



Вариант № 2

Операцию продолжим три раза.

1. 1) $129 \cdot 10 + n = a^2$, ~~$129 \cdot 10 + n = a^2$~~ , $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq n \leq 9$

$$35^2 = 1225$$

$$36^2 = 1296$$

$$37^2 = 1369$$

$$\Rightarrow a^2 = 1296 \cdot 36^2, \Rightarrow n = 36$$

$$a \cdot 10 + k = b^2, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 9$$

2) $a \cdot 10 + k = 36 \cdot 10 + k = 360 + k$

$$16^2 = 324$$

$$19^2 = 361$$

$$20^2 = 400$$

$$\Rightarrow a \cdot 10 + k = 361, \Rightarrow k = 1, b = 19$$

3) $b \cdot 10 + t = c^2, t \in \mathbb{Z}, 0 \leq t \leq 9$

$$140 + t = b \cdot 10 + t = 190 + t = c^2$$

$$13^2 = 169$$

$$14^2 = 196$$

$$15^2 = 225$$

$$\Rightarrow b \cdot 10 + t = 196, \Rightarrow t = 6, c = 14$$

$\Rightarrow c$ - исходное число.
Пробуем:

$$14^2 = 196$$

$$19^2 = 361$$

$$36^2 = 1296$$

Ответ: 14



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

4. $3m + pq = 2019$

$2019 : 3, 3m : 3, \Rightarrow pq : 3$

$\Rightarrow$ либо $p : 3$, либо $q : 3$

т.к. p и q — простые, то либо $p = 3$, либо $q = 3$

1) $p = 3$

$3m + 3q = 2019 | : 3$

$m + q = 673$

$673 : 2, \Rightarrow$ ~~либо $m : 2, q : 2$, либо $m : 2, q$~~

$\Rightarrow \begin{cases} m : 2, q \neq 2 \\ m \neq 2, q : 2 \end{cases}$

т.к. m и q — простые, то

$\begin{cases} m = 2, q \neq 2 \\ m \neq 2, q = 2 \end{cases}$

I) $m = 2, q \neq 2$

$m + q = 673$

$2 + q = 673$

$q = 671$

$m = 2, p = 3, q = 671$

II) $m \neq 2, q = 2$

$m + q = 673$

$m + 2 = 673$

$m = 671$

$m = 671, p = 3, q = 2$

2) $q = 3$

$3m + 3p = 2019 | : 3$

$m + p = 673$

$673 : 2, \Rightarrow \begin{cases} m : 2, p \neq 2 \\ m \neq 2, p : 2 \end{cases}$

т.к. p и m — простые, то $\begin{cases} m = 2, p \neq 2 \\ m \neq 2, p = 2 \end{cases}$

I) $m = 2, p \neq 2$

$m + p = 673$

$2 + p = 673$

$p = 671$

$m = 2, p = 671, q = 3$

II) $m \neq 2, p = 2$

$m + p = 673$

$m + 2 = 673$

$m = 671$

$m = 671, p = 2, q = 3$

8

Ответ: $m = 2, p = 3, q = 671$;

$m = 671, p = 3, q = 2$;

$m = 2, p = 671, q = 3$;

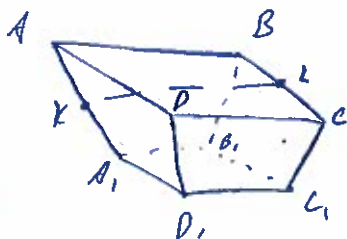
$m = 671, p = 2, q = 3$;

671 — не простое число



Вариант № 2

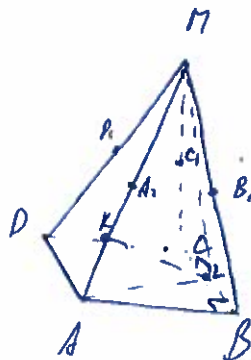
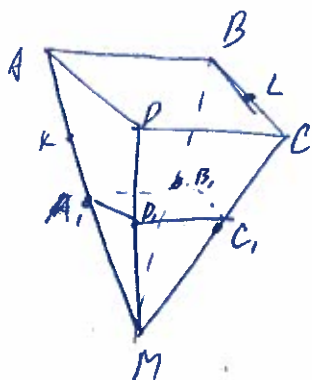
5.



Дано: $ABCD, D_1, ABCD$ - правильная усеченная пирамида
 $A_1B_1 \parallel B_1C_1 \parallel C_1D_1 \parallel D_1A_1$, $AA_1 \perp PD_1 \perp CC_1 \perp BB_1 \perp 2$,
 $AB = BC = CD = AD = 4$,
острые углы каждой грани равны 60° ;
 $TK \in AA_1$, $TL \in BB_1$
 $AK = KA_1$, $BL = LC_1$;

Найти: KL ?

Решение: т.к. $AB, C, D, ABCD$ - правильная пирамида, мы можем достроить её до правильной пирамиды $MABCD$ и $(A, B, C, D) \parallel (ABCD)$, $\Rightarrow A, B, C, D \parallel$



В $\triangle MAB$ острые углы равны 60° .
Проведём AK . В $\triangle MAB$ $\angle K$ и $\angle L$ не больше 90° , $\Rightarrow \angle AA_1B_1$ и $\angle A_1B_1C_1$ не больше 90° .
 $\Rightarrow$ в $\triangle MAB$ острые углы - это $\angle A$ и $\angle B$
 $\Rightarrow \angle MAB = \angle MBA = 60^\circ$

т.к. $MABCD$ - правильная пирамида, $ABCD$ - квадрат и $AM = MB = MC = MD$.

В $\triangle MAB$ $AK, BL \in \frac{1}{2} AB$ и $AK, BL \parallel AB$, $\Rightarrow AK, BL$ - средние линии.

В $\triangle MAB$ $\angle MAB = \angle MBA = 60^\circ$ (по условию).

В $\triangle MAB$ $AK, BL \in \frac{1}{2} AB$ и $AK, BL \parallel AB$, $\Rightarrow AK, BL$ - средние линии $\triangle MAB$, $\Rightarrow AK \parallel AM$, $BL \parallel BM$.

В $\triangle MAB$ $\angle MAB = \angle MBA = 60^\circ$, $\Rightarrow \angle AMB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\angle MAB = \angle MBA$
 $\Rightarrow \triangle MAB$ - равносторонний, $\Rightarrow AM = MB = MC = MD = AB = 4$, $\angle MAB = \angle MBA = \angle MBC = \angle MCD =$

В $\triangle ABL$ $\angle B = 90^\circ$ (т.к. $ABCD$ - квадрат), $AB = 4$; $BL = 2$ (т.к. $BL \in \frac{1}{2} BC$ и $BC = 4$);
 $\Rightarrow AL$ по те. Пифагора $AL = \sqrt{AB^2 + BL^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Проведём ML . В $\triangle MCB$ ML - медиана, $\Rightarrow$ она MC - биссектриса и высота б-ка
т.к. $\triangle MCB$ - равносторонний (т.к. $MC = MB = BC$)





Вариант № 2

$$S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + \dots = S_1 + S_1 \cdot \frac{1}{4} + S_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots = S_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots\right) = S_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = S_1 \cdot \frac{4}{3}$$

$$= S_1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{9}$$

$$S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + \dots = S_1 + S_1 \cdot \frac{1}{4} + S_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots = \frac{4}{3} S_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{9}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{9}$

3.

$$2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} = \frac{2 \sin^2 x \sin^2 y + \sin^4 x + \sin^4 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{(\sin^2 x + \sin^2 y)^2}{\sin^2 x \sin^2 y}$$

$$(\sin^2 x + \sin^2 y)^2 \geq 0, \sin^2 x \sin^2 y > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(\sin^2 x + \sin^2 y)^2}{\sin^2 x \sin^2 y} \geq 0$$

~~⇒ найдем граничные значения.~~

$$\sin^2 x \neq 0, \Rightarrow \sin x \neq 0, \cos x \neq 1 \text{ и } \cos x \neq -1$$

$$\sin^2 y \neq 0, \Rightarrow \sin y \neq 0, \cos y \neq 1 \text{ и } \cos y \neq -1$$

$$\frac{(\sin^2 x + \sin^2 y)^2}{\sin^2 x \sin^2 y} = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y \neq 0, \Rightarrow \frac{(\sin^2 x + \sin^2 y)^2}{\sin^2 x \sin^2 y} > 0$$

~~Решение~~

$$\sin x > \sin y \Rightarrow \sin^2 x > \sin^2 y$$

$$\text{Пусть } \sin^2 x > \sin^2 y, \sin^2 x = \sin^2 y + k$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 y + k}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + k} = 1 + \frac{k}{\sin^2 y} + 1 - \frac{k}{\sin^2 y} = 2 + \frac{k}{\sin^2 y} - \frac{k}{\sin^2 y}$$

$$\sin^2 x > \sin^2 y \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{\sin^2 y} \Rightarrow \frac{k}{\sin^2 x} < \frac{k}{\sin^2 y} \Rightarrow 2 + \frac{k}{\sin^2 y} - \frac{k}{\sin^2 x} > 2$$



Олимпиада школьников «Гранит науки» БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

$$\Rightarrow 2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} > 4$$

$$\text{Если } \sin^2 x = \sin^2 y, \text{ то } 2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$\text{Если } \sin^2 x < \sin^2 y, \text{ то } \sin^2 x < \sin^2 y, \sin^2 y = \sin^2 x + t$$

$$2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} = 2 + 1 + \frac{t}{\sin^2 y} + 1 + \frac{t}{\sin^2 x} = 4 + \frac{t}{\sin^2 x} + \frac{t}{\sin^2 y}$$

$$\sin^2 x < \sin^2 y, \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 y} < \frac{1}{\sin^2 x}, \Rightarrow \frac{t}{\sin^2 y} < \frac{t}{\sin^2 x}, \Rightarrow 4 + \frac{t}{\sin^2 x} + \frac{t}{\sin^2 y} > 4$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \text{ имеет мин. значение } = 4 \text{ при } \sin^2 x = \sin^2 y$$

Ответ: 4

Кей примера

7. Дано:

$$P_1, V_1, P_2, V_2$$

$$A_r = ?$$

Решение:



$$F_n = k \Delta x$$



$$E_n = \frac{k \Delta x^2}{2} = A_r$$

S - площадь поршня

$$F_r = P \cdot S \cdot (P_2 - P_1) \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{\Delta x}$$

$$F_n = F_r; \Rightarrow k \Delta x = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow k \Delta x^2 = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow A_r = \frac{k \Delta x^2}{2} = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2}$$

Ответ: $A_r = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2}$

10. Дано:

$$R_0 = 16(\Omega)$$

$$R_0 = 9(\Omega)$$

$$m, n = ?$$

Решение:



$$U_0 = 400 \text{ В} = U_1$$

$$R_1 = 9 \cdot m; R_0 = \frac{9n}{m} = 16(\Omega), \Rightarrow m = \frac{9n}{16}$$

$$I_1 = \frac{400 \text{ В}}{9n}; I_0 = \frac{400 \text{ В}}{9n} \cdot m$$

$$P = U_0 I_0 = 400 \text{ В} \cdot \frac{400 \text{ В}}{9n} \cdot m = \frac{160000 \text{ В}^2}{9n} \cdot \frac{9n}{16} = 10000 \text{ Вт}$$

Ответ: $P_{\text{max}} = 10000 \text{ Вт}$, 24 Вт - за с одного источника тока.

U_1 - U одной группы элементов
 R_1 - R одной группы элементов
 I_1 - I одной группы элементов



Вариант № 2

В. Дано:

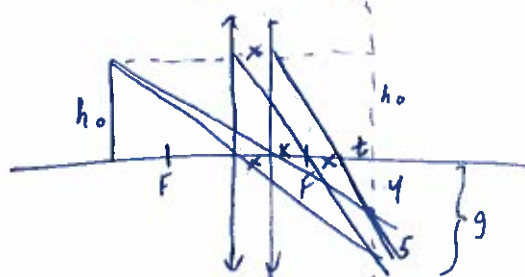
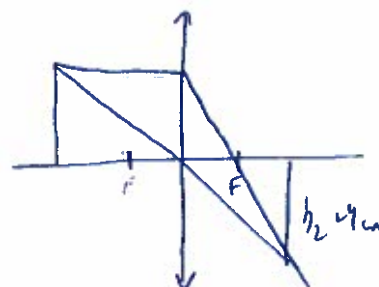
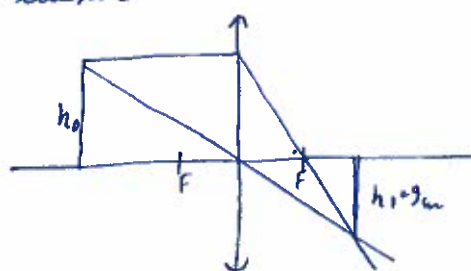
$$h_1 = 9 \text{ см};$$

$$h_2 = 4 \text{ см}$$

Найти:

$$h_0 = ?$$

Решение:



$$\frac{h_1 + h_2}{t+x+t}$$

$$\frac{h_0}{9} = \frac{k+x}{t+x}$$

$$\frac{h_0}{4} = \frac{k+x}{t}$$

$$\begin{cases} \frac{h_0}{9} = \frac{k+x}{t} \\ \frac{h_0-5}{9} = \frac{k}{t+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{(k+x)}{h_0} \\ t+x = \frac{9k}{h_0-5} \end{cases}$$

$$\frac{4(k+x)}{h_0} + x = \frac{9k}{h_0-5}$$

$$h_0 \neq 0, h_0 \neq 5$$

$$\frac{4k+4x+h_0x}{h_0} = \frac{9k}{h_0-5}$$

$$4kh_0 - 20k + (4h_0 + h_0^2 - 20 - 5h_0)x = 9kh_0$$

$$5kh_0 + 20k = x(h_0^2 - h_0 - 20)$$

$$k = \frac{x(h_0-5)(h_0+4)}{5(h_0+4)}$$

$$h_0 > 0, \therefore k = \frac{x(h_0-5)}{5}$$

$$4kh_0 + 4xh_0 + h_0^2x - 20k - 20x - 5h_0x - 9kh_0 = 0$$

$$(h_0-5)h_0$$

$$\Rightarrow \frac{h_0^2x - xh_0 - 20k - 20x + 4kh_0 - 9kh_0}{(h_0-5)h_0}$$

$$-20k - 5kh_0 = 20x + xh_0 - h_0^2x$$

$$k = \frac{(h_0^2 - 20 - h_0)x}{20 + 5h_0} = \frac{(h_0-5)(h_0+4)x}{5(h_0+4)}$$



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

~~1) $h_0 = -0$~~
 ~~$h_0 > 0, \rightarrow h_0 - 40$~~ $\frac{h_0}{g} = \frac{h_0 x - 5 + 5x}{5 \cdot \frac{gK}{h_0 - 5}}$ $\frac{1}{g} = \frac{x(h_0 - 5)}{45x h_0 - 225} \Rightarrow x = \frac{25}{4(h_0 + 5)}$

$\frac{1}{g} t + x = \frac{gK}{h_0 - 5} = \frac{4(K+x)}{h_0} + x = \frac{4(K+x)}{h_0} + \frac{25}{4(h_0 + 5)}$