



Вариант № 2

1) Это число 19.

4-х значное (четное) число начинается с 129.

Из всех чисел, принадлежащих промежутку $[1290; 1299]$ квадратами
целого числа является только $1296 = 36^2$.

Аналогично, из всех чисел, принадлежащих промежутку $[360; 369]$,
квадратов целого числа является лишь $361 = 19^2$. ± 4

2) $3m + pq = 2019$
 $\div 3 \quad \div 3$

$pq \div 3$. Не учитывая общности, пусть $p \div 3$, но p - простое $\Rightarrow p = 3$. $\Rightarrow$ число pq состоит
из двух множит.
3 и простого числа
оставим таблицу. Число (*) принадлежит данным числам к решению.

m	3m	pq	*
2	6	2013 = 3*671	+
3	9	2010 : 2, 5, 3...	-
5	15	2004 : 2	-
7	21	1998 : 2	-
1	33	1986 : 2	-
3	39	1980 : 2	-
7	51	1968 : 2	-
9	57	1962 : 2	-
3	69	1950 : 2	-
9	87	1932 : 2	-
1	93	1926 : 2	-
7	111	1908 : 2	-
1	123	1896 : 2	-
13	129	1890 : 2	-
17	141	1878 : 2	-
13	159	1860 : 2	-
9	177	1842 : 2	-
1	183		
7	189		
1			
3			
9			

$m > 2$

m - простое $\Rightarrow m$ не делит $\Rightarrow 3m$ не делит $\Rightarrow 2019 - 3m$ не делит.

$2019 - 3m = pq$ - не делит $\Rightarrow q$ не делит, т.к. $p = 3$.

Но q - простое, $q = 2$ не подходит, но других
простых чисел нет $\Rightarrow$

$\begin{cases} q=2 \\ p=3 \\ m=671 \end{cases}$ и $\begin{cases} q=3 \\ p=2 \\ m=671 \end{cases}$

единственные решения при $m > 2$.

$m=2$. $pq = 2013 = 3 \cdot 671$.

Ответ. $\{m, pq\}$:

$\{2; 3; 671\}, \{2; 671; 3\},$

$\{671; 2; 3\}, \{671; 3; 2\}.$

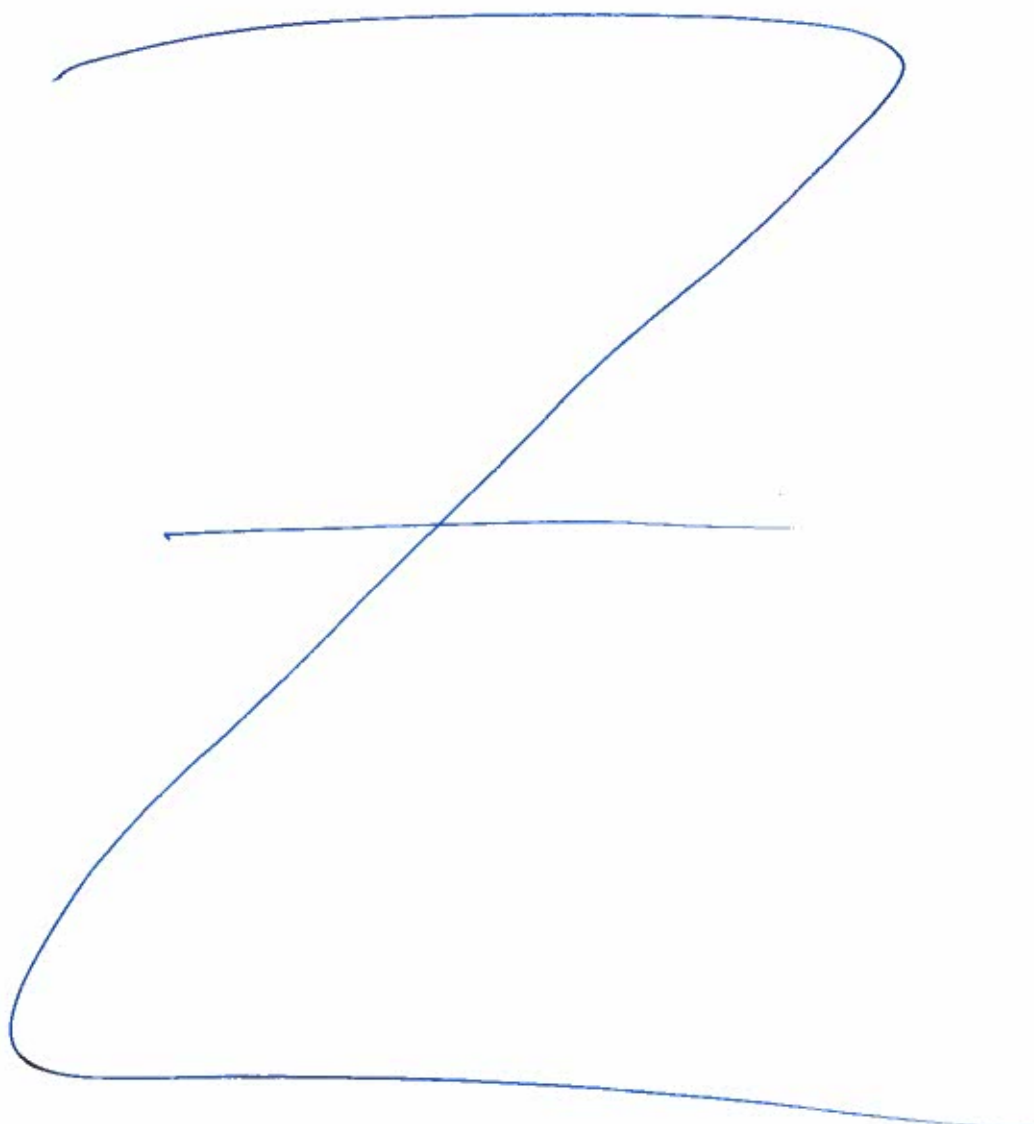
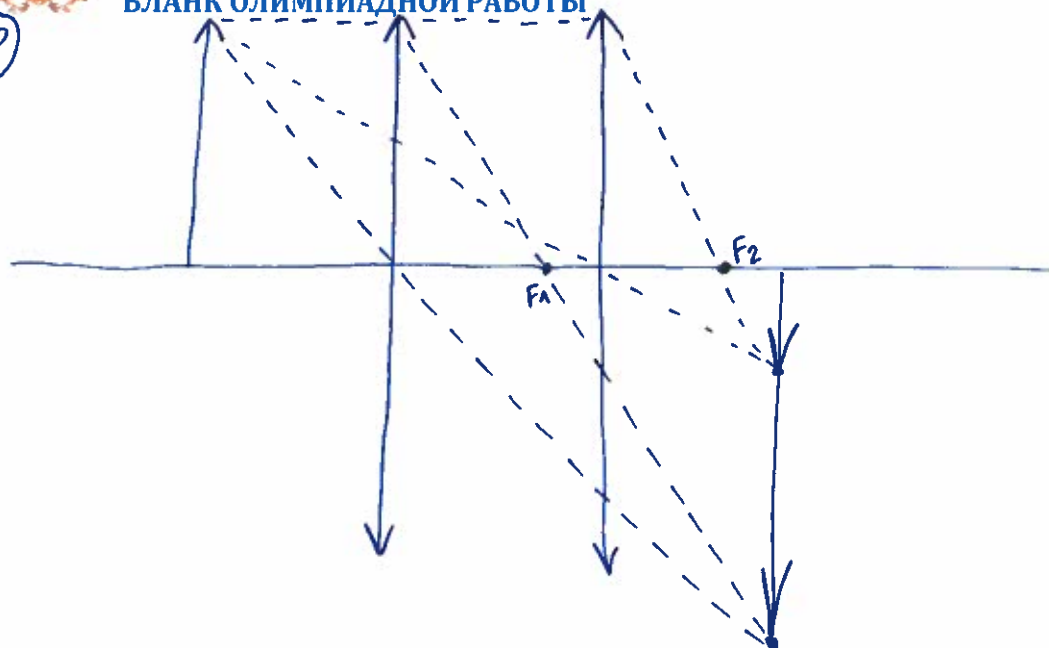
± 10



Олимпиада школьников «Гранит науки»

БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

8





Вариант № 2

Стержень ABC согнут в т. В.
Тогда $\triangle ABC$ - равносторонний.

Две половинки стержня будем рассматривать отдельно.
К каждой из них в середине приложена сила тягущая $\frac{mg}{2}$.

Запишем правило моментов:

$$MgH_{AB} + \frac{mg}{2}AH_A = \frac{mg}{2} \cdot \frac{AH_B}{2}, \text{ где } AH_A, AH_B, AH_C - \text{плечи "рычага"}$$

$AH_A = 0$, поскольку эти точки совпадают, т.к. $\triangle ABC$ - р/с и в нём медиана совпадает с высотой

$$\text{Итак: } MgH_{CB} = \frac{mg}{2} \cdot \frac{AH_B}{2}, H_B = H_C \Rightarrow M = \frac{m}{4}.$$

Ответ $\frac{m}{4}$.

$$1) 2 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x}$$

$$\text{Пусть } \sin^2 x = a, \sin^2 y = b, a, b > 0$$

$$2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} = \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)^2$$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, поскольку ср. арифм. всегда не меньше ср. геом $\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geq 1 \Rightarrow \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)^2 \geq 4.$$

$$\text{Пусть } \sin^2 x = 1, \sin^2 y = 1.$$

$$2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 4.$$

Ответ 4.

$$2) \alpha = 30^\circ, \text{ поскольку треугольник правильный}$$

$$r = \frac{a}{2} \tan \alpha = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$S_0 = \pi \cdot \frac{a^2}{12}$$

+7

Вписанный в вписанную окр-ть треугольник будет со вдвое меньшей стороной, поскольку из-за правильности треуг. на центр т. касания приходится середина стороны, а треугольники, на которые внешний тр-к разбивается внутренним - правильные.

$$\text{Получим: } \frac{\pi a^2}{12} + \frac{\pi a^2}{12 \cdot 4} + \dots = \frac{\pi a^2}{12(1 - \frac{1}{4})} = \frac{\pi a^2}{9}.$$

Страница 3

Ответ $\pi a^2 / 9$.



Олимпиада школьников «Гранит науки»
БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

9) $\Delta\varphi = U_{\text{на}} = \frac{I_{\text{на}}}{I_{\text{с-ке}}} \cdot R_{\text{на}} = \frac{I}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{IR}{4}$

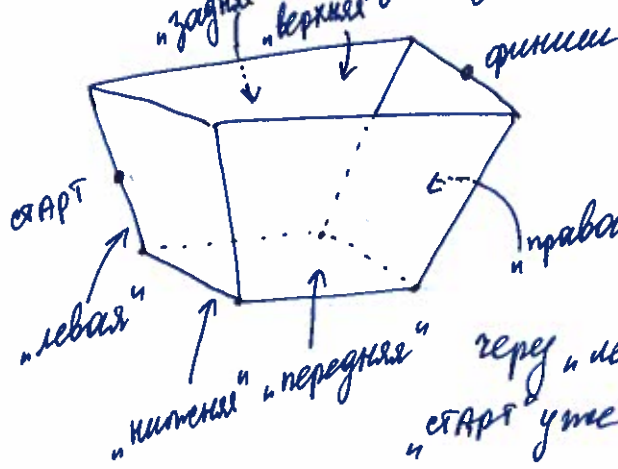
$\frac{I_{\text{на}}}{I_{\text{с-ке}}} = \frac{1}{2}$

x — расстояние до точки 0.
Тогда $I(x)$ монот. возр., а $R(x)$ монот. убыв.



Вариант № 2

Нужно перейти с «левой» грани на «правую».
Можно выбрать любую из 4-х граней для перехода — рассмотрим 4 пути.



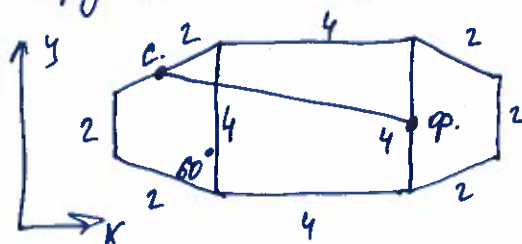
Переход через «переднюю» грань
рассматривать не будем, т.к.

«правая» несимметрична, поэтому переход
кратчайшие симметрично, поэтому переход

через «левую» стенку короче пути «через «правую», т.к.
«старт» уже лежит на этой плоскости.

Т.к. кратчайший путь между «стартом» и «финишем» является отрезком,
рассмотрим 3 развертки и рассчитаем длину пути.

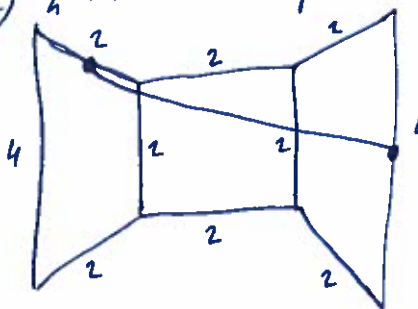
1) Через «верхнюю» грань



$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 4\sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{19 + 4\sqrt{3}}$$

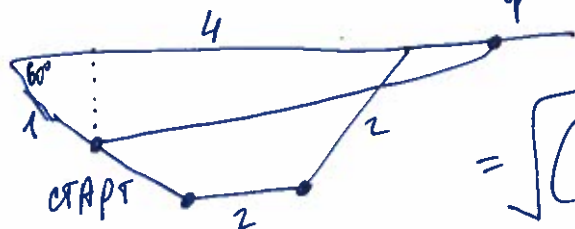
2) Через «нижнюю» грань



$$S = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 6\sqrt{3} + \frac{27}{4}} = \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$$

3) Через «заднюю» грань



$$S = \sqrt{\left(4 - \frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{121 + 3}{4}} = \sqrt{31}$$

Сравним $\sqrt{19 + 4\sqrt{3}}$, $\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$ и $\sqrt{31}$. Возведем в квадрат.
 $19 + 4\sqrt{3}$, $13 + 6\sqrt{3}$ и 31 .



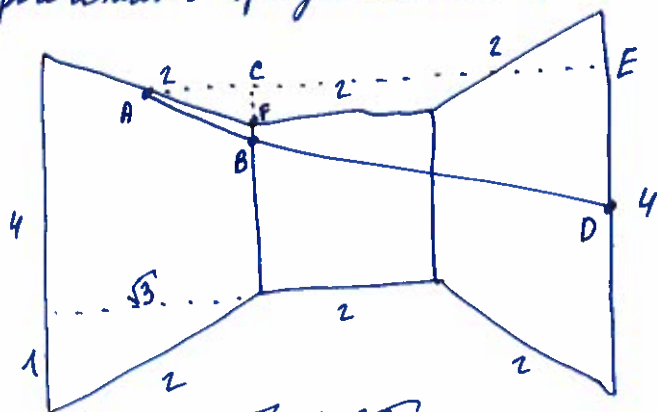
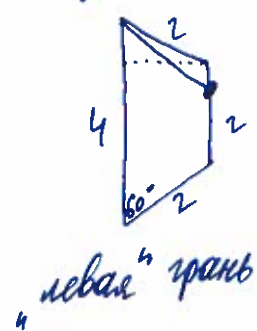
Олимпиада школьников «Гранит науки»

БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Сравним $19 + 4\sqrt{3}$ и $13 + 6\sqrt{3}$ $| -13$
 $6 + 4\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ $| -4\sqrt{3}$
 6 и $2\sqrt{3}$
 $36 > 12$

Сравним $19 + 4\sqrt{3}$ и 31 $| -19$
 $4\sqrt{3}$ и 12 $| :4$
 $\sqrt{3}$ и 3

Значит, маршрут через китную грань — наискратчайший.
 Наблюдая точку пересечения с противоположными ребрами.



$\triangle ABC \sim \triangle ADE$
 (по двум углам)

$\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{ED}$

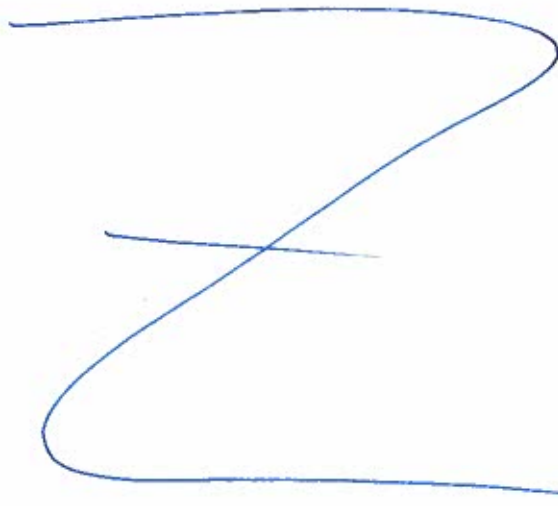
$\frac{\sqrt{3}/2}{BC} = \frac{2+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}$

Тогда $BF = \frac{27-12\sqrt{3}}{22} - \frac{1}{2} = \frac{16-12\sqrt{3}}{22} = \frac{8-6\sqrt{3}}{11} < 0$

Значит, путь пролегает не только через «китную» грань, но и «заднюю».

Визуально пересекает точку E.

$BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2+\frac{3\sqrt{3}}{2}} =$
 $= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{4+3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2(4+3\sqrt{3})} =$
 $= \frac{3\sqrt{3}}{8+6\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}(8-6\sqrt{3})}{64-36 \cdot 3} = \frac{18 \cdot 3 - 24\sqrt{3}}{44} =$
 $= \frac{54-24\sqrt{3}}{44} = \frac{27-12\sqrt{3}}{22}$



77