



Вариант № 4

Задание №1

- Реш 1) $384 \rightarrow$ квадрат какого-то числа. Единственное число, подходящее под $384 \rightarrow 62 \times 62 \Rightarrow$ после произведения данной операции 2 раза, получим число 3844 .
- 2) $62 \rightarrow$ Единственное число, подходящее под квадрат 62 - это 25 $25^2 = 625 \Rightarrow$ после одной данной операции получим число 625
- 3) $25 \rightarrow$ Единственным числом, подходящим под квадрат 25 - является 16 ($16^2 = 256$) $\Rightarrow$ изначально было число 16 .
- $16 \rightarrow 16^2 \rightarrow 256 \rightarrow 25 \rightarrow 625 \rightarrow 62 \rightarrow 3844 \rightarrow 384$ + 65

Ответ: 16

Задание №2 Известно: a - сторона правильного треугольника
Найти: $S_{\text{общ.}} \Sigma S_{\text{окр.}} = ?$



- 1) Радиус окружности, вписанной в самый первый треугольник (со стороной a) находим по формуле $r = \frac{1}{3}h$, где h - высота треугольника



т.к. точки пересечения медиан арав. треугол - центр вписанной окр-ти ; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

- 2) Рассмотрим продолжения, вписанной окр-ти радиуса $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Пусть h_1 - высота этого Δ , тогда $r = \frac{2}{3}h_1$; $h_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{2}$; где a_1 - сторона этого Δ ;
 $r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_1\sqrt{3}}{2} = \frac{a_1\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{a}{2}$



3) Продолжая ту же операцию с окр-тью, вписанной в треугол со стороной a_1 , получаем, что r_1 (той окр-ти) равен $\frac{1}{3}h_1$; h_1 - высота этого $r_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

$$r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r_1 = \frac{2}{3}h_2, \text{ где } h_2 - \text{высота следующего } \Delta$$

$$h_2 = \frac{a_2\sqrt{3}}{2} \quad r_1 = \frac{2 \cdot a_2\sqrt{3}}{3} = \frac{a_2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{a_2\sqrt{3}}{\frac{1}{3}} \quad a_2 = \frac{a}{4}, \text{ получаемся, что при движении}$$

в ширь отек треугольников с одной стороны Δ^k увеличивается по геометрич. прогрессии (в 2р.)

$$a; \frac{a}{2}; \frac{a}{4}; \frac{a}{8}; \frac{a}{16} \text{ и т.д. до } \frac{a}{2^n}$$

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow S_{\Delta_{N1}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\Delta_{N2}} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{16}$$

$$S_{\Delta_{N3}} = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32 \cdot 64} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$$

$$\sum S_{\Delta...} = S_{\Delta} + S_{\Delta_{N2}} + S_{\Delta_{N3}} + \dots + S_{\Delta_{N2n}}$$

$S_{\Delta_{N2}} + S_{\Delta_{N3}} + \dots + S_{\Delta_{N2n}} \Rightarrow$ сумму высот треугольников определять к

$\Rightarrow$ общая сумма площадей всех треугольников будет:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} +$$

Ответ:

Задача №3 $4 + \frac{\lg^2 x}{\lg^2 y} + \frac{\lg^2 y}{\lg^2 x} = 24$

Условия: $x \neq 0$
 $y \neq 0$ ($x \neq y$)

Наименьшие значения выражения достигаются тогда, когда $\frac{\lg^2 x}{\lg^2 y} + \frac{\lg^2 y}{\lg^2 x}$ наименьшее, т.е. минимальное

Положим $\frac{\lg^2 x}{\lg^2 y} = t$, тогда $\frac{\lg^2 y}{\lg^2 x} = \frac{1}{t}$. ($t > 0$)

$t + \frac{1}{t} = 4$; $y' = 0$ так. удобно было использовать

$\Rightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)' = 0$



Вариант № 4

$$1 - \frac{1}{t^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{t^2} \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \quad \text{Вз.}$$

$t = 1 \rightarrow$ точка минимума функции.

$\Rightarrow$ у в. $t = 1$ минимума

Обращаемся к:

$$\frac{tg^2 x}{tg^2 y} = 1 \Rightarrow tg^2 y = tg^2 x \Rightarrow \frac{tg^2 y}{tg^2 x} = 1.$$

$$\Rightarrow 4 + \frac{tg^2 x}{tg^2 y} + \frac{tg^2 y}{tg^2 x} \text{ мин, когда}$$

$$\Rightarrow 4 + 1 + 1 = 6.$$

применяем

3D.

Ответ: 6

$$N4 \quad 673m - pq = 2019$$

$$\frac{2019}{673} = 3 \Rightarrow m \geq 3 \text{ т.к. } p, q \neq 0; 1 \text{ (не могут)}$$

673 - простое число

Пусть $p = 673$, тогда:

$$673(m - q) = 2019$$

$$\Rightarrow m - q = 3$$

$$m = \frac{pq}{673} = \frac{2019}{673} \Rightarrow pq : 673$$

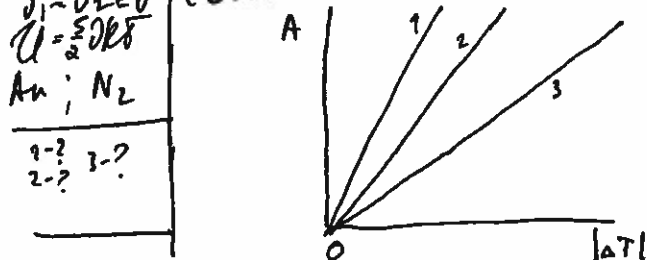
нет такого произведения простых чисел, которое давало бы 673 (искл. 1×673 , но тогда $m = 1$ простое число)

Ответ: нет решения (нет таких чисел, удовлетворяющих уравнению)

Задача № 9

Дано: $p_1 = p_2 = p$
 $U = \frac{5}{2} DR$
 $A_1; N_2$

Реш-е:



1) изобарный процесс; $p = \text{const.}$

$$\Rightarrow A = p \Delta V; p \Delta V = DR \Delta T$$

$$A = DR \Delta T$$

2) адиабатический процесс:

$Q = 0 \Rightarrow$ по 1-му закону термодинамики

$$Q = A + \Delta U \quad | A | = - \Delta U$$

$$A = - \Delta U$$

$$A = \frac{5}{2} DR \Delta T$$

Нет никакого объясн. Только описание процессов.

Для продолжения используйте обратную сторону листа.



Задача №5

Дано: правильная усеченная пирамида AD_1
 $a=4$; $(A_1D_1=A_1C_1=C_1B_1=B_1A_1=a)$

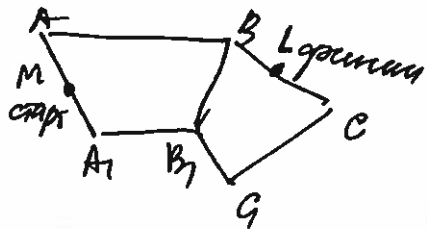
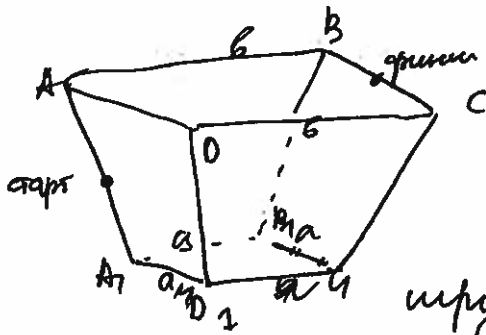
$$b=AB=BC=CD=AD=8$$

Острые углы каждой грани $= 60^\circ$.

Решение:

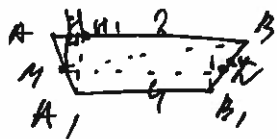
Чтобы найти кратчайшим маршрутом, нужно идти по грани AB_1A_1

$B_1C_1B_1$ т.к. наше маршрута не будет кратчайшим

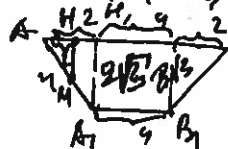


Пусть путь, который был пройден по грани AB_1A_1 равен x , а путь по грани $B_1C_1B_1$ равен y .

$$x+y \rightarrow \min; x \in [6; 2\sqrt{13}]$$



$$M, N - \text{середины сторон } AA_1 \text{ и } BB_1 \text{ соответственно. } \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(A_1B_1 + AB) = \frac{1}{2}(4+8) = 6.$$



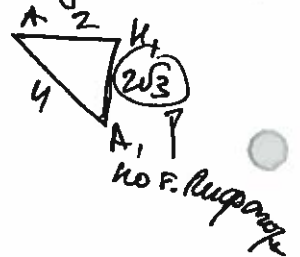
H - высота, проведенная из т. M к AB .

$$MH = \frac{1}{2} A_1H_1 \text{ (т.к. } H_1 - \text{высота, проведенная из т. } A_1 \text{ к } AB_1)$$

$$MH = \frac{1}{2} a\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

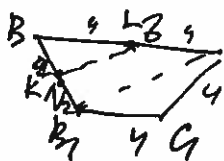
$$HB = AB - AH = 8 - 1 = 7.$$

$$MB = \sqrt{MH^2 + HB^2} = \sqrt{3 + 49} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

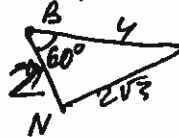


Пусть $NK = z$ (K - точка, в которой путь от старта к финишу пересекает грань $B_1C_1B_1$)

$$x = NK; y = KL \text{ (L - точка финиша)}$$



$$y \in [NL; 4]; NL \in [2\sqrt{3}; 4]; \text{ т.к. } NL \leq 4$$



N, L - середины B_1C_1 и B_1A_1 соответственно по т. косинусов:

$$NL^2 = NB_1^2 + AL^2 - 2 \cdot NB_1 \cdot AL \cdot \cos(\angle NBL)$$

$$NL^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 16 - 8 = 12$$

$$NL = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$y \in [2\sqrt{3}; 4]$$

$$x = \sqrt{MB^2 + BK^2 - 2 \cdot MB \cdot BK \cdot \cos(\angle MBK)}; \cos(\angle MBK) = \frac{1}{2} \text{ (т.к. } \angle MBK = 60^\circ)$$

$$x = \sqrt{52 + BK^2 - 4\sqrt{13} \cdot BK \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{52 + BK^2 - 2\sqrt{13} \cdot BK}$$

$$\text{Найдем } BK \text{ да } z \in [2\sqrt{3}; 2.7]$$



Вариант № 4

$$x = \sqrt{52 + z^2 - 2\sqrt{13}z}; y = \sqrt{16 + z^2 - 2 \cdot 4 \cdot z \cdot \cos(\angle B A_2)} = \sqrt{16 + z^2 - 8z \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{16 + z^2 - 4z}$$

$\angle C B_1 = 60^\circ \Rightarrow \cos \angle C B_1 A_2 = \frac{1}{2}$

$x + y \rightarrow \min$; $x + y = f$; $f' = 0$ т.к. f должно быть минимальным

$$(\sqrt{52 + z^2 - 2\sqrt{13}z} + \sqrt{16 + z^2 - 4z})' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(2z - 2\sqrt{13}) \cdot 1}{\sqrt{52 + z^2 - 2\sqrt{13}z}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2z - 4)}{\sqrt{16 + z^2 - 4z}} = 0$$

$$\frac{z - \sqrt{13}}{\sqrt{52 + z^2 - 2\sqrt{13}z}} = - \frac{z - 2}{\sqrt{16 + z^2 - 4z}} \Rightarrow \frac{(z - \sqrt{13})^2}{52 + z^2 - 2\sqrt{13}z} = \frac{(z - 2)^2}{(16 + z^2 - 4z)}$$

Условия: $\begin{cases} z^2 - 2\sqrt{13}z + 52 \neq 0 \Rightarrow D = 52 - 4 \cdot 52 < 0 \Rightarrow \text{всегда} > 0. \\ z^2 - 4z + 16 \neq 0 \Rightarrow D = 16 - 4 \cdot 16 < 0 \Rightarrow \text{всегда} > 0. \end{cases}$

$$(z^2 - 2\sqrt{13}z + 13)(16 + z^2 - 4z) = (z^2 - 4z + 4)(52 + z^2 - 2\sqrt{13}z)$$

$$16z^2 + z^4 - 4z^3 - 32\sqrt{13}z - 2\sqrt{13}z^3 + 13z^2 + 13 \cdot 16 + 13z^2 - 52z = 52z^2 + z^4 - 2\sqrt{13}z^3 - 452z + 4z^3 - 8\sqrt{13}z^3 + 4 \cdot 12 + 4z^2 - 52 \cdot 2\sqrt{13} \cdot z \Rightarrow 10z^2 - 38z + 8\sqrt{13}z = 0$$

$$z(27z - 118 + 24\sqrt{13}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = \frac{118 - 24\sqrt{13}}{27} > 2 \text{ не год. упр.} \end{cases} \quad z = 0 \Rightarrow B K = 0 \Rightarrow$$

см. проводится на отб

N6
Дано: $d = 5 \text{ м}$
 $a_n = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
 $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
 $F = ?$

Реш-е:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{f+d}{fd} \Rightarrow F = \frac{fd}{f+d}$$

$$F = \frac{f}{d}; F = \frac{u^2}{v^2}; \text{ где } u - \text{ скорость ускорения} \\ v - \text{ скорость предмета}$$

$$u = a_n \cdot t$$

$$v = g \cdot t, \text{ т.к. тело свободно падает}$$

$$F = \frac{a_n^2 t^2}{g^2 t^2} = \frac{a_n^2}{g^2} = \frac{f}{d} \Rightarrow f = \frac{d \cdot a_n^2}{g^2}$$

$$F = \frac{d \cdot a_n^2 \cdot d}{g^2 (d + d \frac{a_n^2}{g^2})} = \frac{d^2 \cdot a_n^2}{d(g^2 + a_n^2)} = \frac{d \cdot a_n^2}{g^2 + a_n^2}$$

$$F = \frac{5 \text{ м} \cdot 0,04 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{100 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + 0,04 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{0,2}{100,04} = \frac{1}{500,2} \approx 0,002 \text{ м}$$

Ответ: $\approx 0,002 \text{ м}$

N7 Дано:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ A_1 &= A_2 \\ \frac{v_1}{v_2} &= 2 \end{aligned}$$

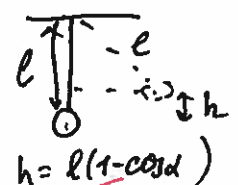
$$\frac{E_1}{E_2} = ?$$

Решение:

$$E = mgl(1 - \cos \alpha); E_1 = mgl(1 - \cos \alpha)$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1 g l_1 (1 - \cos \alpha)}{m_2 g l_2 (1 - \cos \alpha)} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$\begin{aligned} E &= mgh = mgl(1 - \cos \alpha) \\ E_2 &= m_2 g l_2 (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$



нет подвешен к реальности



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

$$v_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}} \quad \text{т.е.} \quad v_1 = \frac{1}{T} \quad (T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}) \quad v_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}} \dots$$

$$v_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}}; \quad v_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}}$$

$$\dots \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} = \frac{1}{v_1} \Rightarrow \sqrt{\frac{L_1}{g}} = \frac{1}{2\pi v_1} \Rightarrow \frac{L_1}{g} = \frac{1}{4\pi^2 v_1^2} \Rightarrow L_1 = \frac{g}{4\pi^2 v_1^2}$$

$$v_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} = \dots \Rightarrow L_2 = \frac{g}{4\pi^2 v_2^2}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{E_1}{E_2} \quad ; \quad \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4} = 0,25 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 4$$

Ответ: в 0,25 раз.

N8 Дано:

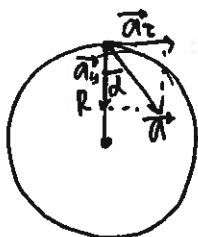
$$a_{\tau} = \text{const}$$

$$t; R; \alpha = 45^\circ$$

$$a_{\text{гн}} = ?$$

Реш-е:

$a_{\text{гн}} = a_{\tau}$ (a_{τ} - центростремительное ускорение)
 a_{τ} - тангенциальное ускорение



$$a^2 = a_{\tau}^2 + a_{\text{гн}}^2$$

$$\frac{a_{\tau}}{\text{const.}} ; a_{\text{гн}} = a \cos \alpha ; \tan \alpha = \frac{a_{\tau}}{a_{\text{гн}}} = 1 \text{ т.к. } \alpha = 45^\circ$$

$$a_{\text{гн}} = \frac{v^2}{R} ; v = v_0 + a_{\tau} t, \text{ где } v_0 = 0 \Rightarrow v = a_{\tau} t$$

$$a_{\text{гн}} = \frac{a_{\tau}^2 \cdot t^2}{R} = a_{\tau}$$

$$a_{\tau} = \frac{a_{\tau}^2 t^2}{R} \Rightarrow 1 = \frac{a_{\tau} t^2}{R} \Rightarrow a_{\tau} = \frac{R}{t^2} = a_{\text{гн}} = a_{\text{гн}}$$

Ответ: $a_{\text{гн}} = \frac{R}{t^2}$

N9 Дано: Проведение: найдем расстояние от вершины до

по MB и BL; MB = $2\sqrt{3}$; BL = 4.

$$\Rightarrow \text{длина пути} = MB + BL = 2\sqrt{3} + 4 \approx 11,21$$

т.к. маршрут пересекает ребро BC в т. B.

Ответ: маршрут пересекает ребро BC в т. B (см. рисунок)

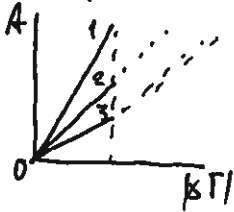
т.е. в дальней от наблюдателя точке $\text{пути} = 8$; длина маршрута равна $\approx 11,21$



Вариант № 4

(Зад. № 9)

т.е. аргон — одноатомный газ. $\Rightarrow U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T / -A$



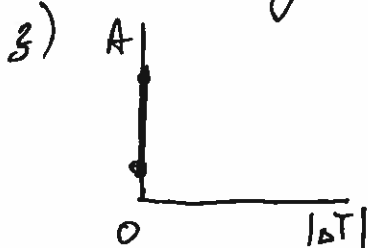
за одну и ту же

За одну и ту же изменение температуры $|\Delta T|$, работа у каждого газа изменяется по-разному:

1 - больше всего работа $\Rightarrow$ это адиабатический процесс, в котором участвует аргон (т.е. одноатомный газ); $A = \frac{5}{2} \nu R \Delta T$

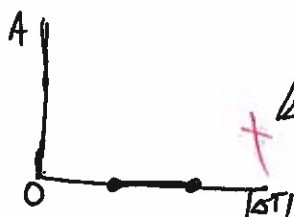
2 - адиабатический процесс аргона: $A = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$ (т.е. если бы он был изобарным, то $A = \nu R \Delta T$, что меньше)

3 - может быть изобарный процесс, в котором может участвовать как Ar , так и N_2



• Изотермический процесс: $T = const. \Rightarrow \Delta T = 0$

• изотерма будет располагаться на прямой $A = 0$ т.е. там $|\Delta T| = 0$ т.е. $T = const$, она будет смещаться след вверх, след вниз



• Изохорический процесс: $V = const \Rightarrow A = 0$ (р.л. V)

• изохора будет располагаться на прямой $A = 0$ т.е. там она = 0 и будет смещаться след вверх, след вниз

Ответ: 1 - изобарный (аргон) 2 - адиабатический (аргон) 3 - изобарный N_2 / Ar

№10 Дано:

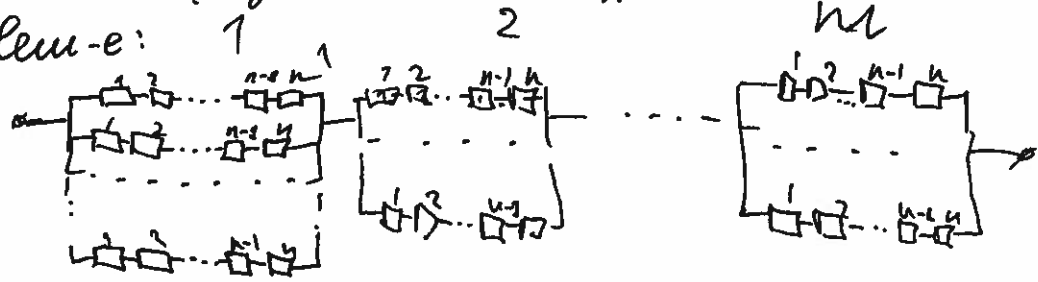
$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \dots$$

$$R = 20 \Omega$$

$$r = 10 \Omega$$

$$I = max$$

$$m = ? n = ?$$



Чтобы I был максимален, нужно, чтобы

Каждый из них был подобран определенным способом.



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

$$K_{обм} = \frac{n \cdot k}{2} \cdot m + K \quad \left(K_{изм} = \frac{n \cdot k}{2}, \text{также зависит от } m \right)$$

↑
последний режим ; т.к. $v = 1, m$

$$K_{обм} = \frac{nm}{2} + K \quad E_{обм} =$$

$$I = \frac{E_{обм}}{K_{обм}} \Rightarrow \max ; K_{обм} \text{ должно быть минимальным}$$

$$K_{обм}' = 0$$

0.5