



Вариант № 3

Задача 1.

Дано:  $x \in \mathbb{N}$ ;  $S = 515$

Найти:  $x$  - ?

Решение: 1)  $S = [1,7 [1,7x]] = 515$ , где  $[ ]$  - целая часть от числа (с округлением по правилам)

2) Пусть  $[1,7x] = P$ .

$S = [1,7P]$ , где  $P \in \mathbb{N}$ .

Рассмотрим  $\frac{S}{1,7} = \frac{515}{1,7} = 302 \frac{16}{17}$  - округлим в большую сторону т.к.  $\frac{16}{17} > 0,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow P = 303$ ; Проверка:  $[1,7 \cdot 303] = [515,1] = 515$ .

3)  $P = [1,7x]$ , где  $x \in \mathbb{N}$

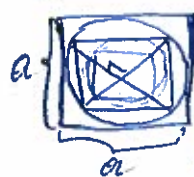
Рассмотрим  $\frac{P}{1,7} = \frac{303}{1,7} = 178 \frac{4}{17}$  - округлим до 178 т.к.  $\frac{4}{17} < 0,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 178$ ; Проверка:  $[1,7 \cdot 178] = [302,6] = 303$

4) Проверка  $S = [1,7 \cdot [1,7 \cdot 178]] = [1,7 \cdot 303] = 515$  - верно.

Ответ:  $x = 178$  рублей

Задача 2



Рассмотрим раннюю комбинацию фигур.

а) Площадь внешнего квадрата  $S_1 = a^2$ .  
Заметим, что радиус вписанного круга равен половине стороны квадрата  $\Rightarrow$  диаметр круга  $d = a$ .  
диаметр = стороне

2) Диагонали  $AC$  и  $BD$  вписанного квадрата являются диаметрами круга; диагонали кв. пересекаются под прямым углом  $\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^2}{2}$  (как половина произведения диагоналей на синус угла между ними)  $\sin 90^\circ = 1$ .

3) Данные ситуации повторяется и площади квадратов образуют бесконечно убывающую геом. прогрессию, где  $b_1 = a^2$   $q = \frac{1}{2}$

$$\sum S = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \dots = a^2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots \right) = a^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = a^2 \cdot 2 = 2a^2 - \text{по}$$



формулы суммы <sup>бесконечно</sup> убывающей геом. прогрессии:  $S = \frac{b_1}{1-q}$

Ответ:  $\leq S = 2a^2$

Задача 3.

Дано:  $F = 3 + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x}$

Найти:  $F_{\min}$  -?

Решение: 1)  $\begin{cases} \cos^2 y \neq 0 \\ \cos^2 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) Замена:  $\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} = p$

$F(p) = 3 + p + \frac{1}{p}$  т.к.  $F_{\min}$ , то  $F'(p) = 0$

Найдем  $F'(p)$ :  $F'(p) = 0 + 1 - \frac{1}{p^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{p^2} = 0 \Rightarrow p^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \pm 1$

$F'(p)$   
-1 0 1  $\rightarrow p$   
 $F(p)$   
 $\Rightarrow p = 1$  точка минимума функции

3)  $p = 1$  не противоречит ОДЗ  $\Rightarrow F_{\min} = 3 + p + \frac{1}{p} = 3 + 1 + 1 = 5$

Ответ:  $F_{\min} = 5$ .

Задача 4

Дано:  $673m + pq = 2019$ ;  $m, p$  и  $q$  - положительные, простые

Найти: все решения ур-я

Решение: 1)  $673m + pq = 2019$

$pq = 673(3-m)$  т.к.  $p$  и  $q$  положительные, то  $pq > 0$  и  $m < 3$ ;  $m$  - простое  $\Rightarrow$  в интервале  $(0, 3)$  только одно

простое число: 2  $\Rightarrow m = 2 \Rightarrow pq = 673(3-2) = 673 \Rightarrow$

$\Rightarrow pq : 673$  (НО)  $p$  и  $q$  - различные простые числа и

673 - простое число  $\Rightarrow$  если  $q = 673$ , тогда  $p = 1$ , но 1 не является простым или составным числом,

$\Rightarrow$  данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений при данных условиях



Вариант № 3

Задача 6

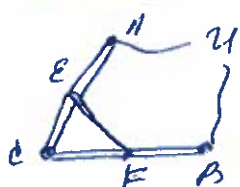
Дано:

$$U = 3B$$

$$S_1 = \frac{S}{2}$$

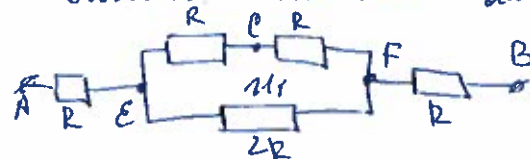
$$U_1 = ?$$

Решение:



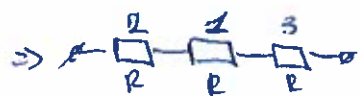
1) Сопротивление проводника  $R = \rho \frac{l}{S}$   
 $l = CE = EA = CF = FB = \frac{AB}{2}$  т.к.  $\Delta$  правильный  
 $EF$  - ср. линия  $\Rightarrow EF = \frac{AB}{2} = l$   
 $R_{EF} = R_1 = \rho \frac{l}{S_1} = 2 \rho \frac{l}{S} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Запишем эквивалентную схему с резисторами:



$$R_{сэф} = \frac{(R+R)2R}{R+R+2R} = \frac{4R}{4} = R \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{сэф}} = \frac{1}{R+R} + \frac{1}{2R}$$



т.к. соединение параллельное  $U_1 = U_{сэф} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_1 = U_2 = U_3 = \frac{U}{3}$$

(по закону сохранения энергии  $I_1 = I_2 = I_3 \Rightarrow$ )

$$\Rightarrow U_1 = \frac{U}{3} \Rightarrow U_1 = \frac{3}{3} = 1B$$

Ответ:  $U_1 = 1B$ .

55

Задача 4

Дано:

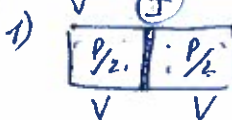
$$P, \frac{P}{2}, S, \frac{V}{4}$$

$$T = const$$

$$F = ?$$

Решение:

\* Обозначим все буквы  $F$ , чтобы не запутаться в обозначениях



$$\Rightarrow V_2 = \frac{V}{4}$$

$$2V = V_2 + V_4 \Rightarrow V_2 = \frac{7V}{4}$$

Упр. Менделеева-Клапейрона:  
 $pV = \sqrt{RT}$

$$I: \frac{P}{2} V = \sqrt{RT}$$

$$II: P_2 V_2 = \sqrt{RT}$$

$$P_1 V_1 = \sqrt{RT} \Rightarrow P_1 \frac{V}{4} = \sqrt{RT} = \frac{P}{2} V \Rightarrow P_1 = 2P$$

но явление пара не может быть > давлением насыщенного пара  $\Rightarrow P_1 = P$ , пар насыщенный.

$$P_1 = P_2 + \frac{F}{S}$$

$$I) \text{ Найдем } P_2: \frac{P}{2} V = \sqrt{RT} = P_2 V_2 = P_2 \frac{7V}{4} \Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{2}{7} P}$$

$$P_1 = P_2 + \frac{F}{S} \Rightarrow P = \frac{2}{7} P + \frac{F}{S} \Rightarrow \frac{F}{S} = \frac{5}{7} P \Rightarrow F = \frac{5}{7} P S$$

Ответ:  $F = \frac{5}{7} P S$ .

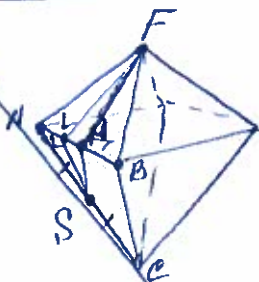
85



# Олимпиада школьников «Гранит науки» БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Задача 5

$AB = 6$   
 $AS = 3$



Найти:  $l_{наим}$ ?

Решение: I) Есть два варианта пути  
I)  $FLS$  - через  $SL$  - перпендикуляр к  $AB$   
II)  $FMS$  - через  $SM$  - перпендикуляр к  $AB$ .

2) Рассмотрим  $l_I = LS + LF$

$LS = \sqrt{AS^2 - AL^2}$  - по т. Пифагора из подобия  $\triangle ALS$  и  $\triangle AMC$  с коэф.  $k = \frac{1}{2}$ , где  $LS = \frac{1}{2} SM$ ,  $SM \perp AB$  (высота пр  $\triangle ABC$ )  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow SM = FM = \sqrt{AF^2 - AM^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3} \Rightarrow LS = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 1,5\sqrt{3}$

3)  $FL = \sqrt{FM^2 + LM^2}$  ( $LM = \frac{1}{2} AM = 1,5$ )

$$FL = \sqrt{9 \cdot 3 + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{2} = 1,5\sqrt{13} \Rightarrow l_I = LS + LF = 1,5\sqrt{3} + 1,5\sqrt{13} = 1,5(\sqrt{3} + \sqrt{13})$$

4)  $l_{II} = FM + MS = 3\sqrt{3} + MS$

$AM = AS = 1,5$ ,  $\angle MAS = 60^\circ \Rightarrow \triangle MAS$  - р-б  $\triangle$  с углом при вершине  $= 60^\circ \Rightarrow \triangle MAS$  - равн  $\Rightarrow MS = 1,5 \Rightarrow l_{II} = 3\sqrt{3} + 1,5$

5) Сравним  $l_I$  и  $l_{II}$ :  $1,5(\sqrt{3} + \sqrt{13})$  Vs  $1,5(2\sqrt{3} + 1)$

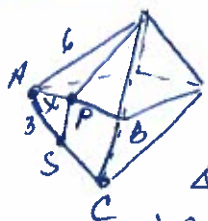
$$\begin{array}{l} \sqrt{13} \quad Vs \quad \sqrt{3} + 1 \quad | \cdot 2 \text{ воз в кв} \\ 13 \quad Vs \quad 3 + 1 + 2\sqrt{3} \\ 13 \quad Vs \quad 4 + 2\sqrt{3} \quad | - 4 \\ 9 \quad Vs \quad 2\sqrt{3} \end{array}$$

$$\sqrt{81} \quad Vs \quad \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{81} > \sqrt{12} \Rightarrow l_I > l_{II}$$

$\Rightarrow$  крайний путь  $l_{II} = 3\sqrt{3} + 1,5$

Ответ: мин маршрут:  $l_{II} = 3\sqrt{3} + 1,5$  пройдет через точку  $M$  - середину ребра  $AB$ .

Задача 5



1)  $\angle FAP = 60^\circ = \angle PAS$  т.к. все грани - равн  $\triangle$

2) Пусть  $AP = x$ , тогда мин маршрут:

$l = PF + PS$ , где по теор. косинусов из  $\triangle PAS$  и  $\triangle PAF$ :  $PF = \sqrt{9 + x^2 - 3x}$ ;  $PS = \sqrt{36 + x^2 - 6x}$

3)  $l = 45 + 2x^2 - 9x$   $l_{наим} \Rightarrow l' = 0$

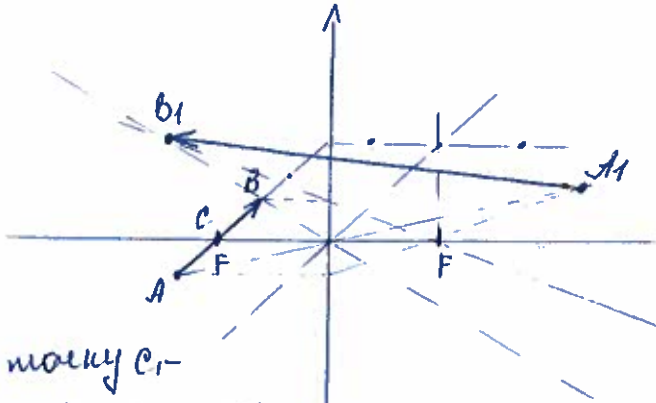
1)  $l' = 0 + 4x - 9 \Rightarrow 4x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$  - точка минимума  $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2\frac{1}{4} = 2,25 = AP$ ;  $l_{наим} = 45 + 2 \cdot \frac{81}{16} - 9 \cdot \frac{9}{4} = 45 + \frac{81}{8} - \frac{81}{4} = 45 - \frac{81}{8} = \frac{279}{8} = 34\frac{7}{8}$  т.к.  $AP = 2,25$  - точка пер.



Вариант № 3

Задача 2.



- 2) Строим точку  $C$  - изображение  $M$ , т.к.  $M$  не пересекается, параллельны  $AB$  или совпадают с ней. (---)
- 4) Стройка  $A, B_1$  является изображением строки  $AB$ . Ответ: см. рис.

1) Строим точку  $B_1$  - изображение  $B$  - предмет находится перед фокусом

2) Строим точку  $C$  - изображение  $M$  находится на главной оптической ос.

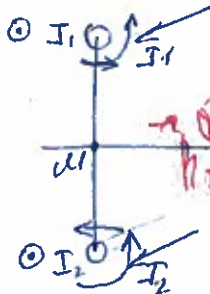
3) Строим точку  $A_1$  - действительное изображение. 0

Задача 3.

Дано:

$L$

Решение:



1) т.к. в точке  $M$   $B_1$  и  $B_2$  равны 0, векторы  $B_1$  и  $B_2$  противоположно направлены, поэтому взаимно уничтожаются

2) В точке  $A$  векторы  $B_1$  и  $B_2$  направлены вверх  $\Rightarrow$  токи в проводниках сонаправлены и направлены к нам.

3) т.к.  $|B_{1M}| = |B_{2M}|$ , векторы противоположно направлены, точка  $M$  - середина  $I_1 I_2 \Rightarrow I_1 = I_2$  Нет решения  $\frac{dB}{dL} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Ответ: 1) токи направлены к наблюдателю

2)  $I_1 = I_2$

Задача 3

Дано:  $F = 3 + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x}$

Найти:  $F_{\min}$  - ?

Решение: 1) ОДЗ:  $\begin{cases} \cos^2 y \neq 0 \\ \cos^2 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$



2) По неравенству Коши для 3х:

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} > 0; \quad \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} > 0$$

$$\frac{3 + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x}}{3} \geq \sqrt[3]{3 \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} \cdot \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x}}$$

$$3 + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} \geq 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow F \geq 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow F_{\min} = 3\sqrt[3]{3}$$

Ответ:  $F_{\min} = 3\sqrt[3]{3}$

