



Вариант № 3

1) Составим математич. модель задачи:

x - цена производителя

$1,7x$ - цена после первого увеличения

$1,7 \cdot 1,7x$ - цена в магазине

По условию в магазине цена составила 515, т.е.

$$1,7 \cdot 1,7 \cdot x = 515$$

$$1,89x = 515$$

$$189x = 51500$$

$$x = \frac{51500}{189} = 272,4...$$

Примечание:

возмущения
вспомогательная в ставим
на переписи

$$\begin{array}{r} 515000 \overline{) 189} \\ 378 \end{array} \quad \begin{array}{r} 189 \\ 272,4... \end{array}$$

$$1370$$

$$1323$$

$$470$$

$$378$$

$$920$$

$$189$$

$$164...$$

Этот ответ не подходит, т.к. 1) Мы считали без округлений, а в задаче говорится в условии
2) x - натур. число (по условию).

Пусть ~~наш ответ~~ x - реальное значение меньше найденного
наш числа, т.к., иначе же, мы считали без учета округлений

(Далее я проверю, какая цена была бы в случае $x = 272$:
 $272 \cdot 1,7 = 462,4 \approx 462$; $462 \cdot 1,7 = 785,4 \approx 785$)

След., проверяя значение целочисленной цены товара при $x < 272$ можно
подобрать верный ответ. Для экономии времени я проверю
значения x с шагом -60, т.е. 270, 260, ...

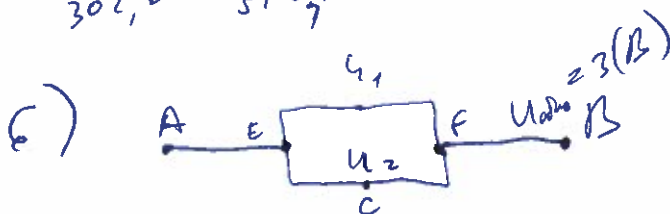
При $x = 180$: ~~180~~ $180 \cdot 1,7 = 306$; $306 \cdot 1,7 = 520,2 \approx 520$

Проверю близлежащие значения и найду подходящий ответ:
 $x = 178$

($178 \cdot 1,7 = 302,6 \approx 303$; $303 \cdot 1,7 = 515,1 \approx 515$
 $515 = 515$).

$$\begin{array}{r} 55 \\ \times 178 \\ 1,7 \\ \hline 1246 \\ 178 \\ \hline 302,6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 303 \\ \times 1,7 \\ \hline 2121 \\ 303 \\ \hline 515,1 \end{array}$$

Ответ: цена производителя 178.



- альтернативная схема

при параллельном соединении

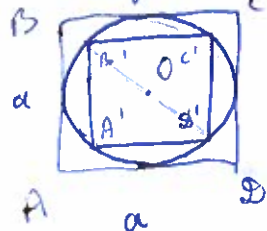
напряжение ~~на~~ на напряжение
на перемычке равно 0.

$U_{AB} = U_1 + U_2$, след.



Олимпиада школьников «Гранит науки» БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

- 2) Если сторона самого большого квадрата это a , то радиус вписанной в него круга (т.е. самого большого круга) это $\frac{a}{2}$, т.к. диаметр вписанного в квадрат круга равен половине стороны квадрата.
~~Сторона вписанного в круг квадрата равна~~



$$AB = AD = B'D' = a$$

$$\text{Пусть } A'B' = A'D' = x$$

$$A'B'^2 + A'D'^2 = B'D'^2 \quad (\text{по т. Пифагора})$$

$$x^2 + x^2 = a^2; \quad 2x^2 = a^2; \quad x^2 = \frac{a^2}{2}; \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{т.е. } A'B' = A'D' = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Таким образом (я найду длину стороны второго квадрата) можно установить последовательную зависимость стороны квадрата от диаметра описанного круга!

Диаметр опис. круга	—	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4\sqrt{2}}$	...
сторона квадрата	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4\sqrt{2}}$	$\frac{a}{8}$	

Пусть S — сумма площадей всех квадратов на рисунке, тогда:

$$S = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{16} \dots$$

Это геометрическая прогрессия, где $b_1 = a^2$; $q = \frac{1}{2}$ (первый член) (число, на которое нужно умножить член прогрессии, чтобы получить следующий)

Сумма n членов геом. прогрессии: $S_n = \frac{b_1(2^n - 1)}{2 - 1}$

В нашем случае n стремится к бесконечности, тогда

$$S = \frac{a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \approx \frac{a^2 \cdot (-1)}{-0,5} = 2a^2 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $2a^2$ (квадратных единиц)

Примечание: $n \rightarrow \infty$, след. $\frac{1}{2}^n \rightarrow 0$, след. $\left(\frac{1}{2}^n - 1\right) \rightarrow -1$
 $n \rightarrow \infty$ — стремится



Вариант № 3

$$3) \quad 3 + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x}$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ y \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases} \begin{cases} \cos y \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

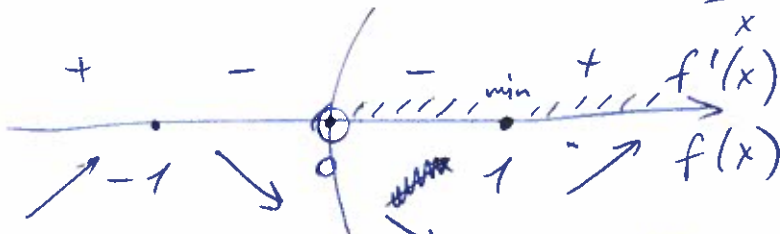
Пусть $\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} = X$ тогда $\frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} = \frac{1}{X}$;

Рассмотрим функцию

$$y = 3 + X + \frac{1}{X} \quad \left(\begin{array}{l} \text{нам нужно найти} \\ \text{её мин. значение} \end{array} \right)$$

Производная: $y' = 1 - \frac{1}{X^2}$; Крит.: $1 - \frac{1}{X^2} = 0$

$$\frac{X^2 - 1}{X^2} = 0; \quad \begin{array}{l} \text{Крит. чис.: } \pm 1 \\ \text{Крит. знам.: } 0 \end{array}$$



Стрелки - убывание/возрастание функции

$X > 0$, поэтому нас интересует только заштрихованная часть графика. На ней функция достигает наименьшего значения при $X = 1$, след. $y_{\min} = f(1) = 3 + 1 + \frac{1}{1} = 5$

Следовательно, наименьшее значение выражения

$$3 + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} \quad \text{равно } 5.$$

(Оно достигается при $\begin{cases} |\cos x| = |\cos y| \\ \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases}$)

Ответ: 5

$$4) \quad 673m + p^2 = 2019 \quad (m, p, q - \text{простые}; m > 0; p > 0; q > 0)$$

1. Если $m \geq 5$, то решений нет, т.к. $673 \cdot 5 > 2019$, а (4 не рассматриваем, т.к. 4 - не простое число) произведение p^2 это обязательно нечетное число по условию

2. $m = 3$

$$673 \cdot 3 + p^2 = 2019$$

$$2019 + p^2 = 2019 \quad - \text{решений нет, т.к. } \begin{cases} p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \text{ по ум.}$$



Олимпиада школьников «Гранит науки» БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

3. $m=2$: $673 \cdot 2 + p^2 = 2019$
 $1346 + p^2 = 2019$

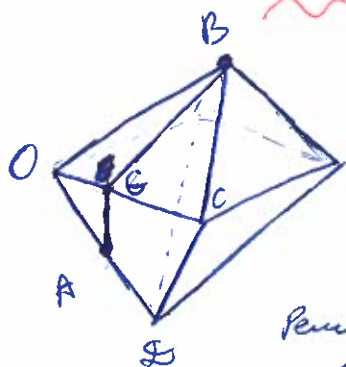
$p^2 = 673$ - простое число, след. получаем
 два решения: $\begin{cases} 1. m=2; p=1; q=673 \\ 2. m=2; p=673; q=1 \end{cases}$

4. $m=1$: $673 \cdot 1 + p^2 = 2019$
 $673 + p^2 = 2019$

$p^2 = 1346$ - получаем ещё два решения:
 $\begin{cases} m=1; p=2; q=673 \\ m=1; p=673; q=2 \end{cases}$
 больше решений в этом случае
 быть не может, т.к. 673 - простое число.

Ответ: 1. $m=2; p=1; q=673$
 2. $m=2; p=673; q=1$
 3. $m=1; p=2; q=673$
 4. $m=1; p=673; q=2$

5)



Дано: A - точка вершина
 B - точка вершина
 $\triangle BOC$ и $\triangle COB$ - правильные
 все грани равны 6

Решение:

$OA = OD = 3$

1. Пусть G - точка пересечения продолжения
 диагонали с ~~резан~~ OC .

2. $\triangle BOG$: по теореме косинусов $BG^2 = OB^2 + OG^2 - 2 \cdot OB \cdot OG \cdot \cos \angle BOG$
 $\angle BOG = 60^\circ$ (т.к. $\triangle BOC$ - правильный), след. $\cos \angle BOG = \frac{1}{2}$
 ~~$OB = 6$~~ $OB = 6$; след. $BG^2 = 36 + OG^2 - OB \cdot OG$

3. $\triangle AOG$: по теореме косинусов $AG^2 = OA^2 + OG^2 - 2 \cdot OA \cdot OG \cdot \cos \angle GOA$
 $\angle GOA = 60^\circ$ (т.к. $\triangle AOC$ - правильный), $\cos \angle GOA = \frac{1}{2}$; $OA = 3$
 след. $AG^2 = 9 + OG^2 - OA \cdot OG$

4. ~~Решение~~
 Пусть S - сумма квадратов AG и GB . Тогда
 $S = AG^2 + GB^2 = 9 + OG^2 - OA \cdot OG + 36 + OG^2 - OB \cdot OG =$
 $= 45 + 2 OG^2 - \cancel{OG} OG (OA + OB) =$
 $= 45 + 2 OG^2 - 9 OG$



Вариант № 3

5. Пусть $S=y$, $OG=x$. Рассмотрим функцию

$$y = 45 + 2x^2 - 9x$$

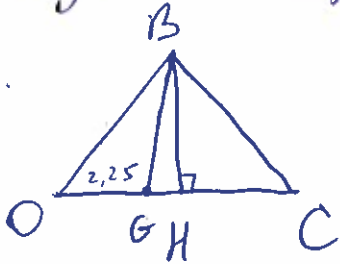
$y = 2x^2 - 9x + 45$ — парабола, ветви направлены ~~вверх~~.

x_0 ; y_0 — коорд. вершины (в нас ~~направлена~~ функция ~~принимает~~ наименьшее значение)

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Следовательно $OG = 2,25$. Это как раз искомая длина отрезка OG (координата точки G) при котором путь от старта до финиша окажется кратчайшим.

6.



$\triangle OBC$: BH — высота (и медиана, и биссектр. $\angle OBC$)

$$GH = OH - OG = 3 - 2,25 = 0,75 = \frac{3}{4}$$

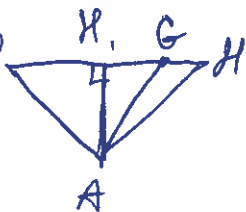
$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

(по т. Пифагора)

$$BG = \sqrt{BH^2 + GH^2} = \sqrt{27 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{108}{4} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{111}{4}} = \frac{\sqrt{111}}{2}$$

(по т. Пифагора)

7.



$\triangle AOH$: тоже равнобедренный, т.к. он подобен $\triangle OBC$ по 2 сторонам и углу между ними.

$$AH_1 \perp OH_1;$$

$$H_1G = OG - OH_1 = 2,25 - 1,5 = 0,75 = \frac{3}{4}$$

$$AH_1 = \sqrt{OA^2 - OH_1^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36-9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(по т. Пифагора)

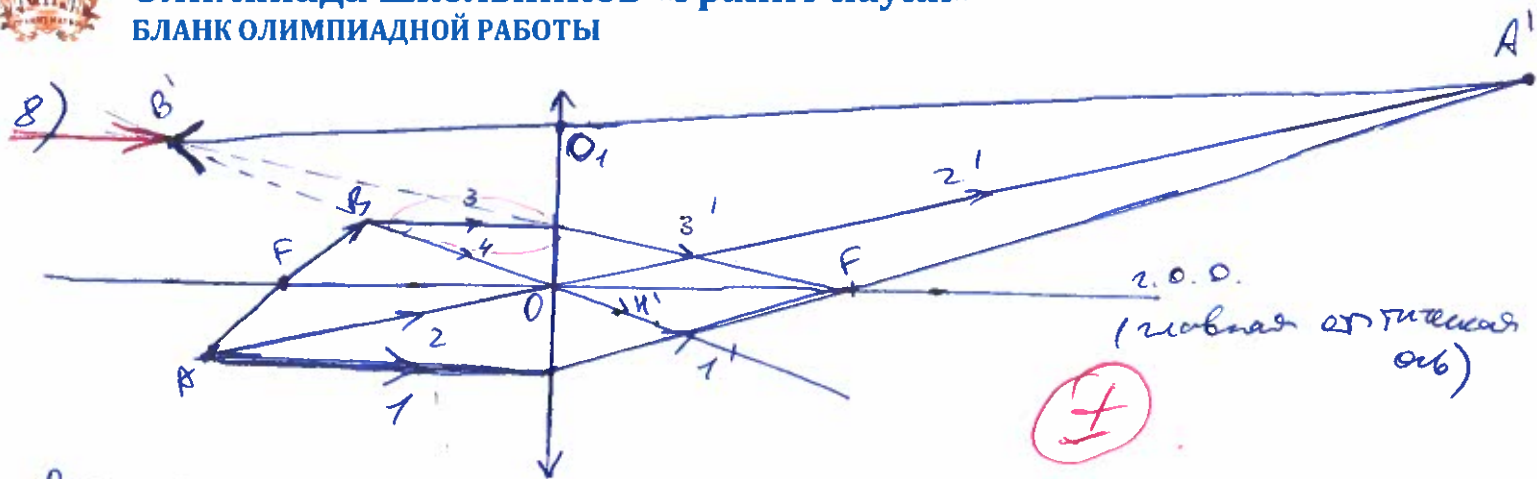
$$AG = \sqrt{AH_1^2 + H_1G^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{108+9}{16}} = \frac{\sqrt{117}}{4}$$

$$8. AG + GB = \frac{\sqrt{117}}{4} + \frac{\sqrt{111}}{2} = \frac{\sqrt{117} + 2\sqrt{111}}{4}$$

Ответ: Длина маршрута $\frac{\sqrt{117} + 2\sqrt{111}}{4}$, точка пересечения с ребром OC : $2,25$ от вершины O .



Олимпиада школьников «Гранит науки» БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ



Посмотрим: для точки A: луч 1 $\parallel$ з.о.о.
луч 1' преломится через F
луч 2 проходит через оптич. центр линзы, не преломляясь
(2 и 2' - это одна прямая)
 $2' \cap 1' = A'$ - изображение точки A.

Для точки B: луч 3 $\parallel$ з.о.о.
3' преломится через F
4 проходит через оптич. центр линзы, не преломляясь
(4 и 4' - это одна прямая).

Т.к. 4' и 3' расходятся, то изображение точки B будет мнимым. продолжим лучи
лучи 4' и 3' в другую сторону. $4' \cap 3' = B'$.

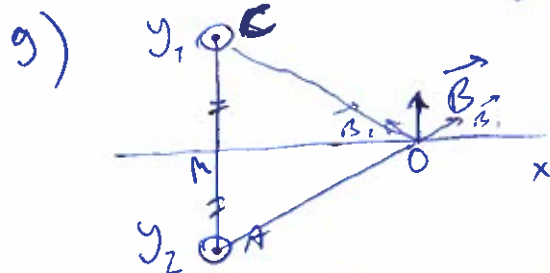
$A'B'$ - изображение AB.

Примечание: O_1 - точка пересечения $A'B'$ и главной оптич. осью.

$A'O_1$ - действительное изображение стрелки

$B'O_1$ - мнимое изображение стрелки

($B'O_1$ должно быть пунктиром!)



По правилу правой руки определяем направление $\vec{B}$.
возможное

Подходит случай, когда B_2 направлена $\nwarrow$,
и B_1 направлена $\nearrow$.

Это возможно, когда ток в обоих проводниках направлен к нам.

$\triangle CMO = \triangle MAO$ $OB \perp MO$, след. $Y_1 = Y_2$ (т.к. B_1 должна быть равна B_2).
 $AC \geq L$; $AM = CM \geq \frac{L}{2}$. Индукция имеет макс. значение, если $MO = AM = CM = \frac{L}{2}$.