



Вариант № 4

3. $f = 4 + \frac{\lg^2 x}{\lg^2 y} + \frac{\lg^2 y}{\lg^2 x}$

$f_{\min}$ - ?

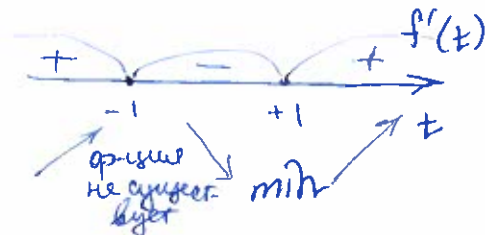
Пусть $\frac{\lg^2 x}{\lg^2 y} = t$, тогда $f(t) = 4 + t + \frac{1}{t}$
 $f(t) = 4 + t + t^{-1}$

$f'(t) = 0 + 1 - 1 \cdot t^{-2}$

$1 - \frac{1}{t^2} = 0$

$t = \pm 1$ - стационарные точки

$t^2 = 1$
 $(t-1)(t+1) = 0$



$t_0 = 1$

$f_{\min} = f(t_0) = 4 + 1 + \frac{1}{1} = 6$

Ответ: 6

1. Изначально в квадрат возводилось натуральное число, значит, все числа после операций будут натуральными.

$\overline{384a}$ - квадрат 62, $62^2 = 3844$

$a = 4$

$\overline{62b} \rightarrow 625 = 25^2$

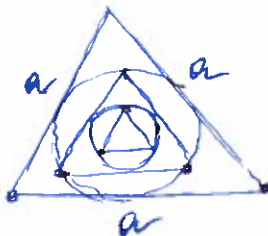
$b = 5$

$\overline{25c} \rightarrow 256 = 16^2$

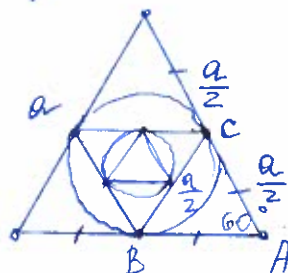
$c = 6$

Ответ: исходное число - 16. +

2.



Расположим вписанные в круг треугольнички наименьшего размера:



Вершины вписанных треугольничков находятся в точках касания окружности и большего треугольника.

$\triangle ABC$ $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC = \frac{a}{2}$ по свойству касательных.
 $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ по свойству равнобедренного



треугольника.

Из приведенных рассуждений видно, что сторона
треугольника уменьшается в 2 раза. $(a; \frac{a}{2}; \frac{a}{4}; \frac{a}{8}; \dots)$

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - площадь равностороннего треугольника.

$$S_1 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}; S_2 = \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a^2\sqrt{3} \cdot 4}{16 \cdot a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{4} = q$$

Сумма площадей - сумма бесконечно убывающей
геометрической прогрессии. $S = \frac{b_1}{1-q}$

$$S = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

+

7. $m_1 = m_2 = m$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$$\omega_1 = 2\omega_2$$

$$\frac{W_{\text{пот.1}}}{W_{\text{пот.2}}} = ?$$

$$W_{\text{пот.1}} = W_{\text{кин.1}} + W_{\text{пот.1}} = W_{\text{пот.1 max}} = mgh_1$$

1). $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\omega_1 = 2\omega_2$$

$$\frac{2\pi}{T_1} = 2 \cdot \frac{2\pi}{T_2}$$

$$T_1 = \frac{T_2}{2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{l_1}{g}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{l_2}{g}}\right)^2$$

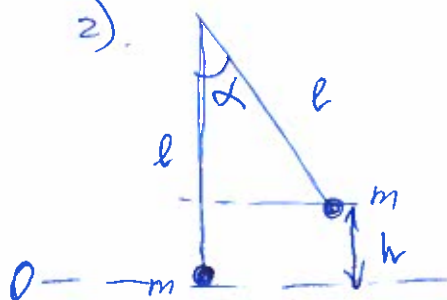
$$\frac{l_1}{g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{l_2}{g}$$

$$l_2 = 4l_1$$

l - длина
нити, м

8

2).



$$h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$$

$$W_{\text{пот.1}} = mgl_1(1 - \cos \alpha)$$

$$W_{\text{пот.2}} = mgl_2(1 - \cos \alpha)$$

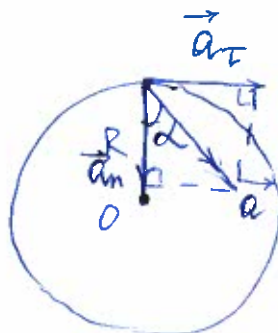
$$\frac{W_{\text{пот.1}}}{W_{\text{пот.2}}} = \frac{mgl_1(1 - \cos \alpha)}{mgl_2(1 - \cos \alpha)} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1}{4l_1} = 0,25$$

Ответ: $\frac{W_{\text{пот.1}}}{W_{\text{пот.2}}} = 0,25$



Вариант № 4

8. t
 $\alpha = 45^\circ$
 R
 $\epsilon = ?$



$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$a_n = \frac{v^2}{R}$, $a_t = \frac{v - v_0}{t}$, $v_0 = 0$ м/с, т.к. t - прашемиутак
времени после начала движения, $a_t = \frac{v}{t}$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{v}{t}, \quad v = \omega R$$

$$\frac{\omega R}{R} = \frac{1}{t}$$

$$\omega = \frac{1}{t}, \quad \omega_0 = 0$$

$$\epsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\omega}{t} = \frac{1}{t^2}$$

Отвеч: $\epsilon = \frac{1}{t^2}$

6. $d = 5$ м
 $a = 0,2$ м/с²
 $g = 10$ м/с²
 $F = ?$
 $v_0 = 0$ м/с

Решение:

S - перемещение предмета

l - перемещение изображения

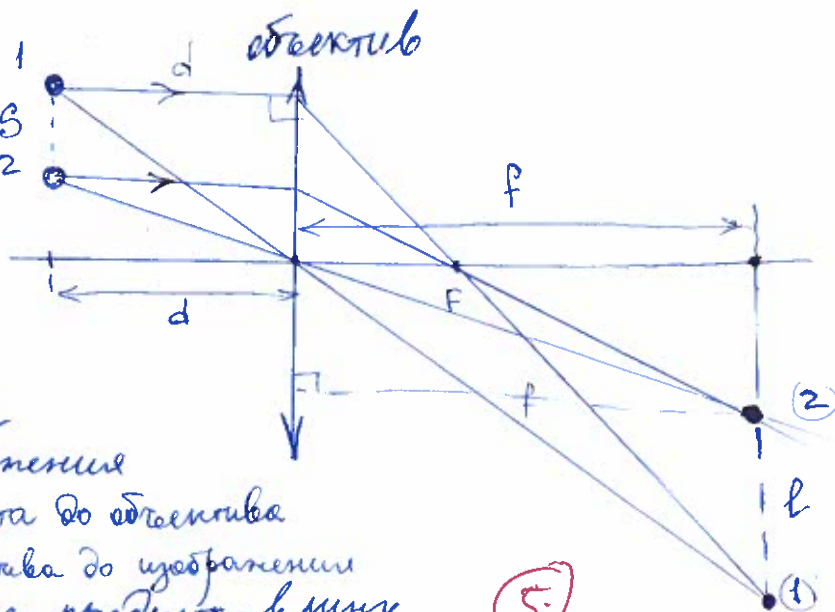
d - расстояние от предмета до объектива

f - расстояние от объектива до изображения

Γ - линейное увеличение предмета в линзе

F - фокусное расстояние

$$S = \frac{gt^2}{2}, \quad l = \frac{at^2}{2} \quad \left| \frac{l}{S} = \frac{a}{g} = \Gamma = \frac{f}{d} \right|$$





Олимпиада школьников «Гранит науки» БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Откуда $f = \frac{a \cdot d}{g}$; $f = \frac{0,2 \cdot 5}{10} = 0,1 \text{ м}$

Из формулы тонкой линзы
 $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, $F = \frac{fd}{f+d}$

$F = \frac{0,1 \cdot 5}{0,1+5} = \frac{0,5}{5,1} = \frac{5}{51} \text{ м} \approx 0,1 \text{ м}$

Ответ: $F = \frac{5}{51} \text{ м} \approx 0,1 \text{ м} = 10 \text{ см}$.

5.

1) Опустим $FK \perp BD$ в плоскости α

$\triangle BFK$

$BF = 4$

$\angle FBK = 60^\circ$

$\angle BKF = 90^\circ$

$\angle BFK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, значит,

$BK = 2$

$KF = 2\sqrt{3}$ по теореме

Пифагора ($FK = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$)

Проведем SK в (ABC)

$AS = BK = 2$, $SK \parallel AB$, $SK \parallel CD$, SK — средняя линия
 $SK = \frac{AB + CD}{2} = \frac{8 + 4}{2} = 6$

$l = SK + FK = 6 + 2\sqrt{3} = 2(3 + \sqrt{3})$

2) Докажем, что l — наискорейший путь.

Из $\triangle ASB$ по теореме косинусов

$SB = \sqrt{AS^2 + AB^2 - 2 \cdot AS \cdot AB \cdot \cos 60^\circ}$, $SB = \sqrt{2^2 + 8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{52}$

$FK \perp BD$, $AB \perp BF$, $AB \parallel SK$, $FK \perp SK$

SK — проекция SF на (ABC) , FK — высота, $\angle SKF = 90^\circ$

значит, $l = SK + KF$ — минимальный по длине путь.

K — середина ребра BD .

Ответ: $l = 2(3 + \sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3}$; K — середина BD .



Вариант № 4

4. $673m - pq = 2019$
 m, p, q — положительные простые числа.

$$673m = 2019 + pq$$

673 — простое

$$m=1 \quad 673 = 2019 + pq$$

$$2 \quad 1346 = 2019 + pq$$

$$3 \quad \overset{2019}{\cancel{3365}} = 2019 + pq$$

$$2019 = 2019 + pq \quad pq \neq 0 \quad -$$

$$5 \quad 3365 = 2019 + pq$$

$$7 \quad 4711 = 2019 + pq$$

$$11 \quad 7403 = 2019 + pq$$

$$3365 = 2019 + pq$$

$$pq = 1346 = 673 \cdot 2$$

$$\boxed{\begin{matrix} p = 673 \\ q = 2 \\ m = 5 \end{matrix}}$$

или

$$m = 5$$

$$p = 2$$

$$q = 673$$

±

Ответ: $m=5, p=673, q=2$ или $m=5, p=2, q=673$.



Олимпиада школьников «Гранит науки»

БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

