



Вариант № 2

Задача 2. $\triangle ABC$ - правильный; $AB = BC = AC = a$.

Сфера = ? (последовательно вписанным).

Решение. O - центр описанности, впис. в $\triangle ABC$ - точка пересечения медиан и биссектрис $\Rightarrow$ медиан и высот (т.к. $\triangle ABC$ - правильный).

Радиус первой сф. = $OH = \frac{1}{3} BH$ (медианы, высоты и биссектрисы).

$OH = \frac{1}{3} BH$, т.к. медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1 от вершины.

$AH = HC = \frac{1}{2} a$ (BH - медиана).

$BH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (по т. Пифагора в $\triangle ABH$). $OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$S_{сфера} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{36 \cdot 12} = \frac{\pi a^2}{12}$$

Рассмотрим 2 сф. и 2 треугольника. радиус первого круга = $\frac{2}{3} A_1 H_1$. ($A_1 H_1$ - медиана, биссектриса и высота).

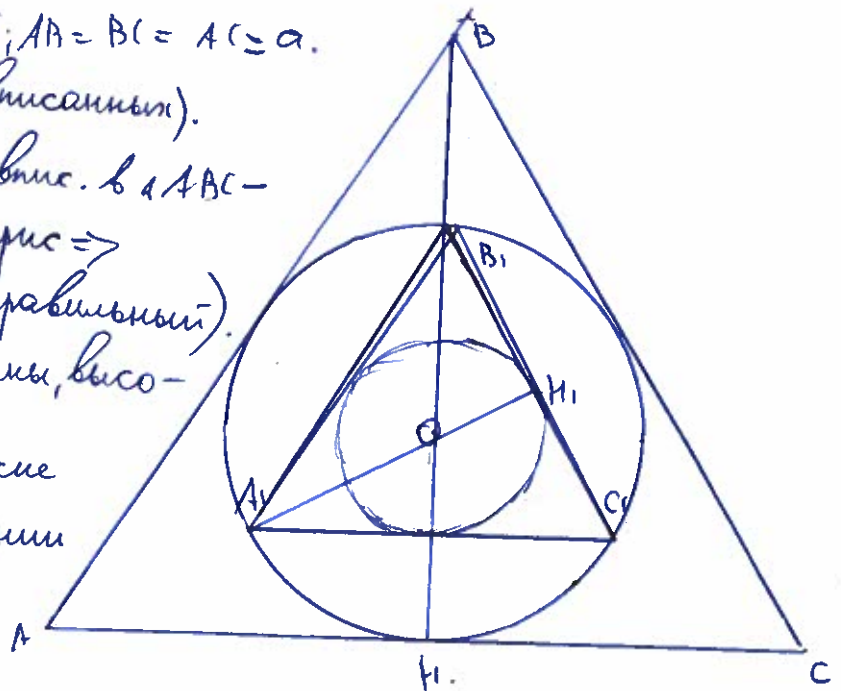
$$\frac{2}{3} A_1 H_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} A_1 H_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12} = R_{2 сф.} \quad S_{2 сф.} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 \cdot \pi =$$

$$= \frac{a^2 \cdot 3 \cdot \pi}{144} = \frac{a^2 \pi}{48} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2 \pi \cdot 48}{a^2 \pi \cdot 12} = 4 \quad \text{То есть площадь}$$

каждого последующего круга < предыдущего в 4 раза, то есть площади кругов образуют бесконечно убывающую геом. прогрессию, сумма членов которой: $S = \frac{a^2 \pi}{12 \cdot (1 - \frac{1}{4})} = \frac{4a^2 \pi}{12 \cdot 3} = \frac{a^2 \pi}{9}$

Ответ: $\frac{a^2 \pi}{9}$.

+7





Задача 1.

Решение: квадрат некоего числа $n =$ от 1290 до 1299 (последняя зачеркнутая цифра = от 0 до 9).

$36 \times 36 = 1296 \Rightarrow$ ~~это~~ $n = 36$. Квадрат некоего числа $k =$ от 360 до 369.

$19 \times 19 = 361 \Rightarrow k = 19$. Квадрат некоего искомого числа $m =$ от 190 до 199.

$14 \times 14 = 196 \Rightarrow m = 14$.

Ответ: 14.

+6

$$\begin{array}{r} 36 \\ \sqrt{1296} \\ 1296 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \sqrt{361} \\ 361 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \sqrt{196} \\ 196 \\ \hline 0 \end{array}$$

Задача 3.

$$y = 2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \quad y_{\min} = ?$$

Решение: пусть $\frac{\sin x}{\sin y} = a$. Тогда: $2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} = 2 + a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Найдем производную. $y'(a) = 2a - \frac{2}{a^3}$. $2a - \frac{2}{a^3} = 0$ ($a^3 \neq 0$; $a \neq 0$)

$$2a^4 - 2 = 0 \quad | :2$$

$$a^4 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$



$a = -1$ и $a = 1$ — точки минимума функции $\Rightarrow$

Если $\sin x = \sin y$, то:

$$y = 2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} = 2 + 1 + 1 = 4.$$

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = 1 \\ \frac{\sin x}{\sin y} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \sin y \\ \sin x = -\sin y \end{cases}$$

Если $\sin x = -\sin y$, то: $y = 2 + \frac{(-\sin y)^2}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{(-\sin y)^2} = 4.$

+8

Ответ: 4.

Задача 7. V_1 и P_1 — нач. объем и давление. T_1 ; V_2 и P_2 — конечные объем и давление. $A = ?$

Решение: * из уравнения Менделеева-Клапейрона: $T_{\text{нач}} = \frac{P_1 V_1}{\nu R}$;

$$T_{\text{кон}} = \frac{P_2 V_2}{\nu R} \quad T_{\text{кон}} > T_{\text{нач}} \Rightarrow P_2 V_2 > P_1 V_1.$$

Если ∇T , то это происходит из-за увеличения давления. Так как с увеличением давления увеличивается сила давления.



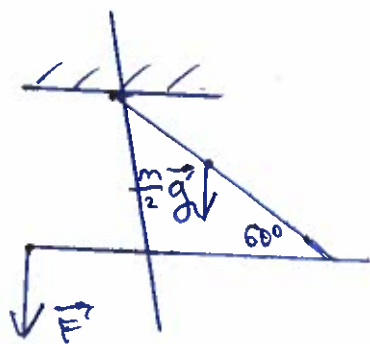
Вариант № 2

газа на поршень, который преодолевает силу гравитации и двигает поршень вверх, тем самым увеличивая объём. Поэтому при нагревании увеличиваются и объём, и давление. (это показано на графике).

$$A = S_{\text{под поршнем}} = S_{\text{трапеции}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot (V_2 - V_1)$$

Ответ: $\frac{(P_1 + P_2)(V_2 - V_1)}{2}$

Задача 6.



Чтобы стержень удерживался в равновесии, должно выполняться правило моментов отн. точки O:

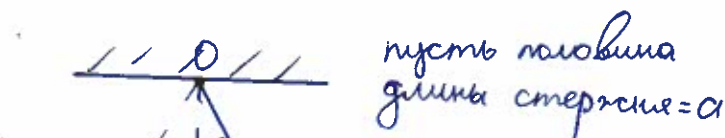
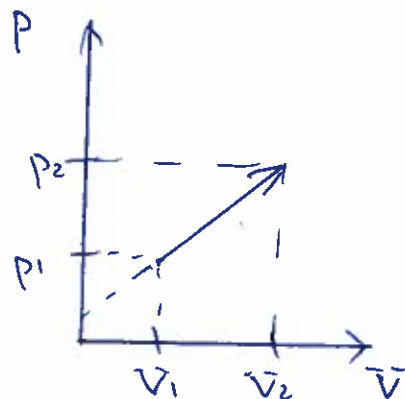
$$F \cdot \frac{a}{2} = \frac{m}{2} \cdot l \cdot 10 \Rightarrow \triangle OKS, KS = SO \text{ по условию; } \Rightarrow \triangle OKS - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle SKO = \angle KOS = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ. \angle OKS = \angle KSO = \angle SKO = 60^\circ \Rightarrow \triangle OKS - \text{правильный}$$

KS и SO равны $\Rightarrow$ содержат по половине массы всей стержня. Силы тяжести и половины приложены к серединам. $\Rightarrow b = \frac{1}{2}$ ср. линии $\triangle OKS = \frac{1}{4}a. \Rightarrow F = \frac{10m \cdot \frac{a}{2}}{2 \cdot \frac{1}{4}a} = \frac{10m}{4}$; $m \text{ груза} = \frac{F}{g} = \frac{m}{4}$.

* момент для силы, действующей на горизонтальную половину, $= 0$, т.к. $M = Fd$, $ad = 0$.

Ответ: $\frac{m}{4}$.

5



пусть половина длины стержня $= a$



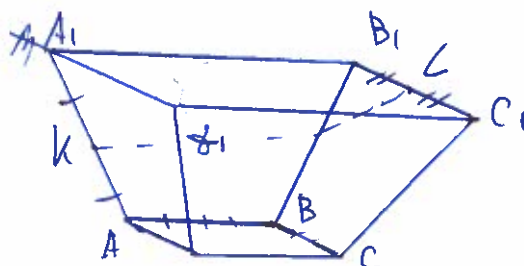
Задача 5. $AB = BC = CA = AX = 2$;

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = AX = 2;$$

$$A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = \angle A_1 = 4;$$

$$\angle \angle A_1C_1 = \angle \angle C_1C = 60^\circ \text{ (аналогично вост. углам)}. A_1K = KA; B_1L = LC. \angle KCL (\text{min}) = ?$$

Решение: кратчайший маршрут можно отметить на развертке граней A_1ABB_1 и B_1BCC_1 .



$\angle K A_1 B_1 L. \angle K A_1 B_1 + \angle A_1 B_1 L = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow AK \parallel B_1L$ ($\angle K A_1 B_1$ и $\angle B_1 A_1 L$ - смежные). $\Rightarrow A_1 B_1 L K$ - трапеция.

Проведем $KH \parallel A_1B_1$.

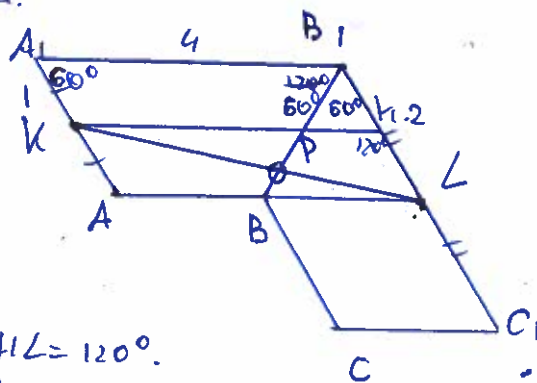
$AK \parallel B_1H; AB_1 \parallel KH \Rightarrow AKB_1HK$ - параллелограмм.

$$\Rightarrow KH = A_1B_1 = 4;$$

$$B_1H = AK = 1 \Rightarrow HL = 2 - 1 = 1;$$

$$\angle K H B_1 = \angle K A_1 B_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle K H L = 120^\circ.$$

($\angle K H B_1$ и $\angle K H L$ - смежные).



По теореме косинусов: $KL = \sqrt{4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$

$\angle K A_1 L. KA \parallel HL; KA = HL = 1 \Rightarrow KALH$ - параллелограмм; $\Rightarrow$

$$AL = A_1B_1 = 4; KL = KH = A_1B_1 = 4; AB = 2 \Rightarrow BL = 2.$$

$KH \cap B_1B = P. KP \parallel AB; AK = KB \Rightarrow KP$ - средняя линия трапеции $A_1ABB_1 \Rightarrow$

$$KP = \frac{4+2}{2} = 3. \angle KPO \text{ и } \angle OBL \text{ (о-тосия пересечения } KL \text{ и } B_1B).$$

$KP \parallel BL \Rightarrow \angle PKO = \angle KLB$ (накрест лежащие); $\angle KOP = \angle BOL$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle KOP \sim \triangle BOL$ (по 2 углам). $\Rightarrow \frac{BO}{OP} = \frac{BL}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow BO = \frac{2}{5} \cdot BP; PO = \frac{3}{5} \cdot BP.$

KP - средняя линия - отсекает от A_1ABB_1 равнобед. трапецию, т.к.

A_1ABB_1 - равнобед. трапеция ($AA_1 = BB_1 = 2$). $\Rightarrow BP = AK = 1 \Rightarrow BO = \frac{2}{5}; PO = \frac{3}{5}.$

$$OB_1 = \frac{3}{5} + 1 = 1\frac{3}{5}. \frac{BO}{OB_1} = \frac{\frac{2}{5}}{1\frac{3}{5}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$



Вариант № 2

Ответ: кратчайшее 3-го порядка прямая в развертке граней AD_1B_1B и BB_1C_1C .
(то есть в положении этих граней так, чтобы они лежали в 1 плоскости).
Это расстояние $= \sqrt{21}$; маршрут делит преодолеваемое ребро в отношении $4:1$ считая от нижней точки ребра.

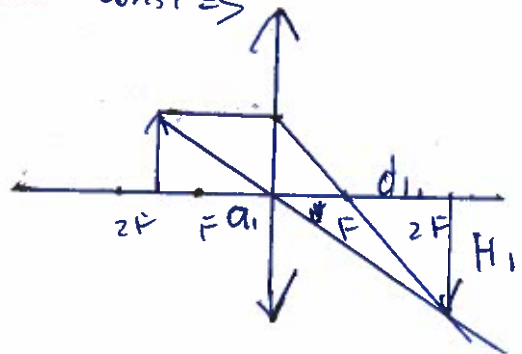
Задача 8. Дано: $H_1 = 9 \text{ см}$; $H_2 = 4 \text{ см}$; $h = ?$; ~~$d_1 + d_2 = a$~~ $a_1 + d_1 = a_2 + d_2$; + 17

Решение: из подобия треугольников видно, что:

$$\begin{cases} \frac{h}{H_1} = \frac{a_1}{d_1} \\ \frac{h}{H_2} = \frac{a_2}{d_2} \end{cases}$$

8 между предметом и экраном $= \text{const} \Rightarrow a_1 + d_1 = a_2 + d_2$.

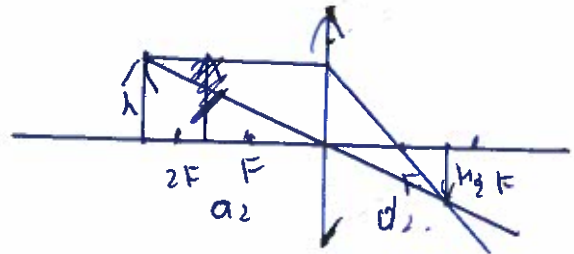
$$F = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{d_2}$$



$$\frac{a_1 + d_1}{a_1 d_1} = \frac{a_2 + d_2}{a_2 d_2}; a_1 + d_1 = a_2 + d_2 \Rightarrow$$

$$a_1 d_1 = a_2 d_2.$$

Из подобия следует, что:



$$\begin{cases} \frac{h}{H_1} = \frac{a_1}{d_1} \\ \frac{h}{H_2} = \frac{a_2}{d_2} \end{cases}$$

поделим на 2.

$$\Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{a_1 d_2}{a_2 d_1} = \frac{4}{9}.$$

$$\begin{cases} \frac{a_1 d_2^2}{a_2 d_1} = \frac{4}{9} \\ \frac{a_1 d_1}{a_2 d_2} = 1 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{a_2 d_2}{d_1}$$

$$\frac{(d_2)^2}{(d_1)^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{a_2 d_2 d_2}{a_2 d_1 d_1} = \frac{4}{9}.$$

Из подобия следует, что:

$$a_1 = \frac{h d_1}{9}; a_2 = \frac{h d_2}{4} \Rightarrow \frac{1}{9} d_1 + d_1 = \frac{1}{4} d_2 + d_2$$



$$\begin{cases} d_1 \cdot \left(\frac{h}{9} + 1\right) = d_2 \cdot \left(\frac{h}{4} + 1\right) \\ \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2d_1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$d_1 \cdot \left(\frac{h}{9} + 1\right) = \frac{2d_1}{3} \cdot \left(\frac{h}{4} + 1\right)$$
$$\frac{h}{9} + 1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{h}{6} - \frac{1}{9} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$\frac{h}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{18}{3} = 6.$$

Ответ: 6 см.

10