



Вариант № 4

№3

$$4 + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 y} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 x}$$

Пусть $\operatorname{tg}^2 x = a$; $\operatorname{tg}^2 y = b \Rightarrow a \geq 0$; $b \geq 0$

$$4 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$(a+b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \rightarrow \text{при положительных } a \text{ и } b \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$4 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 6$$

+

Ответ: 6

№4

$$673m - pq = 2019$$

$$673m - pq = 673 \cdot 3$$

$$673(m-3) = pq \Rightarrow$$

$pq : 673$, а т.к. p и q — простые числа, выходит что одно из них равно 673. Пусть $p = 673$

$$673(m-3) = 673 \cdot p$$

$$m-3 = p$$

m — нечетно, т.к. если оно равно двум, то p отрицательно противоречие $\Rightarrow$

$$m-3 - \text{четно} \Rightarrow$$

$$p - \text{четно} \Rightarrow p = 2 \Rightarrow m = 5$$

Первое решение: $m = 5$; $p = 2$; $q = 673$

+



Олимпиада школьников «Гранит науки» БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

Аналогично разбирается случай, когда $p = 673$

Ответ: $m = 5$; $p = 2$; $q = 673$
 $m = 5$; $p = 673$; $q = 2$

Алгоритм: (Пусть задано число k тогда $\frac{k^2 - q}{10} = k$ где q - последняя цифра k)

- ① n
- ② n^2
- ③ $\frac{n^2 - k}{10}$ - где k - последняя цифра n^2
- ④ $\left(\frac{n^2 - k}{10}\right)^2$
- ⑤ $\left(\frac{n^2 - k}{10}\right)^2 - s$ - где s - последняя цифра $\left(\frac{n^2 - k}{10}\right)^2$

$$\frac{\left(\frac{n^2 - k}{10}\right)^2 - s}{10} - s = 384$$

$$\left(\frac{n^2 - k}{10}\right)^2 - s = 3840$$

$$\left(\frac{n^2 - k}{10}\right)^2 = 3840 + s$$

$3840 + s$ - натурально $0 \leq s \leq 9 \Rightarrow$

$$s = 4$$

$$3844 = 62^2 \quad (63^2 = 3969 - \text{много}; 61^2 = 3721 - \text{мало})$$

$$\frac{n^2 - k}{10} = 62$$

$$n^2 - k = 620$$

$$n^2 = 620 + k$$

$620 + k$, натурально $0 \leq k \leq 9 \Rightarrow$

$$k = 5$$

$$n^2 = 625 = 25 \cdot 25 \quad (24^2 = 576 - \text{мало}; 26^2 = 676 - \text{много})$$

Ответ: ~~$n = 25$~~

Ответ: заданное число 13.

$$\frac{r^2 - q}{10} = 16$$

$$r^2 - q = 160$$

$$r = 13$$

($12^2 = 144$ - мало; $14^2 = 196$ - много)

$$\frac{k^2 - p}{10} = 25$$

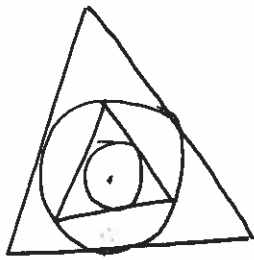
$$k^2 - p = 250$$

$$k^2 = 250 + p$$

$$k = 16 \quad (15^2 = 225 - \text{мало}; 17^2 = 289 - \text{много})$$



Вариант № 4



Площадь первого самого большого
треугольника равна:

$$S_1 = \frac{a^2}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

Радиус первой окружности равен

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

Площадь второго ~~сам~~ треугольника:



Т.к. треугольник правильный центр описанной
окружности совпадает с центром вписанной
и лежит на точке пересечения биссектрис
(каждая из которых высота и делится
пополам отношением 2 к 1):

$$H = \frac{\sqrt{3}a \cdot 3}{6 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$$

По теореме Пифагора (где x - сторона треугольника):

$$\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{4} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$S_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{8 \cdot 4}$$

Сумму площадей этих треугольников можно представить
как сумму бесконечно убывающей прогрессии,
которую можно рассчитать по формуле:

$$b_1 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad q = 8: \quad \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}}{4 \cdot 7} = \frac{\sqrt{3}a^2}{28}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}a^2}{28}$

√7

Период колебание
Период колебание
Частота первого:

первую маятника
вторую маятника

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

; Частота вторая $\frac{\sqrt{g}}{2\pi \sqrt{l_2}}$

$$\sqrt{l_1} = 2\sqrt{l_2} \quad (т.к. \quad T_1/T_2 = 2)$$

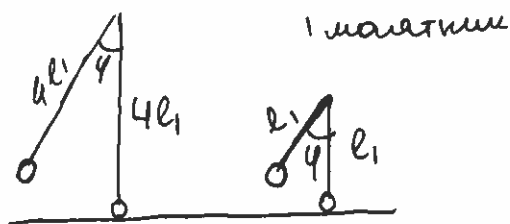
$$4l_1 = l_2$$

Полная механическая энергия складывается
из потенциальной и кинетической. Удобнее всего



Олимпиада школьников «Гранит науки» БЛАНК ОЛИМПИАДНОЙ РАБОТЫ

рассмотреть тот случай когда кинетическая энергия равна нулю т.е. наивысшая точка траектории:
2 маятник



$$E_2 = mg(4l_1 - 4l_1 \cos \varphi) = mg 4l_1 (1 - \cos \varphi)$$

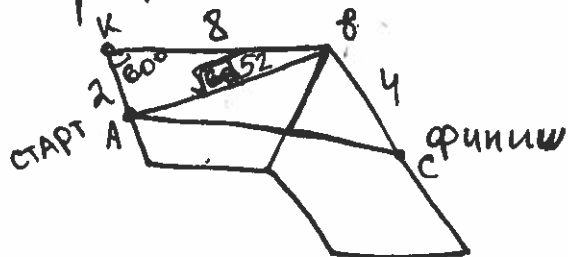
$$\frac{E_2}{E_1} = 4$$

Ответ: в 4 раза

$$E_1 = mg(l_1 - l_1 \cos \varphi) = mg l_1 (1 - \cos \varphi)$$

№5

Рассмотрим часть развертки интересующих нас граней.



Прямой отмеренно наименьшее расстояние (AC) именно оно будет таковым из неравенства треугольника

Найдем AB - через теорему косинусов:

$$AB^2 = 4 + 64 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 4 + 64 - 8 = 60 \Rightarrow AB = \sqrt{60}$$

По теореме синусов найдем $\angle KBA$:

$$\frac{\sqrt{52} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sin \angle KBA} \Rightarrow \sin \angle KBA = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}}$$

$$\angle ABA = 120^\circ - \angle KBA \Rightarrow \cos(120^\circ - \angle KBA) = \cos 120^\circ \cos \angle KBA + \sin 120^\circ \sin \angle KBA = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{52}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}} = -\frac{4}{2\sqrt{52}} = -\frac{2}{\sqrt{52}} = \cos \angle ABC$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cos \angle ABC$$

$$AC^2 = 52 + 16 + \frac{2\sqrt{52} \cdot 4 \cdot 2}{\sqrt{52}} = 52 + 16 + 16 = 84$$

Ответ: $\sqrt{84}$



Вариант № 4

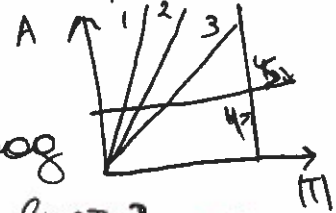
Рассмотрим первый закон термодинамики для адиабатических процессов:

$Q=0; \Delta U=-A'$

для одноатомного газа: $U = \frac{3}{2} \nu RT$, для двухатомного $U = \frac{5}{2} \nu RT$

Первый закон термодинамики для изобарного процесса:

$Q = \Delta U + A' \Rightarrow A' = Q - \Delta U$



Таким образом, можно сделать вывод что адиабатическому процессу соответствует 3 график (т.к. только работа идет на нагревание)

При изобарном процессе (работа такая же совершенная температура) т.к. молярная масса аргона больше молярной массы азота при одинаковой массе азота больше масс аргона а значит Q первого больше, а значит при одинаковой работе нагреется на меньшее кол-во температур, а значит второй график соответствует изобарному процессу азота, а третий изобарному процессу аргона

Всего семь вариантов: $n=100, m=1, m=100, n=1$
 $m=10, n=10, m=25, n=4, n=25, m=4, m=50, n=2$
 $n=50, m=2$

Общее напряжение U_n , Общее сопротивление $\frac{n}{m} + 2$
Общая сила тока: $\frac{U_n}{\frac{n}{m} + 2} = \frac{2 U_n m}{n + 2m} = \frac{200U}{n + 2m}$

Это значение будет максимальным при минимальном $n + 2m$; ① 102; ② 201 ③ 30, ④ 54 ⑤ 30

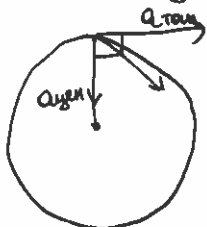
⑥ 102 ⑦ 54 $\Rightarrow$ Наибольшая сила тока при $n=10, m=10$

Ответ: $n=10; m=10$



№ 8

Вектор полного ускорения тела складывается из вектора тангенциального ускорения и центростремительного ускорения; угол между этими векторами равен 90° , т.к. сумма этих векторов расположена под равным углом от этих векторов, то $a_{\text{центр}} = a_t$



$$a = \sqrt{a_{\text{центр}}^2 + a_t^2} = a = \sqrt{2 a_{\text{центр}}^2} \Rightarrow$$

$$a_{\text{центр}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{a}{\sqrt{2}}$

+20

№ 10

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

Значит всего возможно 7 различных ситуаций:

① $m=100, n=1$

② $m=100, n=1$

③ $m=4, n=25$

④ $m=4, n=25$

⑤ $m=2, n=50$

⑥ $m=2, n=50$

⑦ $m=10, n=10$

Напряжение на всей цепи будет $U \cdot n$, где U - напряжение одного из элементов цепи. Общее сопротивление $R_{\text{общ}} = \frac{n}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2}}$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U n (2m+1)}{2n} = \frac{U (2m+1)}{2}$$

$$I_2 = U n$$

(на интересующем нас резисторе)

$$R_{\text{общ}} = \frac{n}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2}} = \frac{2Unm}{n+2}$$

Т.е. задача сводится к поиску наибольшего значения:

При первом случае: $\frac{200}{3} U$, второй: $\frac{200 U}{102}$

Третьим: При всех парах числитель равен: $200 U$
знаменатель минимален при $n=1$, а значит
дробь максимальна при $n=1, m=100$

Ответ: $n=1, m=100$