{OA}) = k (\overline{z} - \overline{x})$$

$$\bullet \overline{ML} = \overline{MA} + \overline{AL}$$

$$\overline{MA} = -\overline{AM} = k(\bar{x} - \bar{z})$$

$$\overline{AL} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} (\overline{OB} - \overline{OA}) = \frac{1}{2} (-\overline{OD} - \overline{OA}) = -\frac{1}{2} (\overline{y} + \overline{x})$$

$$\Rightarrow \overline{KM} = \frac{1}{4}\underline{y} - \frac{1}{4}\underline{z} + \underline{x} - \underline{y} + k\underline{z} - k\underline{x} = (1-k)\underline{x} - \frac{3}{4}\underline{y} + (k-\frac{1}{4})\underline{z}$$

$$\overline{ML} = \overline{k\bar{x} - k\bar{z}} - \frac{1}{2}\bar{y} - \frac{1}{2}\bar{x} = (k - \frac{1}{2})\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{y} - k\bar{z}$$

$$KM = \sqrt{(1-k)^2 + \frac{9}{16} + (k - \frac{1}{4})^2} = \sqrt{1 - 2k + k^2 + \frac{9}{16} + k^2 - \frac{k}{2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8}}$$

$$ML = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + k^2} = \sqrt{k^2 - k + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + k^2} = \sqrt{2k^2 - k + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f(k) = \sqrt{2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8}} + \sqrt{2k^2 - k + \frac{1}{2}} \quad f(k) - m \rightarrow -?$$

$$f'(k) = \frac{4k - \frac{5}{2}}{2\sqrt{2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8}}} + \frac{4k - 1}{2\sqrt{2k^2 - k + \frac{1}{2}}} = \frac{(4k - \frac{5}{2})\sqrt{2k^2 - k + \frac{1}{2}} + (4k - 1)\sqrt{2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8}}}{2\sqrt{2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8}} \cdot \sqrt{2k^2 - k + \frac{1}{2}}} = 0$$

$$(4k - \frac{5}{2}) \sqrt{2k^2 - k + \frac{1}{2}} - (4k - 1) \sqrt{2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8}}$$

$$\int (4k - \frac{5}{2})^2 (2k^2 - k + \frac{1}{2}) = (4k-1)^2 (2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8})$$

$$\left(16k^2 - 20k + \frac{25}{4}\right)\left(2k^2 - k + \frac{1}{2}\right) = \left(16k^2 - 8k + 1\right)\left(2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8}\right)$$

$$k < \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{32k^4} - \cancel{16k^3} + 8k^2 - \cancel{40k^3} + 20k^2 - 10k + \frac{25}{2}k^2 - \frac{25}{4}k + \frac{25}{8} = \\ & = \cancel{32k^4} - \cancel{40k^3} + 26k^2 - \cancel{16k^3} + 20k^2 - 13k + 2k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{13}{8} \\ & \frac{81}{2}k^2 - \frac{65}{4}k + \frac{25}{8} = 48k^2 - \frac{31}{2}k + \frac{13}{8} \quad / \cdot 8 \\ & 324k^2 - 130k + 25 = 384k^2 - 124k + 13 \end{aligned}$$

$$60k^2 + 6k - 12 = 0 \quad / : 6$$

$$10k^2 + k - 2 = 0$$

$$D = 1 + 80 = 81$$

$$k = \frac{-1 \pm 9}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = \frac{2}{5} \overline{AF}$$

$$AM = \frac{2}{5} \cdot 8 = \frac{16}{5}$$

k - m. min функции

$$\begin{aligned} \Rightarrow l = f(k) = f\left(\frac{2}{5}\right) &= \sqrt{2 \cdot \frac{4}{25} - \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{13}{8}} + \sqrt{2 \cdot \frac{4}{25} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{8^{18} 1200}{25} - 1 + \frac{13^{124}}{8}} + \sqrt{\frac{8^{12} 2^{10} 1^{18}}{25} - \frac{2^{10}}{5} + \frac{1^{18}}{2}} = \sqrt{\frac{189}{200}} + \sqrt{\frac{21}{50}} \end{aligned}$$

Ответ: $l = \sqrt{\frac{189}{200}} + \sqrt{\frac{21}{50}}$

$AM = \frac{2}{5} AF = \frac{16}{5}$

+

