



Вариант № 2

N1

Число 14:

$$14^2 = 196$$

Зачеркиваем посл. цифру $\rightarrow 19$

$$19^2 = 361$$

Зачер. посл. цифру $\rightarrow 36$

$$36^2 = 1296$$

Зачер. посл. цифру $\rightarrow 129$.

Ответ: 14.

N2.

Пусть S_1 - площадь первого вв треугольника $\Rightarrow$
 $S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2}{2} \cdot r_1$, где r_1 - радиус впис. окр $\Rightarrow$

$$r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow r_1 = \frac{a}{2}$$

Теорема синусов для Δ впис в окр радиусом r_1 :

$$\frac{x}{\sin 60^\circ} = 2r_1 \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \text{сторона нового } \Delta \text{ равно}$$

половине предыдущей $\Rightarrow r_2 = \frac{r_1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12} \Rightarrow$ радиус будет
постоянно уменьшаться в два раза $\Rightarrow S_1 + S_2 + \dots + S_n =$

$$= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \dots + \pi r_n^2 = \pi r_1^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) = \pi r_1^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi r_1^2 \cdot 4}{3} =$$

$$= \frac{\pi \cdot a^2 \cdot 3}{4 \cdot 6^2} = \frac{\pi a^2 \cdot 3}{4 \cdot 36} = \frac{\pi a^2}{48}$$

Ответ: сумма площ. равна $\frac{\pi a^2}{48}$

* - сумма бесконечно убывающей геометрической
прогрессии, где $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{4}$.

± 24

4.



№3.

$$+ \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}$$

$$\text{т.к. } \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} > 0 \text{ и } \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} > 0 \Rightarrow \text{по неравенству Мёгера}$$

средних ариф. и средних геометрических для 3 $\Rightarrow$

$$\frac{2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}}{3} \geq \sqrt[3]{2 \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} \cdot \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}} \Rightarrow 2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2}$$

Равенство при $2 = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} = \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}$ — неверно. Тогда заменим

$$\frac{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}}{2} \geq \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} \cdot \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}} \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \geq 2 \Rightarrow 6$$

симметричная сумма при $\sin x = \sin y$ и равно два $\Rightarrow$

$$\text{или } \left(2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \right) = 2 + 2 = 4.$$

нет примеров.

ответ: 4.

№4

$$m + pq = 2013$$

$$\text{т.к. } 3m \div 3 \text{ и } 2013 \div 3$$

12.

$\Downarrow$
 $pq \equiv 0 \pmod{3}$, т.к. q и p — простые, то одно из них

ли оба равны 3. Пусть $q=3$ (аналогично, если $p=3$) $\Rightarrow$

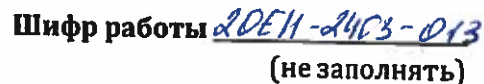
$$3m + 3p = 2013 \Rightarrow m + p = 673, \text{ т.к. } \text{неч.} + \text{неч.} = \text{чет} \Rightarrow$$

одно из чисел m, p — четно, $\Rightarrow$ равно 2 $\Rightarrow$ другое равно

671, но $671 = 66 \cdot 11$ — составное число $\Rightarrow$ сумма

простых чисел не может равняться 673 $\Rightarrow q$ и $p \neq 3, \Rightarrow$ Страница 2

решений нет (т.к. если $p=q=3 \Rightarrow m=670, 670$ — чет. число)



Вариант N- 2
 Ответ: решение в проектные положениях не влечет. +
 N5.



- длина $\sqrt{1+1+4-2+2x} = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow$
 минимизируем: $AB+BR = \sqrt{9+x^2+3x} + \sqrt{x^2+3}$, или вообще при росте x
 длина растет, а т.к. $x \geq 0 \Rightarrow$ мин. длина минимизируется при $x=0$.
 длина равна: $\sqrt{9+0+0} + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$. Минимум пересекает ребро DE в
 середине.



Diagram description: A horizontal rod AB of length l is pivoted at A. A string is attached to B and a fixed point O above A. The string has two segments, each of length $l/4$. The angle between the string and the rod is 60° . A weight Mg is suspended from B, and a weight $\frac{mg}{2}$ is suspended from the rod at a distance $l/4$ from A. The rod is horizontal and in equilibrium.

1) $OM \perp AB$

24. $HA = HB \Rightarrow$ центр тяжести
AB лежит в точке H.

$$Mg \cdot \frac{L}{4} = \frac{mg}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot (1 - \cos 60^\circ)$$

$$\frac{M}{4} = \frac{m}{16} \Rightarrow M = \frac{m}{4}.$$

2mbem: $\frac{m}{4}$

N7.

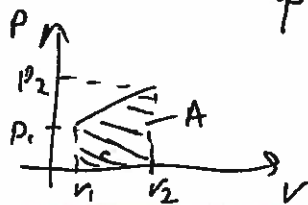
ρ - плотность поршня, m - масса, P_0 - давление среды, μ - коэффициент трения, ℓ - начальная статическая деформация $\Rightarrow$

$$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S} + \frac{K\ell}{S}$$

$$p(x) = p_0 + \frac{mg}{s} + \frac{k(l+x)}{s}, \text{ m.k. } p_0 + \frac{mg}{s} = \text{const}, \quad \frac{k}{s} = \text{const} \Rightarrow \frac{kl}{s} = \text{const}$$

$$p(x) = a + bx, \text{ with } a = p_0 + \frac{m_0}{S} + \frac{K_e}{S}, b = \frac{K}{S} \text{ so}$$

Зависимость $V = x \cdot S \Rightarrow \rho$ давление зависит линейно от p_m



$$A = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1)$$

Объем растет, т. к. температура растет.

$$\text{Imbenn: } \frac{P_1 + P_2}{2} (V_2 - V_1)$$



Вариант № 2

Пусть a - высота предмета, f - нач. расстояние от предмета до линзы, d - нач. расстояние от линзы до изобр., x - насколько передвинем линзу.

$$1) \frac{a}{a} = \frac{d}{f} \Rightarrow f = \frac{ad}{a}$$

$$2) \frac{b}{a} = \frac{d-x}{f+x} = \frac{4f+4x}{f+x} = \frac{ad-ax}{f+x} \Rightarrow \frac{4ad}{a} + 4x = ad - ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(4+a) = ad - \frac{4ad}{a} \Rightarrow x = \frac{5ad}{a(4+a)}$$

$$3) \frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

$$\frac{1}{f+x} + \frac{1}{d-x} = \frac{1}{F}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{ad} + \frac{1}{d} = \frac{1}{\frac{ad}{a} + \frac{5ad}{a(4+a)}} + \frac{1}{d - \frac{5ad}{a(4+a)}}$$

$$\frac{a+a}{ad} = \frac{a(4+a)}{4ad+a^2d+5ad} + \frac{a(4+a)}{36d+9ad-5ad}$$

$$\frac{a+a}{a} = \frac{36+9a}{9a+a^2} + \frac{36+9a}{36+4a}$$

$$\frac{a+a}{a} - \frac{36+9a}{a(9+a)} = \frac{36+9a}{4(9+a)} = 0$$

$$\frac{4(9+a)^2 - 4(36+9a) - 36a - 9a^2}{4a(9+a)} = 0 \Rightarrow$$

$$4 \cdot (81 + 18a + a^2) - 4 \cdot 36 - 36a - 36a - 9a^2 = 0$$

$$4 \cdot 81 + 4 \cdot 18a + 4a^2 - 4 \cdot 36 - 72a - 9a^2 = 0$$

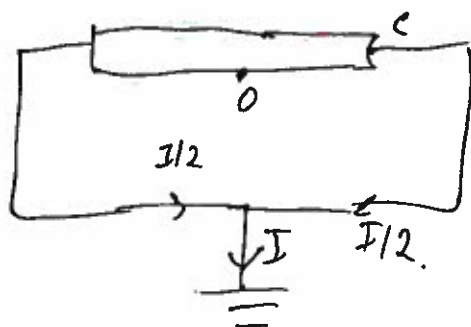
$$4 \cdot (81 - 36) = 5a^2 \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 45}{5}} = \pm 2 \cdot 3 = \pm 6 \Rightarrow$$

$$a = 6.$$

Ответ: 6. чего?



№ 9

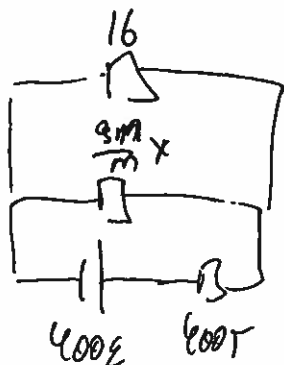


Пусть ток через R' в точке O равен $I/2$, тогда в точке C : $I/2 = \frac{R}{2} \cdot \frac{R'}{2}$, т.к. параллельно соединены $\Rightarrow$
 $I_0 - I_C =$
 $I_0 - I_C = \frac{I}{2} \cdot R'$
 $R' = \frac{R}{2}$ - т.к. параллельно соединены $\Rightarrow$
 $\Rightarrow I_0 - I_C = \frac{IR}{4}$

Ответ: $\frac{IR}{4}$.

№ 10.

Пусть элементы батарей соедин. посл.



* Сопротив. всей цепи:
 $R_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)^{-1} \Rightarrow R_1 = \frac{mR_2}{n}$, где $R_2 = R_{\text{бат}}$
Г. сопротив. бат.

$\Rightarrow \frac{400E}{400R + \frac{16 \cdot 3m}{16m+3n}}$

$P = I^2 R = \frac{(400E)^2 \cdot 16}{\left(400R + \frac{16 \cdot 3n}{16m+3n} \right)^2}$, чтобы P макс $\Rightarrow$

$\frac{6 \cdot 3n}{3m+3n} - \text{или}$
 $\left(f(n) \right)' = \left(\frac{16 \cdot 3n}{16m+3n} \right)' = \frac{16 \cdot 3(16m+3n) - 16 \cdot 3n \cdot 3}{(16m+3n)^2} \stackrel{f'(n)=0}{=} \frac{16 \cdot 3(16m+3n) - 16 \cdot 9n}{(16m+3n)^2} = 0 \Rightarrow$



Вариант № 2

$$(f|m)' = -\frac{16 \cdot 9n \cdot 16}{(16m+9n)^2}$$

$$(f|n)' + (f|m)' = \frac{16^2 \cdot 9 \cdot m}{(16m+9n)^2} - \frac{16^2 \cdot 9n}{(16m+9n)^2} = 0 \Rightarrow m = n \Rightarrow$$

при $m = n$, получается во внешней цепи максимальный.

Ответ: $m = n$.



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ